

タイトル	水素爆風圧を受けるRCパネルの振動解析
著者	世戸，憲治；野中，泰二郎
引用	北海学園大学工学部研究報告，34：49-62
発行日	2007-02-20

# 水素爆風圧を受ける RC パネルの振動解析

世戸 憲治\*

野中 泰二郎\*\*

## Vibration Analysis of RC Panel Subjected to Hydrogen-gas Explosion

Kenji SETO\* and Taijiro NONAKA\*\*

大林組によって行われた水素爆発実験をモデルとした RC パネルの振動解析を波動方程式の立場で考える。現著者達は、これまでもこの種の解析を行ってきたが、この論文では、実験データに基づき、RC パネルの基底部でひび割れが多数発生していることを考慮し、Young 率  $E$  を高さ方向で区分的に変化させた場合の解析を行う。

## 0. はじめに

近年、衝突・衝撃現象の動的解析が盛んに行われているが、これらはほとんどが、有限要素法を用いて解析されている。しかしながら、この解析方法には、細部にわたる解析が可能な一方、そこで起こっているメカニズムが隠されてしまうという欠点も持つ。

この論文では、波動方程式といういわばクラシカルな方法を用いて、衝撃解析を行う。モデルとして扱うのは、最近、大林組によって行われた水素爆発による RC パネルの振動である<sup>1)</sup>。著者達は、昨年、このパネルの振動を、Timoshenko 流<sup>2), 3)</sup>の曲げ変形および剪断変形を取り入れた波動方程式を用いて解析したが<sup>4)</sup>、そこでは、実際の実験データの比較までは行われていなかった。今回の論文は、解析結果と実験データを比較することが目的である。しかしながら、この実験は爆発現象による RC パネルの破壊が目的であり、波動方程式はあくまで弾性理論に基づくものなので、ストレートな比較には困難が伴うことも確かである。

これまでに解明されたことは、衝撃が時間的にデルタ関数で表わされるときは、剪断歪みが曲げ歪みとほぼ同じ位の大ききで発生するが、実際の爆発による衝撃のような場合は、剪断歪みはほとんど無視できる程度に小さくなってしまうこと。実験では、パネルにひび割れが発生し、特に、パネルの基底部では Young 率はかなりの程度落ちていると考えられること。また、振動に明らかな減衰効果が見られること等である。

今回の論文では、これらのことを踏まえて、

\* 北海学園大学工学部建築学科

\* Department of Architecture and Building Engineering, Faculty of Engineering, Hokkai-Gakuen University

\*\* 中部大学総合工学研究所

\*\* Institute of Science and Technology Research, Chubu University

- (1) 煩雑さを避けるため，変形は曲げ変形のみとし，
  - (2) 自重効果を取り入れること，
  - (3) 材料粘性効果を入れること，
  - (4) Young 率を場所によって変えること，
- の4点に着目した波動解析を行うことにした。

## 1. 波動方程式

### 方程式の導出

図1のように，垂直に立てられた高さ  $l$ ，厚さ  $h$  の RC 板が，横方向から衝撃波を受けたときの振動を解析する．衝撃によって板の単位面積あたりに作用する力積を  $I$  とし，時間的には，初め  $\delta$  関数で与えられるものとして解析するが，後で時間的に分布した場合に拡張する．板に発生する変位は，面に沿った水平方向には一様とし，変位変化は縦方向にのみ発生するものとする．したがって，この振動は1次元的なものであり，棒の振動と本質的に同じものとなる．

板について，Young 率，Poisson 比，質量密度をそれぞれ  $E$ ， $\mu$ ， $\rho$  とする．変数のとり方を図2に示す．横方向変位を，板に沿った高さ  $s$ ，時間  $t$  の関数として  $V(s, t)$  とし，またこの点での板の傾き角を  $\theta(s, t)$  とする．以下では，これら変数の微分を，例えば， $V$  の時間  $t$  微分を  $\partial V / \partial t$  と書くべきところを， $\partial_t V$  あるいは単に添え字で  $V_t$  と書くことにする．

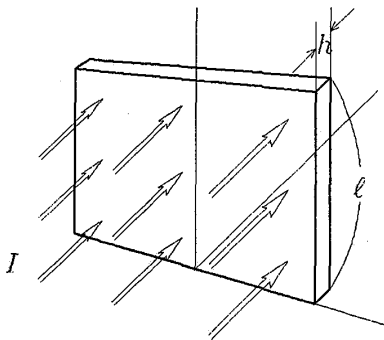


図1 実験のレイアウト

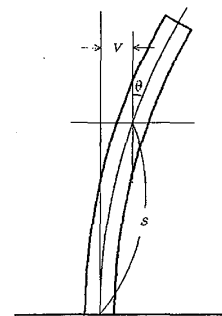


図2 変数のとり方

これら変位  $V$  と傾き角  $\theta$  との間には，

$$V(s, t) = \int_0^s \sin \theta(s', t) ds' \quad (1.1)$$

の関係が成立することに注意する．波動方程式は Lagrange 関数  $\mathcal{L}$  とその作用積分  $\mathcal{I}$

$$\mathcal{L} = \int_0^\ell (T - U_1 - U_2 - U_3) ds, \quad \mathcal{I} = \int \mathcal{L} dt \quad (1.2)$$

