

タイトル	非整数次微分演算によるフーリエ画像処理
著者	高井, 信勝
引用	北海学園大学工学部研究報告, 34: 97-109
発行日	2007-02-20

# 非整数次微分演算によるフーリエ画像処理

高井 信勝\*

## Fourier-image Processing by Non-integer Differentiation

Nobukatsu TAKAI\*

### Abstract

In image processing, integer-order differentiation is often used to detect edges, maxima, minima, and points of inflection, especially order 1 used by the gradient and order 2 by the Laplacian. In the present study, non-integer (fractional) differentiation is applied to images which are processed in Fourier space, and the characteristics of differentiation filter are presented. The several effects of non-integer differentiation on image processing are also presented in the concrete form.

### 1. はじめに

画像処理において、微分演算を用いると、エッジの検出やそれによって囲まれた領域の抽出、あるいはまた明るさ（強度）が連続的に変化する画像においては極値点や変曲点などを検出できる。画像の微分は、通常、PrewittフィルタやSobelフィルタのような1次微分（差分）フィルタ、あるいはLaplacianフィルタのような2次微分フィルタが用いられる<sup>1)-3)</sup>。一方、このような近傍処理による微分処理とは別に、画像のフーリエ変換面でフーリエスペクトルに対してフィルタリングを行うことで同様な画像処理を行うことができる<sup>4)</sup>。

本稿では、後者の微分処理、つまりフーリエスペクトルのフィルタリングによる微分演算を単に整数次微分だけでなく、非整数次の微分<sup>5),6)</sup>に拡張したときの微分効果について報告する。具体的には、非整数次微分フィルタの特性を明らかにし、併せてまた、非整数次微分を画像処理に適用したときのいくつかの効果を提示する。

---

\* 北海学園大学工学部電子情報工学科

\* Department of Electronics and Information Engineering, Faculty of Engineering, Hokkai-Gakuen University

## 2. フーリエ変換に基づく非整数次微分フィルタ

まず、簡単のために、1次元信号 $g(x)$ を考える。信号 $g(x)$ のフーリエスペクトルを $G(\xi)$ とすると、 $g(x)$ はフーリエ積分によって

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi) \exp(2\pi i x \xi) d\xi \quad (1)$$

と表される。この表式において、整数次の微分は、 $p$ を整数として

$$\frac{d^p g(x)}{dx^p} = \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi i x \xi)^p G(\xi) \exp(2\pi i x \xi) d\xi \quad (2)$$

とかける。当然、 $p=1$ では通常の1次微分、 $p=2$ では2次微分である。非整数次の微分は、この $p$ を一般の実数（非負の実数）に拡張しただけのものである<sup>†</sup>。

式(2)の右辺の積分は、信号のフーリエスペクトル $G(\xi)$ の単なる逆フーリエ変換ではなく、それに非整数次微分における $p$ 次のフィルタ関数、

$$F^{(p)}(\xi) = (2\pi i x \xi)^p \quad (3)$$

を乗じたものの逆フーリエ変換である。ここで、式(3)で与えられるフィルタ関数が、虚数単位 $i$ の $p$ （実数）乗を含んでいることに配慮すると、式(3)は

$$F^{(p)}(\xi) = \begin{cases} (2\pi |\xi|)^p \exp\left(i \frac{\pi}{2} p\right), & (\xi \geq 0) \\ (2\pi |\xi|)^p \exp\left(-i \frac{\pi}{2} p\right), & (\xi < 0) \end{cases} \quad (4)$$

と書き換えられる。つまり、フィルタ関数は一般には複素数関数であり、その大きさは周波数領域の正領域と負領域で等しい、つまり大きさは偶関数である。しかし、位相は符号が異なり、正領域と負領域では、互いに複素共役の関係であることがわかる。また、フィルタ関数は $p$ が奇数の整数であれば純虚数であり、偶数であれば実数である。しかし、非整数のときにはフィルタ関数は複素数の値である。

図1で左図は、 $0 < p \leq 1.0$ の微分次数 $p$ に対して、フィルタ関数 $F^{(p)}(\xi)$ の大きさ $|F^{(p)}(\xi)|$ をスペクトル空間座標 $\xi$ の関数として表した結果である。ここで、直線のV字形で示される特性が通常の1次微分（つまり、 $p=1.0$ ）の場合で、 $p$ が1より小さい非整数次微分の場合には、鳥が翼を広げた形の特性になる。つまり、 $p=1.0$ の場合と比べて、低次の非整数次微分（ $p < 1$ ）では、 $p$ が小さいほどゼロ周波数付近が盛り上がりとともに、高周波数成分が強く抑制

<sup>†</sup> 非整数次微分の定義は一通りではない。ここでは、フーリエ積分に基づく定義を用いるが、他の定義の詳細は文献[6]にみられる。

される。一方、フィルタ関数の位相角は、微分次数 $p$ に比例して増大するが、空間周波数 $\xi$ の符号にも関係し、図1（右図）に示すように、 $\xi \geq 0$ での位相角は $\phi_{\xi \geq 0} = \frac{\pi}{2}p$ であり、 $\xi < 0$ では $\phi_{\xi < 0} = -\frac{\pi}{2}p$ である。

