HOKUGA 北海学園学術情報リポジトリ

学校法人北海学園
北 海 学 園 大 学
北 海 商 科 大 学

タイトル	比例関係と平均 : ジニ『平均論』(ミラノ，1958年)序章を中心に
著者	木村，和範
引用	季刊北海学園大学経済論集，57(1)：155-168
発行日	2009-06-25

Hokkai-Gakuen Organization of Knowledge Ubiquitous through Gaining Archives.

《研究ノート》

比例関係と平均
── ジニ『平均論』（ミラノ，1958年）序章を中心に ──

木　村　和　範

はじめに

イタリアの統計学界では1950年代にコッラド・ジニを中心とする「イタリア学派」が形成された。1958年刊行のジニ『平均論』[1)]はその理論的到達点の１つを示している。この著書のなかで，ジニは平均を定義するとき，基本的にはコーシーの定義を踏襲した。コーシーは，系列をなす項の最も小さい値と最も大きい値との間にある数値をもって平均と定義した。これが採用されたのは，この定義にたいする軽微な補強によって，ジニの平均（「解析的平均」と「非解析的平均（位置上の平均）」）に普遍的に妥当する定義が得られるからである。それだけでなく，そのような定義は平均概念の成立史と整合するからでもある。

平均の源をたどれば，古代ギリシアの数学，とりわけピュタゴラス学派の理論にいたる，とジニは考えた。そこでは，大小の順に並べた３数 a，b，c（$a>b>c$）が組み合わせられて，たとえば，

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{a}$$

という比例式が構成され，その３数の中項 b がもとめられている。ピュタゴラス学派にあってはこの中項 b が「平均」として認識されていたかどうかについて，ジニは否定的である。しかし，上式を変形すれば，$a-b=b-c$ となり，ここから $b=\frac{a+c}{2}$ が導出されるので，３数の中項 b は今日のいわゆる相加平均に該当する。このために，ジニは，平均にかんする数学的研究の端緒をピュタゴラス学派であると措定し，その『平均論』の序章ではピュタゴラス学派の業績を考察し，さらに，その理論的拡充を試みている。

平均概念の起源を検討することの意義は，この概念が統計学のなかで枢要な位置を占めていることを想起すれば，多言を要さない。そこで，本稿では，ピュタゴラス学派の比例理論の現代化を試みたジニ『平均論』の序章にもとづいて，平均概念の淵源を探る。

1）Gini, Corrado, *Le Medie*, Milano 1958［Gini (1958)］. 以下，式番号を除き，本文中の（　）内数字はこの著書のページを指す。

1．古典的比例とその拡張

(1)　古典的比例

「線分の『黄金分割』(*sezione aurea* del segmento)」── 中末比（media ed estrema ragione）とも言う ── はアレクサンドリアのユークリッド（紀元前 4 世紀）によって初めて研究された(5)。今日の表記法によれば，長さを（$a+b$）とする線分（ただし，$a<b$）において，次の等式

$$a:b=b:(a+b) \tag{1}$$

が成立するように，その線分が分割されているとき，それを黄金分割と言う。これを明証的に表現する目的で(1)式を，

$$b^2=a(a+b) \tag{2}$$

と変形する。(2)式を b について解けば，2 つの実数解として

$$b=\frac{a\pm a\sqrt{5}}{2}$$
$$=\frac{a(1\pm\sqrt{5})}{2}$$

を得る。しかし，題意より $0<a<b$ であり，これを満たす b は

$$b=\frac{a+a\sqrt{5}}{2} \tag{3}$$

である。$a=1$ のとき，(3)式は次式をあたえる。

$$b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$=1.618033989\cdots$$

したがって，長さが 2.618033989…（＝1＋1.618033989…）の線分を1：1.618033989…という比で分割するとき，その線分は黄金分割されていると言う。

この黄金分割の研究に先んじて比や比例関係の研究を進めたのがピュタゴラス（前 6 世紀）とその理論的継承者の集団（ピュタゴラス学派）である。この学派は前 5 世紀から前 4 世紀にかけて隆盛を極め，さらに前 1 世紀には新ピュタゴラス学派が形成されて理論的伝統が復活したと言われている。万物は数であると考えたピュタゴラスとその学派の研究分野は多岐に渡るが，そのなかでもジニが注目したのは，比例（proporzione）[2] にかんする研究である。