に基づいた変分原理によって導入する．ここに,  $T, U_1, U_2, U_3$  は, それぞれ, 横方向変位の運動エネルギー, 曲げによる歪みエネルギー, 重力による位置エネルギー, 荷重によるポテンシャルエネルギーで, パネルの単位面積あたりにつき, つぎのように定義される．

$$T = \frac{1}{2} \rho h V_t^2 = \frac{1}{2} \rho h \left[ \int_0^s (\sin \theta)_t ds' \right]^2, \quad (1.3a)$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)} \theta_s^2, \quad (1.3b)$$

$$U_2 = \rho g h \int_0^s \cos \theta ds', \quad (1.3c)$$

$$U_3 = -I(s) V \delta(t) = -I(s) \int_0^s \sin \theta ds' \delta(t). \quad (1.3d)$$

この作用積分  $\mathcal{I}$  を  $\theta$  で変分をとると,

$$-\left[ \int_s^\ell \rho h V_{tt}(s', t) ds' \right] \cos \theta + \left[ \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)} \theta_s \right]_s + \left[ \int_s^\ell \rho g h ds' \right] \sin \theta + \left[ \int_s^\ell I(s') ds' \right] \cos \theta \cdot \delta(t) = 0. \quad (1.4)$$

ここで, 傾き角  $\theta$  は小さいものとして, 線形近似  $\sin \theta = \theta, \cos \theta = 1$  と, (1.1) 式からでる  $V_s = \theta$  を用い, さらに,  $\rho, g, h$  が  $s$  依存性を持たないことを使うと,

$$-\rho h \int_s^\ell V_{tt}(s', t) ds' + \frac{h^3}{12(1 - \mu^2)} [E V_{ss}]_s + \rho g h (\ell - s) V_s + \int_s^\ell I(s') ds' \delta(t) = 0 \quad (1.5)$$

となる．この式を  $s$  で微分すると,

$$\rho h V_{tt} = -\frac{h^3}{12(1 - \mu^2)} [E V_{ss}]_{ss} - \rho g h [(\ell - s) V_s]_s + I \delta(t) \quad (1.6)$$

なる変位  $V$  に対する波動方程式を得る．

接続条件

ここまで, Young 率  $E$  は, 一般に高さ  $s$  の関数として扱ってきたが, これが連続的に変化するような場合は方程式の解法上きわめて困難なことになる．ここでは, Young 率  $E$  は, 階段関数的に変化するものとし, 高さ  $s$  を, 分割して,  $s_0 = 0, s_1, s_2, \dots, s_N, s_{N+1} = \ell$  とし, 各区間毎に  $E$  の値は異なるものとするが, 区間内では一定値をとるものとして,

$$E(s) = \sum_{i=0}^N E_i u_i(s) \quad (1.7)$$

とおく. ここに,  $u_i(s)$  は単位階段関数  $u(s)$  を用いて,

$$u_i(s) = u(s - s_i)u(s_{i+1} - s), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (1.8)$$

と定義する.

このとき, 接続条件として, 変位およびその微係数は連続として,

$$V(s_i + 0) = V(s_i - 0), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.9)$$

$$V_s(s_i + 0) = V_s(s_i - 0), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.10)$$

とおく. これは, 途中で切れたり, 折れ曲がったりしないことを意味する. 曲率  $V_{ss}$  は不連続でよいが, 曲げモーメントは連続として,

$$[EV_{ss}]_{s=s_i+0} = [EV_{ss}]_{s=s_i-0}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.11)$$

とする. また, 剪断力も連続量として,

$$\left\{ [EV_{ss}]_s \right\}_{s=s_i+0} = \left\{ [EV_{ss}]_s \right\}_{s=s_i-0}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.12)$$

とする.

#### 境界条件

境界条件は, 板の基底部  $s = 0$  は埋め込みとし,

$$V(0, t) = 0, \quad (1.13)$$

$$V_s(0, t) = 0, \quad (1.14)$$

上端  $s = l$  は自由になるので, 曲率および剪断力を共にゼロとして,

$$V_{ss}(l, t) = 0, \quad (1.15)$$

$$V_{sss}(l, t) = 0 \quad (1.16)$$

となる. この (1.16) 式は (1.5) 式で  $s = l$  としたものと一致している.