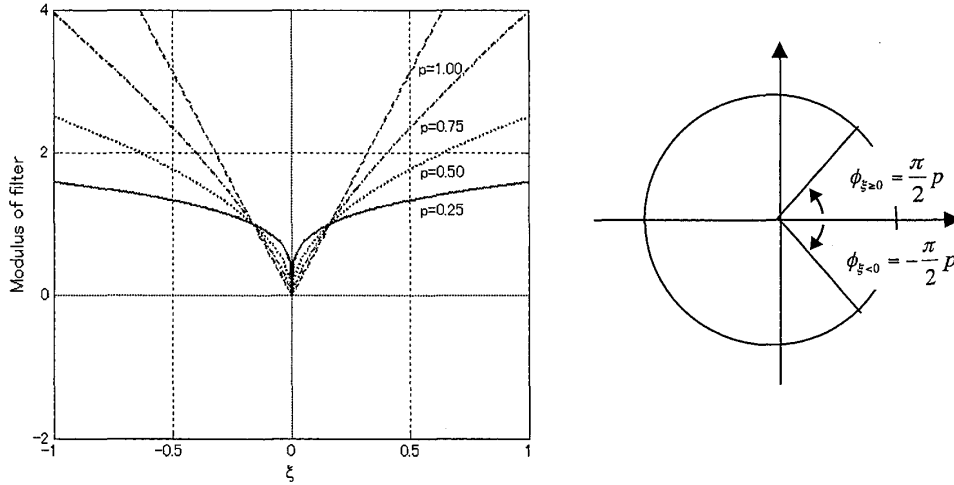


図1  $0 < p \leq 1$ における $p$ 次の微分フィルタの周波数特性。左が絶対値，右が位相角。

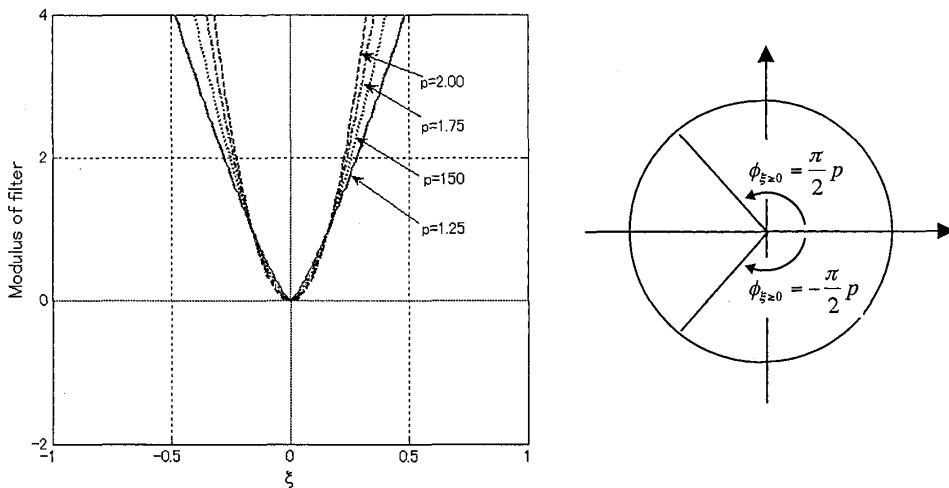


図2  $1 < p \leq 2$ における $p$ 次の微分フィルタの周波数特性。左が絶対値，右が位相角。

図2には、 $1 < p \leq 2.0$ における $p$ 次の微分フィルタの絶対値と位相角の振る舞いを示す。この $p$ の領域では、フィルタ関数の絶対値はほぼ似た特性を持つように見えるが、 $p=1$ のV字形の振る舞いから $p=2$ の放物線の振る舞いに連続的に近づくにつれて高周波成分がますます強調されることになる。一方、右図の位相角は $\xi$ の正領域では $\pi/2 \sim \pi$ ，負領域では $-\pi/2 \sim -\pi$ の値をとり、 $p=2$ では $\pm\pi$ の値であるのでこの場合にはフィルター関数は実数である。

### 3. 画像の非整数次微分

ここまで、1次元信号の非整数次微分を述べてきたが、画像に対しては、式(2)を2次元

配列の画像データに拡張する。つまり、画像データ  $g(x, y)$  の方向の  $p$  次微分は

$$\frac{\partial^p g(x, y)}{\partial x^p} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi i \xi)^p G(\xi, \eta) \exp[2\pi i (\xi x + \eta y)] d\xi d\eta \quad (5)$$

であり、

$$\frac{\partial^q}{\partial x^q} \left[ \frac{\partial^p g(x, y)}{\partial x^p} \right] = \frac{\partial^{p+q} g(x, y)}{\partial x^{p+q}} \quad (6)$$

が成り立つ。また、 $x$  方向に  $p$  次、 $y$  方向に  $q$  次の非整数次微分は

$$\frac{\partial^q}{\partial x^q} \left( \frac{\partial^p g(x, y)}{\partial x^p} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi i \xi)^q (2\pi i \xi)^p G(\xi, \eta) \exp[2\pi i (\xi x + \eta y)] d\xi d\eta \quad (7)$$

である。なお、画像データの微分値は一般には非負の値とは限らず、負の値になる場合もある。しかし、画像データは非負の値であるので、微分値の画像を表示するときには、その絶対値データを用いるか、あるいは負の部分をクリップする処理が取られる。また、画像の輪郭を検出しようとするときには、各成分の絶対値の和を求めることが有力になる。このようなときには、

$$\left| \frac{\partial^p g(x, y)}{\partial x^p} \right| + \left| \frac{\partial^q g(x, y)}{\partial x^q} \right| \quad (8)$$

を用いる。

以下、この章では、いくつかの例に関して非整数次微分を式 (5) によって求め、その絶対値をとった結果を示す。したがって、負の量は正の値に折り返されることになる。なお、原画像としては、連続分布する中心対称性を持つガウス分布画像、一般的な画像、および2値画像を用いて非整数次微分の効果を調べた。