ピュタゴラスは音楽にも造詣が深く[3]，そのため和音（accordi musicali）が研究され，それが比例の研究に結びついたとジニは指摘している(1)。そのためであろうか，

2）proporzione は「比例関係」や「比例式」という訳語が適切な場合もある。

3）「音楽こそが，ピュタゴラス学派の研究の『心髄』（magna pars）であったと言われている」[Gini（1958：1）]（コロンの後の数字は引用頁，以下同じ）。ピュタゴラスが音楽を研究対象にしたことについては，①Szabó, Árpád, *Anfänge der greichischen Mathematik*, Budapest 1969（中村幸四郎，中村清，村田全訳『ギリシャ数学の始原』玉川大学出版部，1978 年，p.13 以下）；②左近司祥子『謎の哲学者　ピュタゴラス』講談社，2003 年，p.75，p.229 を参照。

また，ピュタゴラスについては①Giamblico, *La Vita Pitagorica*, Bur Classici Greci e Latini, Milano 1991（イアンブリコス（佐藤義尚訳）『ピュタゴラス伝』（叢書アレクサンドリア図書館Ⅳ），同文社　2000 年）；②Centrone, Bruno, *Introduzione ai Pitagorarici*, Laterza 1996（チェントローネ（佐藤　憲訳）『ピュタゴラス伝　その生と哲学』岩波書店　2000 年）；③Riedweg, Christoph, *Pythagoras: Leben, Lehre, Nachwirkung. Eine Einführung*, München 2002（英語版：Riedweg, Christoph, *Pythagoras: His Life, Teaching, and Inference*, translated by Steven Rendall, Ithaca and London 2005）を参照。なお，Gini（1958：1）で引用されている①の文献は，Giamblico di Calcide, *De vita pitagorica liber*, Pietroburgo 1884 である。

$$a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b \tag{4}$$

は「音楽的比例（proporzione musicale）」と呼ばれた(5)。ピュタゴラス学派の一人，ゲラサ（パレスチナ）のニコマコス（Nicomaco di Gerasa）[4]（西暦1～2世紀）はこれを「完全比例（proporzione completa）」と名づけた(5)。

(4)式が恒等式に帰着することは，内項の積が外項の積に等しいことを想起すれば，明らかである。ここでは，2つの項（a と b）にかんする「完全比例」が，①一方の項 a と2項の相加平均 $\frac{a+b}{2}$ の比と②同じ2項の調和平均 $\frac{2ab}{a+b}$ と他方の項 b の比という2つの比の間の関係として定義されることを指摘するにとどめる。

ゲラサのニコマコスはその著書『算術入門』[5]のなかで，大小の順に並んだ3数にかんする比例を「連続的比例（proporzioni continue）」[6]と名づけた。とくに，次の3つの比例は「古典的比例（proporzione classiche）」と呼ばれている(2)。

古典的比例		
	算術的比例	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{a}$
	幾何学的比例	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b}$
	調和的比例	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$

ジニは，その理由を明確にはしていないが，ピュタゴラスの時代に，第3の比例（調和的比例（proporzione armonica））には「小反対的比例（proporzione subcontraria）」という名称が付けられていたと述べている。その後，subcontrarioの意味が変わり，メタポントのイッパソス（Ippaso da Metaponto）（前5世紀）およびタラントのアルキュタス（Archita da Taranto）（前5～4世紀）によってproporzione subcontrariaがproporzione armonicaと言い換えられ，今日にいたっている(2)。

さらに，3数についての比例の研究が進んだ。上記の「古典的比例」の他に，$\frac{b-c}{a-b}=\frac{a}{c}$ または $\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{a}$ で表現される第4の比例が追加された。この第4の比例は「反調和的比例（proporzione antiarmonica）」と命名された。