#### 長さの無次元化

ここで, パネルの高さ  $l$  を長さの単位として, 無次元長さ

$$x = s/l, \quad x_i = s_i/l \quad (1.17)$$

を導入する. また, 横方向変位  $V$  に対しては,  $V/l$  を改めて  $V$ , すなわち,

$$V/l \rightarrow V \quad (1.18)$$

と定義し直す.

この長さの無次元化で、方程式 (1.6) をつぎのように書き換える、

$$V_{tt} = -[FV_{xx}]_{xx} - \gamma[(1-x)V_x]_x + J\delta(t), \quad (1.19)$$

ここに、 $F$ 、 $\gamma$  は時間の逆 2 乗次元を持つ量で、

$$F = \frac{h^2 E}{12(1-\mu^2)\rho\ell^4}, \quad \gamma = \frac{g}{\ell}, \quad (1.20)$$

また、 $J$  は時間の逆次元を持つ量で、

$$J = \frac{I}{\rho h \ell} \quad (1.21)$$

と定義した。一般には、この力積  $I$ 、したがって、 $J$  も、高さの関数であるが、実際の実験データでは、高さ依存性はほとんどなかった。以下の節ではこの  $J$  を定数として扱う。

時間については無次元化しないで、 $t$  をそのまま使うことにする。

## 2. 固有値と固有関数

この節では、固有値・固有関数を求めるため、方程式 (1.19) における衝撃項  $J\delta(t)$  はないものとして話を進める。ここで、変位  $V(x, t)$  において、時間的に単一振動数  $\omega$  を持つものとして、空間・時間を変数分離し、

$$V(x, t) = \Delta(x)e^{i\omega t} \quad (2.1)$$

とおく。 $\Delta$  は無次元量である。 $J = 0$  とした方程式 (1.19) より、 $\Delta$  が満たす方程式は、

$$\omega^2 \Delta = [F\Delta_{xx}]_{xx} + \gamma[(1-x)\Delta_x]_x \quad (2.2)$$

となる。この方程式を解くためには、 $F$  の値が各区間で異なるので、区間ごとに解かなければならない。また、この方程式は特殊関数では解けない形をしているので変数  $x$  に関する冪級数展開の形、

$$\Delta(x) = \sum_{i=0}^N \left[ \sum_{n=0}^{\infty} C_{i,n}(x-x_i)^n \right] u_i(x) \quad (2.3)$$

で解くことにする。これを斉次方程式 (2.2) に代入すると、係数  $C_{i,n}$  を決定するための回帰方程式を得る。すなわち、 $x_i < x < x_{i+1}$  に対し、

$$(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)F_i C_{i,n+4} + \gamma(n+1)[(1-x_i)(n+2)C_{i,n+2} - (n+1)C_{i,n+1}] - \omega^2 C_{i,n} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

を得る. この方程式から, 初めの4個  $C_{i,0}, C_{i,1}, C_{i,2}, C_{i,3}$  を初期値として, すべての  $C_{i,n}$  が決定される. これら, 独立な初期値のとり方は4通りあり,

$$(C_{i,0}, C_{i,1}, C_{i,2}, C_{i,3}) = \begin{cases} (1, 0, 0, 0), \\ (0, 1, 0, 0), \\ (0, 0, 1, 0), \\ (0, 0, 0, 1) \end{cases} \quad (2.5)$$

ととることとする. この初期値の順に従って解いた区間  $i$  での級数  $\sum_{n=0}^{\infty} C_{i,n}(x-x_i)^n$  をそれぞれ,  $P_i^{(k)}(x)$  とする.  $k=0, 1, 2, 3$  は初期値のとり方による系列番号である. 一般の  $\Delta(x)$  はこの線形結合で表わされ,

$$\Delta(x) = \sum_{i=0}^N \left[ \sum_{k=0}^3 A_i^{(k)} P_i^{(k)}(x) \right] u_i(x) \quad (2.6)$$