### 3.1 ガウス分布画像の非整数次微分

まず、原画像として、画像の明るさ（強度）が連続的に変化するガウス分布画像の非整数次微分を調べた。図3がこの結果で、原画像の信号を式 (5) に基づいて計算し、その絶対値をとった結果である。この図で、 $p=0$  は微分を行わない場合で、結果は当然原画像そのものである。その他は  $p=0.25, 0.50, 0.75, 1.00$  の横方向 ( $x$  方向) に関する非整数次微分画像（絶対値）である。この中の非整数次微分の結果をみると、結果の微分画像は双葉状のパターンになるが、原画像が原点对称な信号であるにもかかわらず、左右対称なパターンにはならないことがわかる。

図4は、この非対称性を1次元のガウス関数を原信号として調べた非整数微分の絶対値の結果で、これらは図3の中心線上の微分の絶対値のプロフィールである。結果として、1次元であっても2次元であっても、対称関数であるガウス分布画像の非整数次微分は、微分する座標軸上で対称にはならない。結果が対称になるのは整数次微分の場合に限られることがわかる。

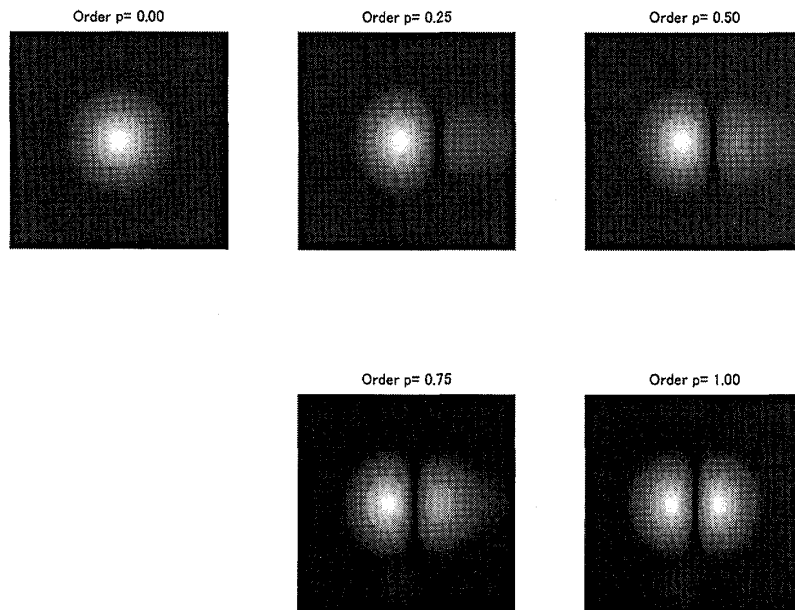


図3  $0.25 \leq p \leq 1.0$ におけるガウス分布画像の非整数次微分。画像サイズはおのおの $512 \times 512$ 。表示はその中央部分の $128 \times 128$ の領域。 $p = 0.00$ は原画像パターン。

ここにみられるように、原信号が対称関数であっても、非整数次微分の結果の絶対値は対称関数にならない。微分結果が対称であるか、非対称であるかは式(4)で与えられるフィルタ関数の対称性によっている。つまり、原信号がガウス分布信号のように中心対称性をもつとき、そのフーリエスペクトルも対称性をもち、式(2)において $G(\xi)$ は対称関数である。したがって、式(2)の逆フーリエ変換として求められる結果が対称であるかどうかは、フィルタ関数 $F(\xi)$ の対称性によるからである。

$p = 1$ のときには、式(4)の位相因子は $\xi \geq 0$ に対して $+i$ であり、 $\xi < 0$ に対して $-i$ であるが、微分の絶対値をとると等しい。また、 $p = 2$ のときには、式(4)の位相因子は $\xi \geq 0$ と $\xi < 0$ のいずれに対しても1であり、これも微分の絶対値は等しい。問題は、 $p$ が非整数のときで、このときには、式(4)の $F(\xi)$ の位相因子は $\xi$ の正負の領域でおなじ結果にならない。このことが、微分結果が対称にならない数学的な根拠である。