すでに指摘したようにsubcontrarioの意味が変化した。それに伴って「小反対的比例（proporzione subcontraria）」は，第4の比例を指す言葉として用いられるようになった。こうして，この比例は「反調和的比例」と「小反対的比例」という2つの名称をもつようになった。このことは，ゲラサのニコマコス，スミュルナのテオン（Teone da Smirne）（西暦1～2世紀），アレキサンドリアのパッポス（Pappo di Alessandoria）（西暦3世紀）の著作に見られると言われている。これにかんしてジニは次のように述べている。「小反対的［比例］という表現は漠としており，厳密に表現すれば，『調和的［比例］にたいする小反対的［比例］』（subcontraria all’armonica）である」(3)。「反調和的比例」を示す数式の左辺と右辺のいずれか一方が，「調和的比例」の数式の逆数になっているからである[7]。

4）以下，人名の欧文表記は，基本的にはジニ『平均論』の表記にしたがう。

5）Nicomaco di Gerasa, *Introductio arithmetica*, edizione a cura di R. Hocke, Lipsia 1866.

6）ここでは今日のいわゆる離散量に対照される連続量と言うときの「連続」とは異なる意味で用いられている。なお，ゲラサのニコマコスは4数からなる比例（$\alpha : \beta = \delta : \gamma$）のことを「分離的比例（proporzioni separate）」と言っている［Gini（1958：2）］。

7）算術平均や算術数列と算術との関係，および幾

「反調和的比例」という用語を採用した一人であるスミュルナのテオンは，３数の中項（termine centrale）──「連続的比例の中項（il termine centrale delle proporzione continue)」── b の計算方法を定式化した[8]（表 4（後掲）参照)。このことについてジニは次のように述べている（13)。

「ギリシア人たちが『平均（media)』という言葉を使用することはなく，また平均という今日的な概念を陽表的には定式化しなかったことは確言できる。しかし，それにもかかわらず，彼らの研究は，その後，平均概念へと導き，３つの古典的比例と反調和的比例の中項をもとめる論理過程の嚆矢となった」。

ジニは，「ギリシアにおける比例の概念が必ずしも現代の平均概念をもたらすものではない」(12）と述べ，ピュタゴラスの「音楽的比例」もただちに平均と結びつくことにはならないと考えている。他方で，比例の研究過程で平均概念が意識されていたことを認めている。この文脈で，ジニは，「中庸」(mezzo）にかんするアリストテレス（前 4 世紀）の所説（『ニコマコス倫理学』第 2 巻第 6 章「徳の定義，および中庸の意味」）に言及し，それをスミュルナのテオンによる連続的比例の中項の決定に至る古代ギリシアの先行研究として位置づけた。「中庸」（アリストテレス）に言及して，古代ギリシアにおいては研究の重点が平均（media）ではなく比例関係(proporzione）におかれたことを主張しようとしたのである（12)。ここでは，ジニよりも幾分詳細にアリストテレスの該当箇所を引用する。「徳の本来の性質がどのようなものなのか」を考察した箇所には次のように書かれている[9]。

何平均や幾何数列と幾何（学）との関係が希薄であることから，この国では，算術平均を相加平均，算術数列を等差数列，幾何平均を相乗平均，幾何数列を等比数列と言い換えるようになって久しい。このような言い換えが許容されるならば，「反調和的比例」という名称は維持するとしても，「小反対的比例」を「片側逆数比例」と言うことが可能である。それは，「反調和的比例」と「調和的比例」の比例式を比較すれば，「反調和的比例」の左辺が「調和的比例」の逆数となっている（右辺に着目しても同様のことが指摘できる）からである。この言い換えによって，「反調和的比例」の内容が明確になると期待できる。

8）ΘΕΩΝΟΣ ΣΜΥΡΝΑΙΟΥ, ΠΛΑΤΩΝΙΚΟΥ, ΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΧΡΗΣΙΜΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΛΑΤΩΝΟΣ ΑΝΑΓΝΩΣΙΝ は 1892 年に J. Dupuis によってフランス語に翻訳された。この訳書（Théon de Smyrne, Philosophe Platonicien, *Exposition des Connaissances Mathēmatiques Utiles pour la Lecture de Platon*, traduite pour la première fois du grec en français, par J. Dupuis, Paris 1892）は，原典（ギリシア語）を左頁に，フランス語訳を右頁に印刷した対訳となっている（以下，引用にあたっては Teone da Smirne（1892）と略記)。本文の叙述と関連のある箇所のタイトルは *Περὶ μεσοτήτων*（Des médiétés）である。なお，*Cassel's Latin Dictionary* では“medietas”の項には“a translation of the Greek *μεσότης*”とある（p. 365)。