となる. ここで,  $P_i^{(k)}(x)$  の初めの2項の具体的形を書くと

$$\begin{aligned} P_i^{(0)}(x) &= 1 + C_{i,4}(x-x_i)^4 + \dots, \\ P_i^{(1)}(x) &= (x-x_i) + C_{i,4}(x-x_i)^4 + \dots, \\ P_i^{(2)}(x) &= (x-x_i)^2 + C_{i,4}(x-x_i)^4 + \dots, \\ P_i^{(3)}(x) &= (x-x_i)^3 + C_{i,5}(x-x_i)^5 + \dots. \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる. つぎに,  $x=x_i$  におけるこの解の接続条件を考える. すなわち, (2.6) 式の解に条件式 (1.9) から (1.12) までを適用する. このとき,  $P_i^{(k)}(x)$  とその微分の  $x=x_i$  における値は (2.7) 式で見積もることができ,

$$\begin{aligned} A_i^{(0)} &= \sum_{k=0}^3 A_{i-1}^{(k)} P_{i-1}^{(k)}(x_i), \\ A_i^{(1)} &= \sum_{k=0}^3 A_{i-1}^{(k)} P_{i-1,x}^{(k)}(x_i), \\ 2F_i A_i^{(2)} &= F_{i-1} \sum_{k=0}^3 A_{i-1}^{(k)} P_{i-1,xx}^{(k)}(x_i), \\ 6F_i A_i^{(3)} &= F_{i-1} \sum_{k=0}^3 A_{i-1}^{(k)} P_{i-1,xxx}^{(k)}(x_i), \quad i=1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.8)$$

となる. あるいは, 縦ベクトル

$$\mathbf{A}_i = {}^t(A_i^{(0)}, A_i^{(1)}, A_i^{(2)}, A_i^{(3)}), \quad \text{上付き } t \text{ は転置を表わす.} \quad (2.9)$$

なるベクトルを導入して, 行列形式で表わすと,

$$\mathbf{A}_i = L_{i-1} \mathbf{A}_{i-1}, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (2.10)$$

ここに、 $4 \times 4$  行列  $L_{i-1}$  はその成分を

$$\begin{aligned} (L_{i-1})_{0,k} &= P_{i-1}^{(k)}(x_i), & (L_{i-1})_{1,k} &= P_{i-1,x}^{(k)}(x_i), \\ (L_{i-1})_{2,k} &= \frac{F_{i-1}}{2F_i} P_{i-1,xx}^{(k)}(x_i), & (L_{i-1})_{3,k} &= \frac{F_{i-1}}{6F_i} P_{i-1,xxx}^{(k)}(x_i), \quad k = 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.11)$$

と定義した. この (2.10) 式を回帰式として,  $A_N$  は  $A_0$  から

$$A_N = L_{N-1} L_{N-2} \cdots L_0 A_0 \quad (2.12)$$

として生成される.

つぎに, 境界条件を考える. (2.6) 式の  $\Delta(x)$  にパネル下端の条件式 (1.13) (1.14) を適用する. このとき,  $P_0^{(k)}(x)$  とその微分の  $x=0$  における値は同様に (2.7) で見積もることができ,

$$\Delta(0) = \sum_{k=0}^3 A_0^{(k)} P_0^{(k)}(0) = A_0^{(0)} = 0, \quad (2.13)$$

$$\Delta_x(0) = \sum_{k=0}^3 A_0^{(k)} P_{0,x}^{(k)}(0) = A_0^{(1)} = 0. \quad (2.14)$$

また, パネル上端の条件式 (1.15) (1.16) を適用すると,

$$\Delta_{xx}(1) = \sum_{k=0}^3 A_N^{(k)} P_{N,xx}^{(k)}(1) = 0, \quad (2.15)$$

$$\Delta_{xxx}(1) = \sum_{k=0}^3 A_N^{(k)} P_{N,xxx}^{(k)}(1) = 0. \quad (2.16)$$

この (2.15) (2.16) を行列形式で表わすため,  $2 \times 4$  行列  $L_N$  の成分を

$$(L_N)_{0,k} = P_{N,xx}^{(k)}(1), \quad (L_N)_{1,k} = P_{N,xxx}^{(k)}(1), \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (2.17)$$

と定義すると, これらの式はまとめて,

$$L_N A_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

と表わせる. これに (2.12) の  $A_N$  を適用し,

$$L A_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

となる. ここに,  $2 \times 4$  行列  $L$  を

$$L = L_N L_{N-1} \cdots L_0 \quad (2.20)$$

と定義した. しかし, (2.13) (2.14) からわかるように,  $A_0^{(0)} = A_0^{(1)} = 0$  なので, この  $2 \times 4$  行列  $L$  のうち第 0 列, 第 1 列はこの (2.19) 式には寄与していない. したがって, 行列  $L$  から第 0 列,



第1列を取り除いた残りの  $2 \times 2$  行列を  $L'$  と書くことにして,

$$L' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

と記すことにすると,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{(2)} \\ A_0^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