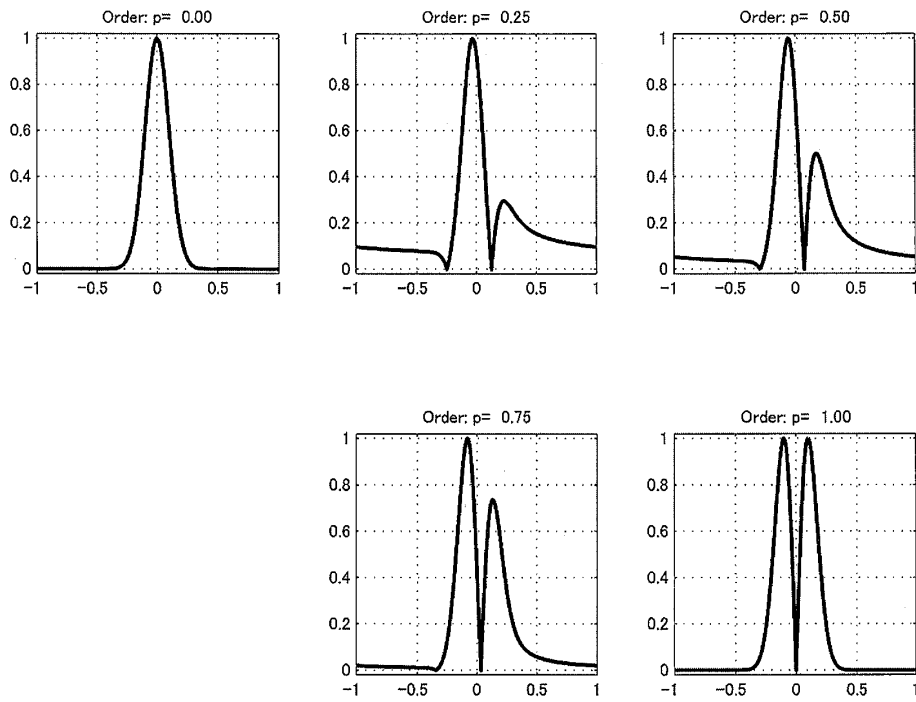


図4  $0.25 \leq p \leq 1.0$ における1次元ガウス信号の非整数次微分（絶対値）。

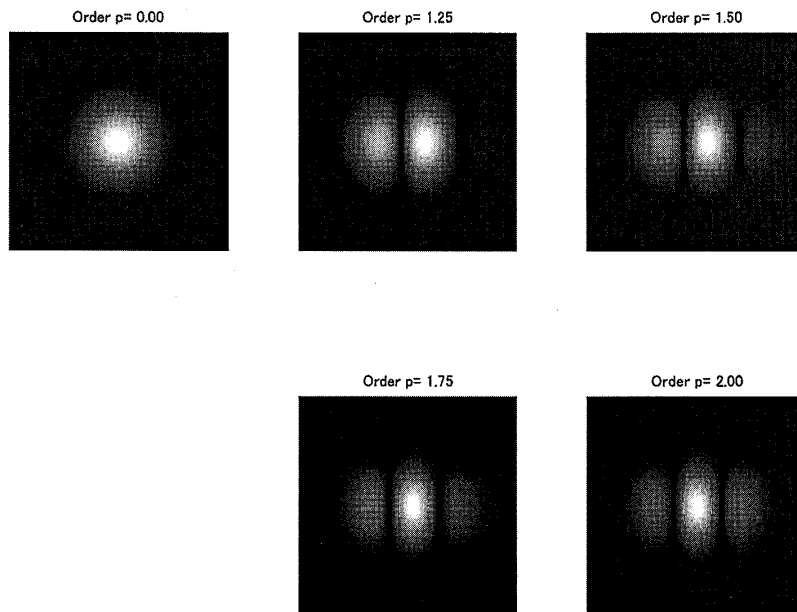


図5  $0.25 \leq p \leq 1.0$ におけるガウス分布画像の非整数次微分。画像サイズはおおよそ $512 \times 512$ 。表示はその中央部分の $128 \times 128$ の領域。 $p = 0.00$ は原画像パターン。

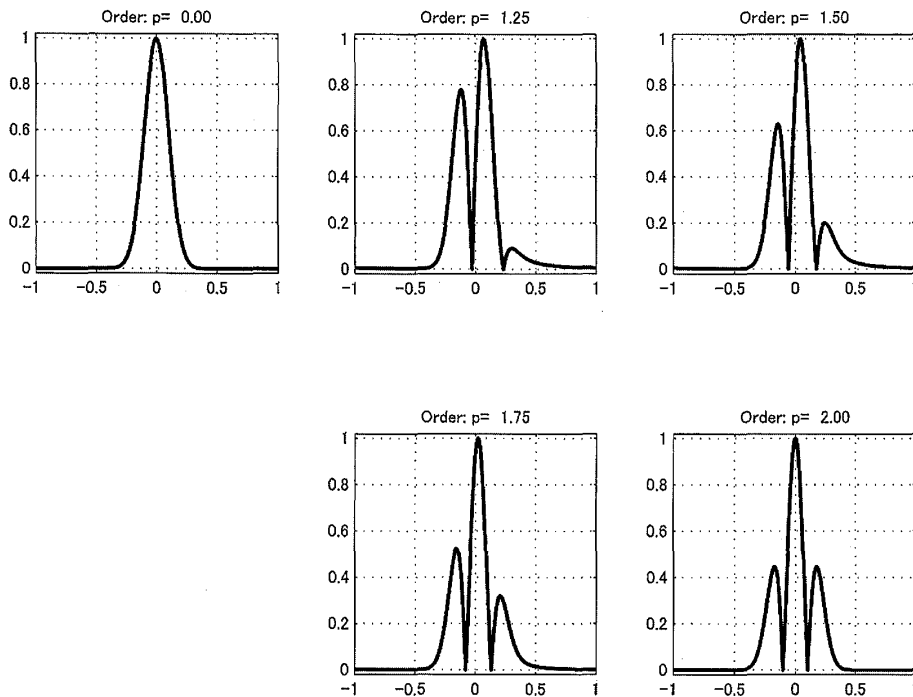


図6  $0.25 \leq p \leq 1.0$ における1次元ガウス信号の非整数次微分（絶対値）。

図5は、次数 $p$ が1より大きい $p = 1.25, 1.50, 1.75, 2.00$ に対して得られたガウス分布画像の微分の結果である。これらの微分パターンは三葉状の画像になるが、この場合にも $p$ が整数以外では微分画像は対称にならない。また、図6は図5と同じ次数の1次元ガウス関数の微分結果（絶対値）である。これらの結果も $p = 2$ の整数のときのみ対称であって、非整数次の微分においては非対称になる。