9）アリストテレス（朴一功訳)『ニコマコス倫理学』(西洋古典叢書　第Ⅱ期　第 22 回配本）京都大学学術出版会，2002 年，pp.71ff. ただし，引用にあたっては漢数字を適宜，算用数字に置き換えた。なお，ここに言う「算術的比例関係」における 3 数（α，β，γ）にかんしては，$\alpha=10$，$\gamma=2$ とし，その「中間のもの」を β とするとき，それが「算術的比例関係」にあることは次のようにすれば，明らかになる。β の不足（$\alpha-\beta$）と超過（$\beta-\gamma$）が等しいとき，

$$\alpha-\beta=\beta-\gamma \qquad (\sharp)$$

の関係が成立する。上式を変形すれば，

$$2\beta=\alpha+\gamma$$

となり，$\alpha=10$，$\gamma=2$ のとき，$\beta=6$ となって，算術的比例の中項に等しい。すなわち，β は「算術的比例関係」ある 3 数の「中庸」になる。

なお，スミュルナのテオンは，「算術的中庸(la médiété arithmétique)」にかんして，その中項（le moyen terme）が（♯）式から誘導され

「…… 連続して分割できるものなら何であれ，われわれはそれに関してより多くのもの，より少ないもの，あるいは等しいものを取ることができるのであり，しかも事柄そのものに即しても，われわれとの関係においても，それら三種類の分量のどれでも取ることができる。ここで等しいものとは，超過と不足の中間をなすものである。そして，『事柄における中間』ということで私が意味しているのは，両極端のそれぞれから等しく離れているもののことであり，まさにこれはだれにとっても同じ一つのものであるが，それに対して，『われわれとの関係における中間』とは過剰になるのでもなく，不足もしない量のことである。しかるにこれは一つではなく，まただされにとっても同じもの，というわけにはいかないのである。たとえば，10 は多く，2 は少ないとすれば，われわれは事柄に即しては 6 を中間のものとして取る。というのも，6 は等しい分量だけ 2 を超過し，かつ 10 に超過されているからである。これはすなわち，『算術的比例関係』による中間のことである。これに対してわれわれとの関係においてならば，このような仕方で取ってはならない。なぜなら，ある人にとって 10 ムナ［約 600 グラム］は食べるのに多すぎ，2 ムナは少なすぎるとしても，体育訓練者は必ずしも 6 ムナを命じるわけではないからである。つまりこの量でもおそらく，それを取ろうとする人にとっては多すぎたり，少なすぎたりするであろう。…… 知識をもつ専門家はだれでも超過と不足を避け，中間を求めてそれを選ぶわけだが，ただしその中間とは『事柄における中間』ではなくて，『われわれとの関係における中間』なのである。

したがって，あらゆる知識はこのようにして中間に目を向け，その基準に作品を適合させることによって，それを善きものに仕上げるとすれば（ここからいつも人々はよくできた作品について，どこかを取り除いたり何かをつけ加えたりすることはできないと論評するのだが，それは超過と不足が作品の善さを壊し，中庸がそれを保全すると見なしているからであり，事実，善き技術者というのは，われわれが言うように，中庸に目を向けて仕事をするのである），そして徳の方が，自然もまたそうであるように，あらゆる技術よりも厳密ですぐれているとすれば，もとよりそれは中間をねらうものであるだろう。」

そして，アリストテレスは「徳とは，中間をねらうものである以上，ある種の『中庸（メソテース）』なのである」と述べている[10)]。

ジニは，アリストテレスが上の引用文において 10 と 2 の中間とした「事柄における中間」6 を「（事柄そのものの）客観的な真正中庸」（un guisto mezzo obiettivo（della cosa in sé））と言い，「われわれとの関係における中間」を「（われわれとの関係における）主観的真正中庸」（un guisto mezzo soggettivo（per rapporto a noi））」と言って，「中庸」を 2 種類に識別したと述べている。そして，前者の数値例において「算術的比例関係」[11)]にある