となる.  $A_0^{(0)} = A_0^{(1)} = 0$  であったので,  $A_0^{(2)}, A_0^{(3)}$  のうち少なくとも一方はゼロではない. そのためには, (2.22) の係数行列式の値  $(ad - bc)$  がゼロでなければならない. これから, 固有値  $\omega$  が決定するが, ここでは, あとの都合のためつぎのように処理する. まず, (2.22) 式の1行目から,  $A_0^{(2)}, A_0^{(3)}$  の比だけを決めて,

$$A_0^{(2)} = -b, \quad A_0^{(3)} = a \quad (2.23)$$

としておく. 全体にかかる係数はあとで決める. ここまでで, (2.13) (2.14) (2.15) の3個の境界条件

$$\Delta(0) = 0, \quad \Delta_x(0) = 0, \quad \Delta_{xx}(1) = 0 \quad (2.24)$$

を用いた. この結果である (2.23) を (2.22) 式の2行目, すなわち, 最後の境界条件である (2.16)

$$\Delta_{xxx}(1) = 0 \quad (2.25)$$

に代入したときに, 固有値  $\omega$  が決まるということにしておく. この意味で, (2.25) 式は固有値方程式である. ここで決まった固有値  $\omega$  を小さい方から  $\omega_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  とする. また, このとき, (2.6) で決まる  $\Delta(x)$  を  $\Delta(x, \omega_n)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  と記し, 固有関数とする.

### 3. 固有関数の直交性

ここでは, 一般に固有値とは限らない2つの角振動数を  $\omega, \omega'$  とし, 以下, 数式簡略化のため

$$\Delta = \Delta(x, \omega), \quad \Delta' = \Delta(x, \omega') \quad (3.1)$$

のように記す. また,

$$K(s) = [F\Delta_{xx}]_x + \gamma(1-x)\Delta_x \quad (3.2)$$

と定義し, (2.2) 式を

$$\omega^2 \Delta = K_x \quad (3.3)$$

と書く。\$K\$ についても \$\Delta\$ と同じように、

$$K = K(x, \omega), \quad K' = K(x, \omega') \quad (3.4)$$

と記す。

Green 関数を求めるときの類推から、容易につきの恒等式

$$\partial_x [\omega^2 K K'_x - \omega'^2 K'_x K] = (\omega^2 - \omega'^2) K_x K'_x + \omega^2 K K'_{xx} - \omega'^2 K'_x K_{xx} \quad (3.5)$$

が証明されるが、これはさらに、(3.2) (3.3) を用いると、

$$\partial_x [K \Delta' - K' \Delta] = (\omega^2 - \omega'^2) \Delta \Delta' + \partial_x [F \Delta_{xxx} \Delta'_x - F \Delta'_{xxx} \Delta_x] \quad (3.6)$$

となる。ここで、関数 \$\Delta, \Delta'\$ が3個の境界条件 (2.24) を満たすものとして、この式を \$x\$ について0から1まで積分すると、\$K\$ の定義 (3.2) を用いて、

$$\int_0^1 \Delta \Delta' dx = \frac{F_N [\Delta_{xxx}(1) \Delta'(1) - \Delta'_{xxx}(1) \Delta(1)]}{\omega^2 - \omega'^2} \quad (3.7)$$

となる。ここで、さらに、\$\omega, \omega'\$ が最後の境界条件 (2.25) を満たす相異なる固有値であるときは、この式の右辺がゼロとなり、固有関数の直交性がでる。\$\omega, \omega'\$ が同じ固有値 \$\omega\_n\$ になるときは、先に、\$\omega' = \omega\_n\$ とおき、その後、\$\omega \to \omega\_n\$ の極限をとる。最終的な直交関係式は

$$\int_0^1 \Delta(x, \omega_n) \Delta(x, \omega_{n'}) dx = \frac{1}{L_n} \delta_{n, n'}, \quad (3.8)$$

ここに、

$$L_n = \frac{2\omega_n}{F_N \Delta(1, \omega_n) [\partial_\omega \Delta_{xxx}(1, \omega)]_{\omega=\omega_n}} \quad (3.9)$$

と定義される無次元量である。したがって、関数系 \$\sqrt{L\_n} \Delta(x, \omega\_n)\$, \$n = 1, 2, 3, \dots\$ は正規直交系をなす。この直交式に対応する完備性の式は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n \Delta(x, \omega_n) \Delta(x', \omega_n) = \delta(x - x') \quad (3.10)$$

となる。これは、Parseval の恒等式に対応する。

この完備性の式を \$x'\$ で0から1まで積分すると、(3.3) 式を用いて左辺の積分ができ、恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n \Delta(x, \omega_n) = 1 \quad (3.11)$$