ここまでみてきたように、原点の周りで中心対称なガウス分布画像の非整数次微分は、一般に非対称な結果を与える。ここで、図4、図6に示すような1次元関数の非整数次微分の絶対値をひとつの分布関数として扱うと、分布の対称性の度合いを歪度 (skewness)

$$s = \frac{M_3}{\sigma^3} \quad (9)$$

を用いて定量的に評価できる。ここで、 $\sigma$ は分布の標準偏差、 $M_3$ は3次の中心モーメントである。

図7は、1次元ガウス信号の非整数次微分の対称性を、次数が $0 < p \leq 2$ の領域で歪度 $s$ をプロットした結果である。この図からわかるように、 $0 < p \leq 1$ においては、 $p$ がゼロから増大するにつれて徐々に非対称性が増大し、およそ $p = 0.9$ を超えたところから急速に対称分布に移行し、 $p = 1.0$ で完全な対称分布になることがわかる。一方、 $1 < p \leq 2$ の領域では、 $p$ が整数値から外れると非対称性が急激に増大し、領域の中央付近である $1.4 \sim 1.6$ のあたりで非対称性がもっとも大きい振る舞いになる。



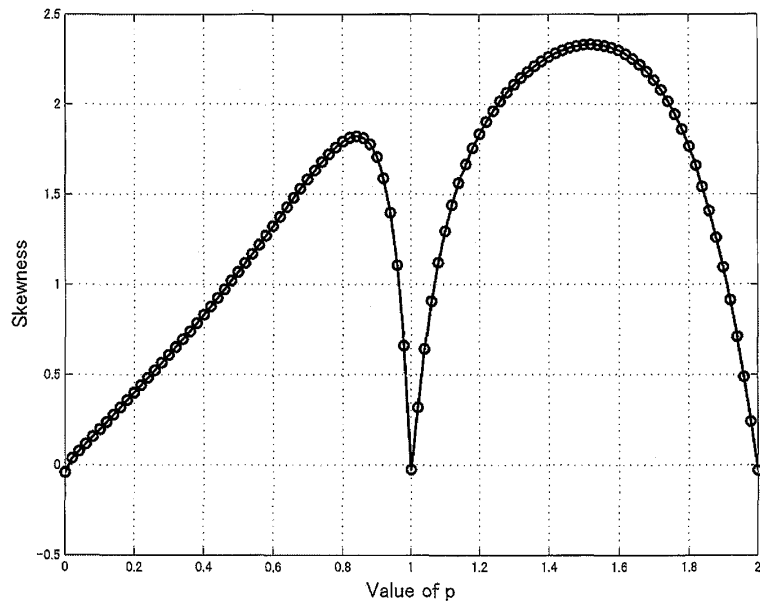


図7  $0 < p \leq 2$ における非整数次の微分結果（図4，図6）の歪度値。

ここまで式(9)で与えられる歪度を用いて、原点对称なガウス分布画像の非整数次微分の非対称性を評価してきたが、これとは別に、視点を変えて微分曲線の最大値の振る舞いから微分曲線を検討した。図4にみられるように、非整数次微分の次数 $p$ がゼロから増大していくときの微分曲線は、ガウス関数の形を徐々に崩して変形していく。このとき、最初、原点（中心）にある最大点は、 $p$ の増加とともに、負の方向へシフトしていき、同時に正の側に別のピークが徐々に成長してくる。

よく知られているように、1次微分の最大値は原信号の変曲点を与えるが、ここにみられたように、非整数次の微分の最大値は、次数 $p$ とともに移動する。この移動、つまり原点から測った最大位置を $p$ の関数として求めると、図8の結果が得られた。ここにみられるように、 $p$ が整数1に近づくにつれて微分曲線の最大点は、原画像の変曲点の位置（つまり、分布関数で言うところの標準偏差の位置）に近づく。言い換えると、非整数次の微分の最大値は次数が増大するにつれて、変曲点の位置に単調に近づいていく。

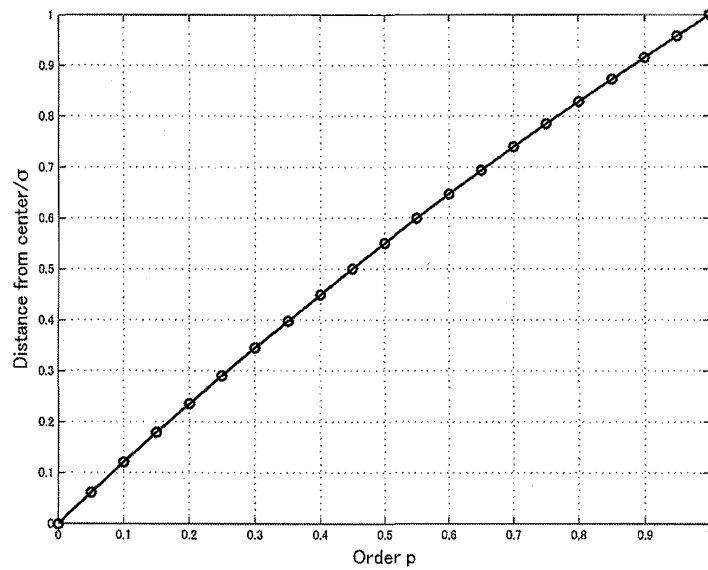


図8 次数 $p$ の関数としての微分の最大値位置。 $p=1$ に近づくと、分布関数における標準偏差 $\sigma$ に近づく。

### 3.2 一般画像の非整数次微分

図9および図10は、中間調を含む一般的な画像に対して、非整数次微分を行った結果である。これらは、式(8)を適用して、 $x$ 、 $y$ の両方に対する種々の次数 $p$ の微分結果である。