ることを示唆している（Teone da Smirne（1892：175））。

10）アリストテレス，同上訳書，p.73。

11）アリストテレスは「算術的比例関係」だけでなく「幾何学的比例関係」についても述べている（同上訳書，p.210）。そこでもこの比例関係は，「配分における正しさ」をあたえる「中間的なもの」を規定するという趣旨の叙述を見ることができる。なお，ここに言う「幾何学的比例関係」は，3 数（α，β，γ）にかんしては，

$\alpha>\beta>\gamma>0$ のとき

とされる 6 のことを,「算術的比例関係にしたがう中庸（il mezzo secondo la proporzione aritmetica)」と言っている（12)。

このようにアリストテレスには 2 種類の「中庸」があり，そのうちの「主観的真正中庸」にはジニの「解析的平均」が含まれない。しかも,「客観的真正中庸」には「解析的平均」の一部が包含されるにすぎない。「中庸」には平均が含まれるが，平均よりもその含意は広い。このために,ジニは平均(より正確には「解析的平均」）とアリストテレスの「中庸」を峻別し，平均概念は古代ギリシアでは形成されていなかったと主張した。ただし，ジニは，平均概念の確立時期を明言してはいない。

⑵　拡張 ── 小括 ──

ピュタゴラスとその学派が比例関係にかんする研究を深めたことによって,「古典的比例」(「算術的比例」,「幾何的比例」,「調和的比例」）と「反調和的比例」だけでなく,「連続的比例」の関係にある 3 数の関係式は，その数を増した。ジニは，ゲラサのニコマコスとアレキサンドリアのパッポスの著述をもとにして，それを次のようにまとめた（表 1)(3)。

この一覧表についてジニは次のように指摘している（2ff.)。その一部はこれまでに指摘したことと重なるが，この表 1 を概観するときの参考になると考えて，あえて述べることにする。

(i ）ニコマコスは「算術的比例」,「幾何学的比例」,「調和的比例」を「古典的比例」と総称した。

(ii ）当初,「小反対的比例」と言われていた比例は，メタポントのイッパソスとタラントのアルキュタスによって「調和的比例」と改称された。

(iii)「反調和的比例」,「第 5 比例」,「第 6 比例」の命名者は上記 2 名であると考えられている。

(iv)「反調和的比例」,「第 5 比例」,「第 6 比例」の普及に預かったのはクニードのエウドッソス（Eudosso da Cnido）であると言われている。

(v)「第 7 比例」から「第 10 比例」までの 4 つの比例の命名者はテムノニデス（Temnonide）とエウフラノレス（Eufranore）であると考えられている。

(vi）数式上は同一の比例関係であっても，ニコマココスとパッポスとでは順番が異なっているものがある（表 1 の備考参照)。

(vii）ニコマコスの第 7 比例とパッポスの第 8 比例はそれぞれに固有である。

(viii）ニコマコスとパッポスのいずれにあっても比例式は 10 本であるが，両者に重複しない比例関係があるために，ピュタゴラス学派が提示した「連続的比例」の関係式は全部で 11 本あった。

(ix）スミュルナのテオンが「算術的比例」,「幾何学的比例」,「調和的比例」の中項の計算方法を定式化したのは 1 ～ 2 世紀のことである。

(x ）スミュルナのテオンは中項が平均であるとは言っていないが，中項の値の導出が平均概念へと導いたとするジニの見解は，スミュルナのテオンの著作における該当箇所のタイトル $\Pi\varepsilon\rho\grave{\iota}\ \mu\varepsilon\sigma o\tau\acute{\eta}\tau\omega\nu$ ならびにそのフランス語訳で使用されたラテン語 Des médiétés が「平均」とい

$$\alpha : \beta = \beta : \gamma \qquad (*)$$

で表すことができる。上式を整理すれば,

$$\beta^2 = \alpha\gamma$$
$$\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$$

となり，$\sqrt{\alpha\gamma}$ は 3 数 α，β，γ にかんする幾何学的比例の中項 β と一致する。すなわち，β は「幾何学的比例関係」にある 3 数の「中庸」になる。なお，スミュルナのテオンは「幾何学的中庸（la médiété geometrique)」にかんしてその中項が(＊)式から誘導されると述べている（Teone da Smirne(1892：175))。