が証明される。ここに、無次元定数 \$H\_n\$ を

$$H_n = -\frac{F_0 L_n \Delta_{xxx}(0, \omega_n)}{\omega_n^2} \quad (3.12)$$

と定義した。この式 (3.11) は、定数1を固有関数で展開した式とみなせる。また、この式は数値的に固有値、固有関数を求めたときに、その精度を確かめるのに役立つ。最後に、(2.6) (2.7) (2.23) 式から、\$\Delta\_{xxx}(0, \omega\_n) = 6A\_0^{(3)} = 6a\$ となることを注意しておく。

#### 4. 衝撃荷重が存在するときの初期値問題

ここまでで、方程式 (1.19) を解くための準備ができた。変位  $V(x, t)$  を固有関数で展開し、

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta(x, \omega_n) T_n(t) \quad (4.1)$$

とする。ここに、 $T_n$  は時間依存部分である。これを (1.19) に代入すると、固有関数が満たす方程式 (2.2) を用いて、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta(x, \omega_n) (\partial_t^2 + \omega_n^2) T_n(t) = J\delta(t). \quad (4.2)$$

右辺に、(3.11) 式を適用し固有関数で展開してから、両辺に、 $\Delta(x, \omega_{n'})$  をかけ、固有関数の直交性 (3.8) を用いると、単一モードの方程式に分解され

$$(\partial_t^2 + \omega_n^2) T_n(t) = H_n J\delta(t) \quad (4.3)$$

を得る。この方程式の初期条件を満たす解は、容易に求められ、

$$T_n(t) = H_n \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} J u(t), \quad (4.4)$$

ここに、 $u(t)$  は単位階段関数である。したがって、方程式 (1.19) の解は、

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \Delta(x, \omega_n) \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} J u(t) \quad (4.5)$$

と固有関数で展開した形で求められる。

##### 衝撃荷重が時間的に分布した場合への適用

これまで、板に加えられる衝撃は時間的に  $\delta$  関数として扱ってきた。ここでは、単位面積あたりに作用する力  $I\delta(t)$  を時間的に分布した圧力  $P(t)$  に拡張しよう。ただし、(1.21) で定義される  $J$  と同じように、

$$Q(t) = \frac{P(t)}{\rho h l} \quad (4.6)$$

と定義しておく。 $Q(t)$  は時間の逆 2 乗の次元を持つ。そこで、

$$J\delta(t) \Rightarrow Q(t) = \int_0^{\infty} Q(t') \delta(t - t') dt' \quad (4.7)$$

と拡張する。これは、これまでの  $\delta$  関数における時間  $t$  を  $t - t'$  にずらし、重み  $Q(t')$  を付けて重ね合わせることを意味する。もちろん、これはここでの議論が線形だからできることである。このときの解は、(4.5) から、容易に、

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \Delta(x, \omega_n) \int_0^t \frac{\sin[\omega_n(t - t')]}{\omega_n} Q(t') dt' \quad (4.8)$$

と Duhamel 積分の形で表わされる。

### 材料抵抗

現実には、材料抵抗の存在を避けることはできない。ここでは、Voigt モデルに従って、その効果を考慮してみよう。このモデルは、歪み速度に比例する抵抗力を持たせるもので、具体的には、Young 率  $E$  を

$$E \rightarrow E(1 + 2\eta\partial_t) \quad (4.9)$$

と時間微分を含む演算子に拡張するものである。ここに、 $\eta$  は材料粘性係数を  $2E$  で割ったものである。このとき方程式は、(1.6) からわかるように、右辺 1 項目のところだけに演算子  $(1 + 2\eta\partial_t)$  がかかる。無次元化した方程式でいうと、(1.19) 式が

$$V_{tt} = -[F(1 + 2\eta\partial_t)V_{xx}]_{xx} - \gamma[(1-x)V_x]_x + J\delta(t) \quad (4.10)$$

に置き換えられる。ここで、(4.1) の変数分離をおこない、(2.2) 式を利用すると、(4.2) に替わって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta(x, \omega_n) [\partial_t^2 + (1 + 2\eta\partial_t)\omega_n^2] T_n(t) = 2\eta\gamma \sum_{n=1}^{\infty} [(1-x)\Delta_x(x, \omega_n)]_x \partial_t T_n + J\delta(t) \quad (4.11)$$

となる。しかし、このとき  $\Delta$  と  $[(1-x)\Delta_x]_x$  との間に直交性はないと考えられるので、これを単一モードの方程式に分解することは不可能であろう。ここでは、重力効果を表わすパラメータ  $\gamma$  について、0 次の近似をとることにして、この式右辺の 1 項目を無視すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta(x, \omega_n) [\partial_t^2 + (1 + 2\eta\partial_t)\omega_n^2] T_n(t) = J\delta(t) \quad (4.12)$$

と置くことができる。あとは、(4.2) から (4.4) にいたる同じ処方箋で、

$$T_n(t) = H_n e^{-\eta\omega_n^2 t} \frac{\sin(\tilde{\omega}_n t)}{\tilde{\omega}_n} J u(t) \quad (4.13)$$