これらの図において、左上が原画像で、右下が通常の1次微分であり、 $p=0.25, 0.5, 0.75$

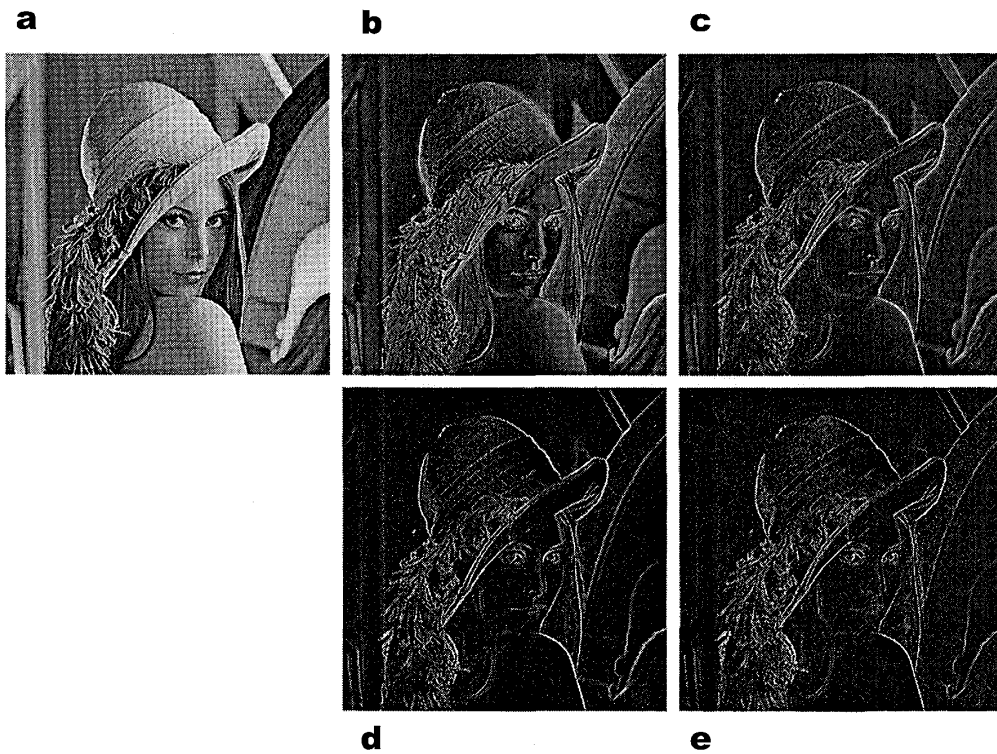


図9 一般画像の非整数次微分(絶対値)。(a)  $p=0$ つまり原画像(画像サイズ $512 \times 512$ )、(b)  $p=0.25$ 、(c)  $p=0.5$ 、(d)  $p=0.75$ 、(e)  $p=1$ 。 $p=1$ は通常の1次微分。

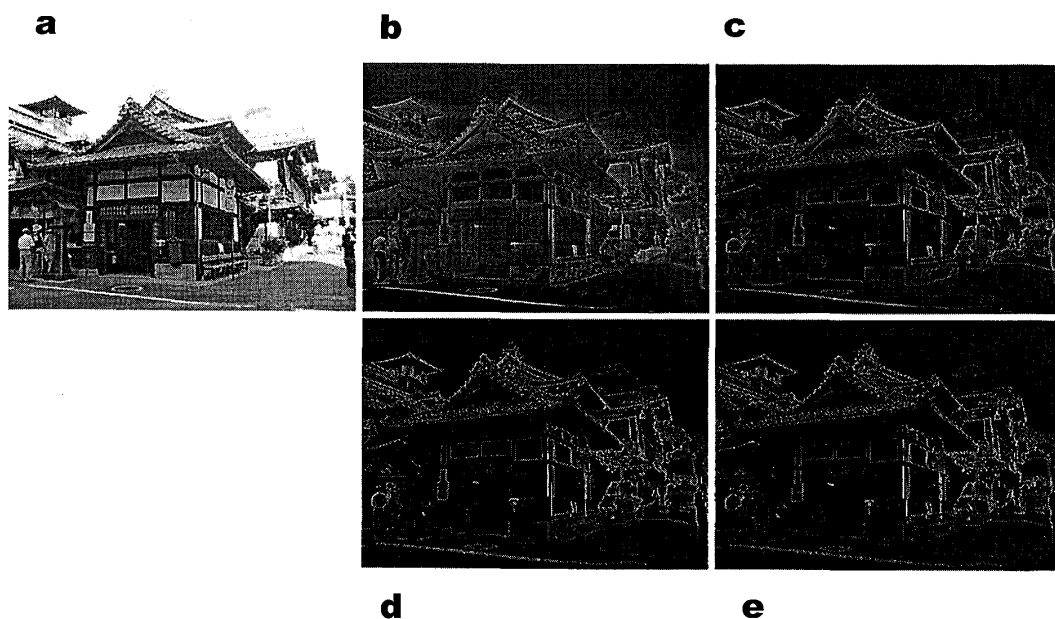


図10 一般画像（和風建造物）の非整数次微分（絶対値）。(a)  $p=1$ つまり原画像（画像サイズ768×1024），(b)  $p=0.25$ ，(c)  $p=0.5$ ，(d)  $p=0.75$ ，(e)  $p=1$ 。 $p=1$ は通常の1次微分。

が非整数次微分である。1次微分の結果をみると、よく知られているように、物体の輪郭を与える境界だけが強調されて得られる。一方、 $p=0.25$ の非整数次微分では、たとえば図9bの額や肩などの部分にみられるように、微分の効果が中間調のゆっくりとした強度変化として認められる。このような非整数次の微分効果は、図9，図10とも、 $p$ の値が増大し、1に近づくにつれて輪郭だけが強調される通常の1次微分に連続的に近づいていくように見える。しかし、この移行をよく観察すると、輪郭の鮮明さは $p=1$ よりむしろ $p=0.75$ の方がよく、少なくとも視覚的には輪郭がはっきりしている。