表１　さまざまな連続的比例

番号	名称		ニコマコス（１世紀末～２世紀初）		パッポス（３世紀）		
			数式	数値例	数式	数値例	備考
1	古典的比例	算術的比例	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{a}$	3　2　1	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{a}$	6　4　2	
2	古典的比例	幾何学的比例	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{b}{c}$	4　2　1	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b}$	4　2　1	
3	古典的比例	調和的比例	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$	6　4　3	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$	6　3　2	
4	小反対的比例または反調和的比例		$\frac{b-c}{a-b}=\frac{a}{c}$	6　5　3	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{a}$	6　5　2	
5	第５比例		$\frac{b-c}{a-b}=\frac{b}{c}$	5　4　2	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{b}$	5　4　2	
6	第６比例		$\frac{b-c}{a-b}=\frac{a}{b}$	6　4　1	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{b}{a}$	6　4　1	
7	第７比例		$\frac{a-c}{b-c}=\frac{a}{c}$	9　8　6	$\frac{a-c}{a-b}=\frac{b}{c}$	3　2　1	ニコマコスの第10比例
8	第８比例		$\frac{a-c}{a-b}=\frac{a}{c}$	9　7　6	$\frac{a-c}{a-b}=\frac{a}{b}$	6　4　3	
9	第９比例		$\frac{a-c}{b-c}=\frac{b}{c}$	7　6　4	$\frac{a-c}{a-b}=\frac{a}{c}$	4　3　2	ニコマコスの第８比例
10	第10比例		$\frac{a-c}{a-b}=\frac{b}{c}$	8　5　3	$\frac{a-c}{b-c}=\frac{b}{c}$	3　2　1	ニコマコスの第９比例

（注記）１．ニコマコスの第７比例はパッポスにはない。
２．パッポスの第８比例はニコマコスにはない。
（出所）Gini, Corrado, *Le Medie*, Milano 1958, p.3（Tabella I）にもとづく。

うよりは，「中庸」を意味するという解釈によるところが大きい[12)]。

２．ジニの連続的比例

⑴　連続的比例の拡張

ジニは，表１における「連続的比例」のなかで最初の４つの比例（「算術的比例」，「幾何学的比例」，「調和的比例」，「反調和的比例」）の中項が，それぞれ「２項にかんする同名の平均の公式（le forme delle medie omonime nel caso di due termini）」であると述べ，前三者についてその中項の値をもとめたスミュルナのテオンの業績を平均計算の起源と考えている（12f.）。ジニは，平均を「解析的平均」と「非解析的平均」に二分している（64）。４つの比例関係（表１における１～４番の比例式）の中項は，ジニの「解析的平均」に該当するので，厳密には，スミュルナのテオンはいわゆる「解析的平均」にかんする研究の端緒に位置すると言うべきであろう。

平均の起源をこのように捉えたジニは，ピュタゴラス学派における比例の研究に合理性を見た。中項が両端項に挟まれ，それらの内部に落ちることを想起すれば，ジニが平均を定義するにあたって，両端項の外部に落ちる値をも平均と見なさざるをえないオスカル・キズィーニの見解[13)]を批判し，基本的

12）注８参照。

13 ）Chisini, Oscar, “Sul concetto di media,”

にはコーシーの定義[14]を踏襲したことは理解しやすい。

コーシーの平均観はピュタゴラス学派と整合的であり，コーシーに依拠したジニは，ピュタゴラス学派における比例研究の現代化を『平均論』の１つの課題とした。その考察が同著刊行の目的の１つでもあったと考えることができる。そこで，ピュタゴラス学派の「連続的比例」にかんするジニの拡張を取り上げる。ジニは 3 数 a，b，c の連続的比例にかんする数式を悉皆的に枚挙するにあたって，その数式の左辺と右辺に分けて 3 数の組合せを考えた。以下ではジニの考察を跡づける（6f.)。