を得る。ここに、 $\tilde{\omega}$  は

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n \sqrt{1 - (\eta\omega_n)^2} \quad (4.14)$$

と定義される。この式は一般に減衰振動を表わす。もし、 $\eta\omega_n > 1$  のとき、 $\tilde{\omega}_n$  は虚数となり、三角関数は双曲線関数に替わるが、指数関数部分の減衰がそれより大きく、過減衰状態となる。

## 5. 実験データとの比較

大林組によって行われた水素ガス爆発実験は、体積  $37\text{m}^3$ 、濃度 30% の水素混合気体を使って爆轟を起こさせ、爆発中心から 5m の距離に RC 壁を設置して行われた。この実験では、RC 壁の高さ、厚さを色々変えた実験がおこなわれたが、ここでは、このうちの高さ 2 m、厚さ 10 cm の RC 壁を用いて行われた実験について、ここでの解析結果との比較を行う。このとき、RC 壁

が受けた圧力の時系列データを図3に示す。最大圧力はおよそ 650 kPa であり、RC 壁が受けた最大力積はおよそ 1 kPa·sec である。

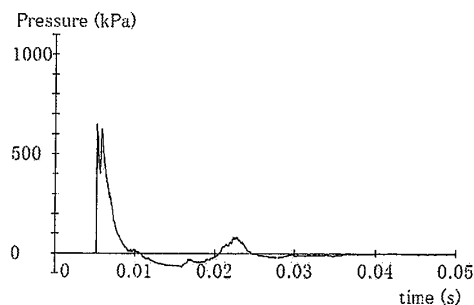


図3 圧力時系列データ

図4と図5に、それぞれ、初めの0.15秒間、および1.0秒間の変位データを示す。これらの図中では、壁上端および高さの中間点での変位データを、それぞれ実線と点線で示す。

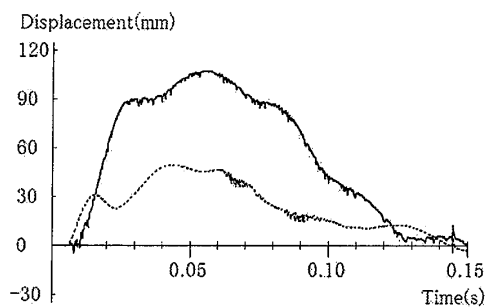


図4 変位データ (0.15 秒間)

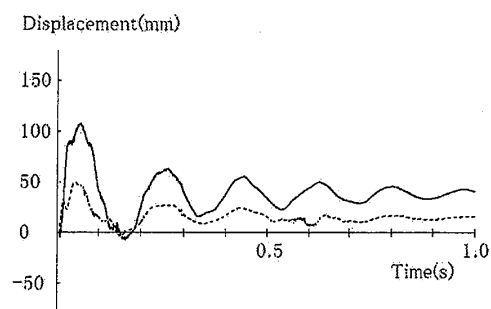


図5 変位データ (1.0 秒間)

これらのグラフから、

- (1) 振動周期が、およそ 0.17 sec と非常に大きく、上端での最大変位は、11 cm 程度である。
- (2) 振動に明らかな減衰がみられること。
- (3) 角度にして、1.15 度ほど傾いたところを中心にして振動していること。

がわかる。

ここでは、前節までの計算方式に従って、コンピュータによるプログラムを組み、この実験結果がどの程度、再現できるかを調べてみた。まず、正当な方法で見積もった、RC 壁の各種データは、

$$E = 22,400\text{MPa}, \quad \mu = 0.2, \quad \rho = 2,463 \text{ kg/m}^3$$

である。この数値を用い、ここでの解析結果をそのまま当てはめると、基本振動周期はおよそ 0.065 sec となが、実験値はこれよりおよそ 2.6 倍も大きい。もっとも、この実験では RC 壁にひび割れが発生し、特に、壁の基底部分にはたくさんのひび割れが発生している。この実験はもともと、どの程度の爆発力で RC 壁が壊れるかを目的にした実験であったため、そのような結果になることは当然であった。しかし、ここでの解析はあくまで弾性理論の範囲内での解析であり、このような実験結果と比較するには初めから無理がある。