### 3.3 2値画像の微分

図11は「ELECTRONICS」という白地に黒の文字列からなる2値画像に非整数次微分を実行した結果である。この場合の $p=1$ （1次微分）の結果をよくみると、微分値が大きい輪郭部分にハレーション (halation)，つまり輪郭の輝度の高い部分に生じる不均一な輝度むら、あるいは放射状の輝度パターンが現れている。他方、 $p=0.75$ の非整数次微分の結果ではこのような強いハレーションは生じていない。このことは非整数次微分の注目すべき効果のひとつである。

最後に、図11の文字画像のように、白と黒の2値からなる画像に対する非整数次の微分を  $0 < p \leq 1$  の領域でより詳細に調べた。この結果が図12である。ここでは、原画像は512×512のサイズ内に描かれた方形図形（左列）で、中列が微分結果であるが、エッジの微分効果を拡大してみるために、方形部分の左上隅の31×31の部分を取り出して、おのおのの右列に示してある。

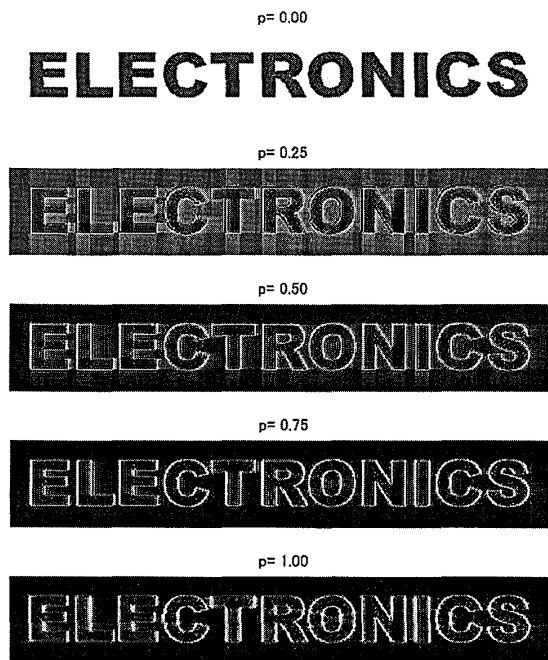


図11 2値の文字画像「ELECTRONICS」の非整数次微分（絶対値）。

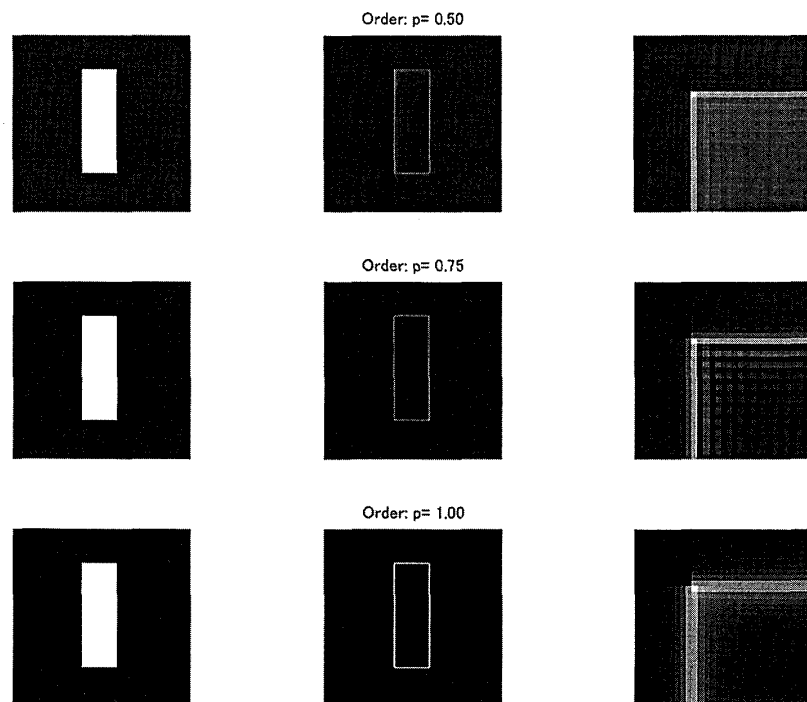


図12 基本的な白黒の2値画像である矩形画像の非整数次微分（絶対値）。左列が原画像信号，中列が次数が $p = 0.50, 0.75, 1.00$ の微分，右列は，中列の微分結果において，物体の左隅の部分を拡大表示したもの。

図12の中列の結果を比較すると、 $p=1$ の通常の1次微分において、エッジが明瞭にあらわれているように見えるが、隅の部分拡大した右列の結果をみると、 $p=1$ の結果よりもむしろ  $0 < p < 1$  の非整数次微分の結果の方が、シャープなエッジが得られていることが認められる。

エッジの鮮明さをもっと基本的な理解するために、2値の1次元信号を用いて非整数次の微分効果を調べた。この結果が図13である。この図の  $p=0.25$  あるいは  $p=0.5$  の結果にみられるように、微分値はステップの境界の左側で急速に立ち上がる一方、境界を越えたところでは立ち下がりはややかで長い尾を引いて減衰する。この特性は境界の前後で非対称であり、通常の1次微分ではみられない特性である。