①　連続的比例式の左辺

比例式左辺の分母と分子になりうる 2 数の組合せは次の 6 とおりである。

$a-b$，$a-c$，$b-c$，$b-a$，$c-a$，$c-b$

したがって，36 とおりの分数が可能である。表 2 のなかの数字は分数の番号（以下，組合せ番号）を示す。

この表 2 についてジニは次のように述べている。

（ⅰ）組合せ番号 7 と 10，8 と 11，12 と 15 の組合せは同値である。よって，10，11，15 は削除できる（3 組の除外)。

（ⅱ）組合せ番号 22～36 は，それぞれ互いに 7 ～21 と逆数の関係にある。たとえば 22 番は $\dfrac{a-c}{a-b}$ であり，7 番は $\dfrac{a-b}{a-c}$ である。これらを左辺とするときには，$\dfrac{b}{a}$ や $\dfrac{a}{b}$ が右辺となりうる。すなわち，$\dfrac{a-c}{a-b}$（22 番）については，$\dfrac{a-c}{a-b}=\dfrac{b}{a}$ と $\dfrac{a-c}{a-b}=\dfrac{a}{b}$ の可能性がある。また，$\dfrac{a-b}{a-c}$（7 番）については，$\dfrac{a-b}{a-c}=\dfrac{b}{a}$ と $\dfrac{a-b}{a-c}=\dfrac{a}{b}$ の 2 組が可能である。この場合，22 番についての $\dfrac{a-c}{a-b}=\dfrac{b}{a}$ と 7 番についての $\dfrac{a-b}{a-c}=\dfrac{a}{b}$ とは同値の関係にある。このようなことが 23～36 番と 8 ～21 番のそれぞれについて妥当するので，ジニは組合せのこのような重複を避ける目的で，22～36 番を除外している（15 組の除外)。

（ⅲ）上で述べたことは，1 ～ 3 番と 16～18 番のそれぞれについても妥当するので，16～18 番が除外される（3 組の除外)。また，9 番と 21 番，13 番と 19 番，14 番と 20 番についても同様であるから，9 番，13 番，14 番が除外される（3 組の除外)。

表 2　連続的比例式の左辺

分母＼分子	$a-b$	$a-c$	$b-c$	$b-a$	$c-a$	$c-b$
$a-b$	1(iv)	22(ii)	27(ii)	31(ii)	34(ii)	36(ii)
$a-c$	***7***	2(iv)	23(ii)	28(ii)	32(ii)	35(ii)
$b-c$	***12***	***8***	3(iv)	24(ii)	29(ii)	33(ii)
$b-a$	16(iii)	13(iii)	9(iii)	4(iv)	25(ii)	30(ii)
$c-a$	***19***	17(iii)	14(iii)	10(i)	5(iv)	26(ii)
$c-b$	***21***	***20***	18(iii)	15(i)	11(i)	6(iv)

（注記）1．上付きの（　）内ローマ数字（小文字）は本文の叙述に対応し，それぞれの理由から除外される。
2．斜体の強調数字で示した組合せ番号だけが残る。
（出所）表 1 に同じ。p.7（Tabella II. Possiblili Forme del Primo Membro）にもとづく。

Periodico di Matematiche, Serie IV, Volume IX, N. 2, 1º marzo 1929［Chisini (1929)].

14)「諸量の平均とは，それらの諸量における小さい量と大きい量との間にある新しい量である」（ただし，引用は Chisini (1929：106）による)。

（iv）たとえば組合せ番号１番は分母と分子が同一であるので，右辺と組み合わせれば，$\frac{a-b}{a-b}=\frac{a}{b}$ となることもある。この式からは $a=b$（∴　$a-b=0$）となり，３数のあいだの比例関係を導き出すことはできない。このことは１～６番の６とおりの組合せについて妥当するので，「連続的比例」の関係を示す数式を導出することはできない。このために，これらの組合せを除外する（６組の除外）。

以上のように，可能な組合せをふるいにかけて残った組合せ（表２の斜体強調数字）をジニは，第１カテゴリーと第２カテゴリーの２つに分類している。この分類の基準は，３数 a，b，c が昇順（または降順）に並んでいるときに，左辺に位置する比の値が正になるか（第１カテゴリー），負になるか（第２カテゴリー）である。カテゴリー別の組合せは次のようになる。

第１カテゴリー：

$$12\text{番}\left(\frac{a-b}{b-c}\right), 7\text{番}\left(\frac{a-b}{a-c}\right), 8\text{番}\left(\frac{a-c}{b-c}\right)$$