そこで、少し見方を変えて、どのような仮定をすると、ここでの弾性理論と実験結果とが等価な結果をだすことができるかという観点から見てみよう。まず、Young 率は壁の基底部分ではかなり小さくなっているはず、また、鉄筋より外側のいわゆる被り部分は、ひび割れのため、質量には寄与しているが、曲げモーメントには寄与しないという仮定を設けよう。これで振動周期を大きくすることができるが、振動周期を大きくすることで、今度は振幅が、大きくなりすぎるという欠陥がある。ここでは、(1.7) 式に現われる Young 率を  $s_1 = 0.2$  m より下では、 $E_0 = 8,000$  MPa、また、上では、 $E_1 = 15,000$  MPa として解析したものを図 6 に示す。全体の形は実験結果による図 4 とよく似ている。この曲線の凸凹は、主として第 2 モードの振動が現われているためである。振幅そのものは実験結果より大きめにでていることに注意する。

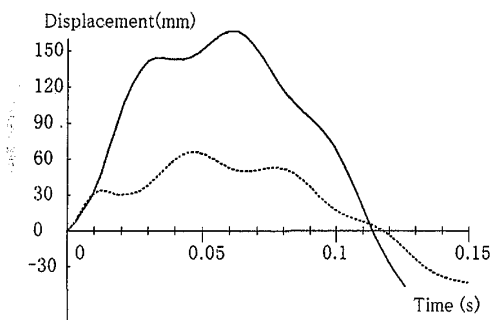


図 6 理論による変位 (0.15 秒間)

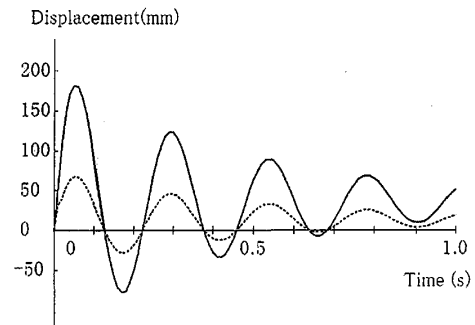


図 7 理論による変位 (1.0 秒間)

つぎの図 7 は時間が 1sec までの変位を描いたもので、実験データの図 5 に対応するものである。ここでは、振動の減衰を表わすため、(4.9) 式に表れる粘性係数を  $\eta = 0.003$  sec とした。また、実験データでは、衝撃波の風下の方に少し傾いたところを中心にして振動しているが、これは、弾性限界を超えて塑性変形が残ったためと考えられる。ここでの解析ではこのような塑性変形は考慮されていないので、これは出しようがない。そのためここでは、半実験的な方法を採用する。すなわち、このような塑性変形は初めの一振りでは起こるとし、そこでの平均振幅の 40% を残留振幅として、その後の振幅に加える。その結果、形そのものは図 5 に示す実験結果とよく似た形を再現できるものとなっている。

## 6. おわりに

実験データにおける振動周期は、素直な弾性理論で予想される値よりはるかに大きなものであった。そのため、この論文では、この値をいかにして大きくすることができるかということを考えてきた。自重効果や材料粘性効果を取り入れたのもそのためであった。しかし、これらの効果は、数パーセント程度、振動周期を大きくするにすぎないこともわかった。重力効果が効いてくるのは、現実にはありえないが重力加速度を大きくした場合、あるいは質量密度を極端に大きくした場合、パネルの厚さを極端に薄くした場合、Young 率を極端に小さくした場合などで、このときは、固有値  $\omega_n$  が虚数で求まるということが起こり、(4.4) 式の時間項  $T_n(t)$  が、

$$T_n(t) = H_n \frac{\sinh(|\omega_n|t)}{|\omega_n|} J u(t) \quad (6.1)$$

と三角関数から双曲線関数に変わる。すなわち、時間と共に変位はいくらでも増大することになり、パネルの倒壊が起こる。これはいわば、自重効果による動的座屈現象にあたる。実際、大林組の実験ではパネルが倒壊した例はたくさんある。ここで扱った理論は線形理論なので、本来ならば倒壊という大変形まで扱うことはできないはずである。しかし、倒壊するかしないかの判断基準を論じることは、この線形理論の範囲でもできるであろう。このような研究については、今後に期待したい。

### 参考文献

- 1) 米澤健次, 諏訪好英, 小野佳之, 長沼一洋, 井元勝慶, 久保啓治 「水素爆風圧を受ける RC 壁応答性状に関する実験的研究」大林組技術研究所報 No.69, 2005
- 2) Timoshenko, S., Young, D.H. (1955), *Vibration Problems in Engineering, Third Edition*, D. Van Nostrand Company, Inc., pp.324-331.
- 3) Graff, K. F. (1991), *Wave Motion in Elastic Solids*, Dover Publications, Inc., N.Y., pp.180-187.
- 4) Seto, K., Nonaka, T., (2005), "Closed-Form Solution of Elastic Panel under Impulsive Loading", *International Symposium on Structures under Impulsive Loading, Transient Phenomena due to Impact and Blast Loading (IB'05)*, Nagoya JAPAN.