一方、通常の1次微分である  $p=1$  の場合では、境界の前後の立ち上がりや立ち下がり、境界の周りで対称な振る舞いであり、非整数次の微分結果とは全く異なっている。ただし、この場合、微分値は理想的にはデルタ関数で記述される振る舞いであるが、境界の前後においてなだらかに変化している。これは、フーリエ変換を用いる計算誤差、おもに有限長のデータ処理に伴う誤差によるものと考えられる。このようにフーリエ変換を用いる画像処理では、信号長が有限であることによって、2値画像の立ち上がりは幾分ぼけるのが常であり、ここでの結果は、立ち上がりの部分だけを必要にするときには、 $p=1$  よりも低次の非整数次微分が有効に利用できることを示唆している。

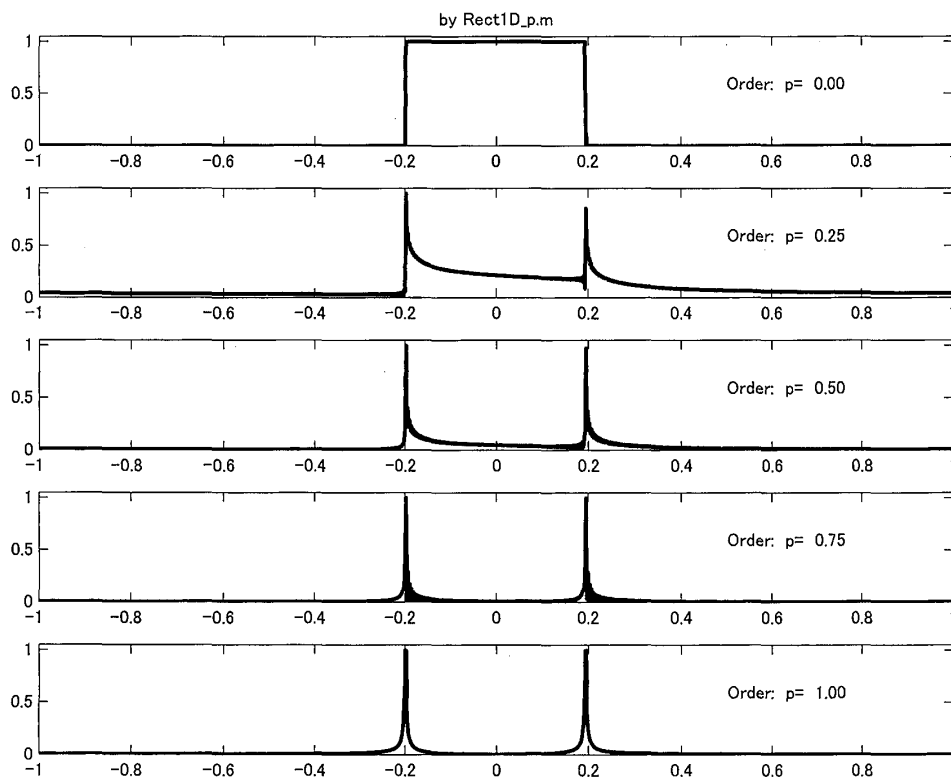


図13 2値信号（1次元方形波信号）とその低次の非整数次微分（絶対値）。最上段が原信号で、以下、次数が  $p=0.25$ ,  $p=0.5$ ,  $p=0.75$ ,  $p=1.0$  の微分。

## 4. おわりに

本稿では、最初に、非整数次微分をフーリエ積分によって記述し、そこで定義される非整数次の微分フィルタの特性、つまり式(3)あるいは式(4)の振る舞いを示した。その結果、微分次数 $p$ が $0 < p \leq 1$ の低次微分では微分次数が小さいほど高周波数成分が抑制され、高周波性の雑音が問題になる微分処理に適する特性を持つことを示した。また、非整数次微分フィルタは、一般に複素関数であり、その位相特性は周波数領域で非対称の特性を持つことを示した。この位相の特性は、整数次の微分とは異なって、空間周波数領域で非対称であり、たとえ原信号が対称関数でも微分結果が非対称になる結果を与える。

具体的には、画像信号の非整数次微分として、まず、中心対称性をもつ(2次元)ガウス分布画像を調べた。ここでは、非整数次微分の非対称性を調べるとともに、微分値が最大になる位置の変化を微分次数の関数として調べた。その結果、通常の1次微分とは異なって、非整数次微分の最大値は変曲点を与えず、次数が1に近づくにつれて変曲点の位置に近づくことを明らかにした。

つぎに、非整数次微分を人物や建物のような一般の画像に用いると、通常の1次微分と同様にエッジ、つまり領域の境界が強調されることを示した。しかし、その現れ方は当然のことながら微分次数に依存しており、エッジは次数が1の場合よりも非整数次の微分(たとえば、次数0.75)によって、少なくとも視覚的にはよい結果が得られることが知られた。

本研究は、北海学園大学ハイテクリサーチセンター事業の研究プロジェクト「視覚・画像・音声・言語情報処理の高度化と知的計測制御技術への応用」の一環として行った。

### 【参考文献】

- 1) A. McAndrew: "Introduction to digital image processing with MATLAB," Chpt. 9 (Thompson Course Technology, Boston, 2004).
- 2) R. C. Gonzalez, R. E. Woods and S. L. Eddins: "Digital image processing using MATLAB," Chpt. 10 (Pearson Education Ltd., London, 2004).
- 3) 谷田貝 豊彦: 「応用光学 光計測入門」 p.192-195 (丸善, 1988).
- 4) 高井 信勝: 「MATLAB入門」, 第12章 (工学社, 2000).
- 5) B. Mathieu, P. Melchior, A. Oustaloup and CH. Ceyral: Fractal differentiation for edge detection, Signal Processing, Vol. 83, 2421-2432 (2003).
- 6) 高安 秀樹: 「フラクタル」, p.149-152 (朝倉書店, 1988).