第２カテゴリー：

$$21\text{番}\left(\frac{a-b}{c-b}\right), 19\text{番}\left(\frac{a-b}{c-a}\right), 20\text{番}\left(\frac{a-c}{c-b}\right)$$

②　連続的比例式の右辺

連続的比例式の右辺は，a，b，c の３数から選出した２数ずつの組合わせからなり，その場合の数は次の９とおりである(6)。

$$\frac{a}{a},\ \frac{a}{b},\ \frac{a}{c},\ \frac{b}{b},\ \frac{b}{a},\ \frac{b}{c},\ \frac{c}{c},\ \frac{c}{a},\ \frac{c}{b}$$

しかし，

$$\frac{a}{a}=\frac{b}{b}=\frac{c}{c}=1$$

であるから，$\frac{a}{a}$ だけを残して，$\frac{b}{b}$ と $\frac{c}{c}$ は除外することができる。この結果，連続的比例式の右辺に可能な組合せのなかで考察の対象となるのは，

$$\frac{a}{a},\ \frac{a}{b},\ \frac{a}{c},\ \frac{b}{a},\ \frac{b}{c},\ \frac{c}{a},\ \frac{c}{b}$$

の７とおりである。

③　可能な連続的比例式

上の②で考察した７とおりの分子と①で考察した２つのカテゴリーに分類された分母を組み合わせ，それぞれの比例式に番号をふってまとめれば，表３を得る。この表では，たとえば，(I-1)式は

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{a}$$

である。

表３にまとまめられた比例式について，ジニは次のように述べている（10)。

（ｉ）(I-5)式と(I-2)式，(V-4)式と(V-3)式，(VI-7)式と(VI-3)式は，それぞれ同値である。したがって，(I-5)式，(V-4)式，(VI-7)式は除外できる。

（ii）(II-1)式と(II-5)式からはいずれも $b=c$ となる。これは３数（a，b，c）が異なった値をとるという条件を満たさない。よって，この２式は除外できる。

（iii）$a=b$ となる(III-1)式と(III-2)式についても（ii）と同様の理由から削除することができる。

（iv）$a=c$ となる(IV-1)式と(IV-3)式についても同様である。

（ｖ）$$\frac{a-b}{c-b}=\frac{a}{a} \qquad \text{(V-1)}$$

より，

$$a-b=c-a \qquad \text{(V-1)}'$$

となる。ここで３数の大小関係が $a>b>c$ のとき，(V-1)′式の左辺は正となるが，右辺は負である。したがって，(V-

表 3　連続的比例式の左辺と右辺の可能な組合せ

左辺＼右辺			$\frac{a}{a}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{c}{b}$
第1カテゴリー	$\frac{a-b}{b-c}$	12	**(I-1)**	**(I-2)**	**(I-3)**	**(I-4)**	(I-5)[(i)]	**(I-6)**	**(I-7)**
	$\frac{a-b}{a-c}$	7	(II-1)[(ii)]	**(II-2)**	**(II-3)**	**(II-4)**	(II-5)[(ii)]	**(II-6)**	**(II-7)**
	$\frac{a-c}{b-c}$	8	(III-1)[(iii)]	(III-2)[(iii)]	**(III-3)**	**(III-4)**	**(III-5)**	**(III-6)**	**(III-7)**
第2カテゴリー	$\frac{a-b}{c-b}$	21	(IV-1)[(iv)]	**(IV-2)**	(IV-3)[(iv)]	**(IV-4)**	**(IV-5)**	**(IV-6)**	**(IV-7)**
	$\frac{a-b}{c-a}$	19	(V-1)[(v)]	**(V-2)**	**(V-3)**	(V-4)[(i)]	**(V-5)**	**(V-6)**	**(V-7)**
	$\frac{a-c}{c-b}$	20	(VI-1)[(v)]	**(VI-2)**	**(VI-3)**	**(VI-4)**	**(VI-5)**	**(VI-6)**	(VI-7)[(i)]

(訳注)　1．左辺の右欄の数字は表 2 の組合せ番号に対応している。
　　　　2．式番号に付したローマ数字（i)～(v)は本文の叙述に対応し，それぞれの理由から除外される。このために，強調文字で示した数式だけが残される。

(出所)　表 1 に同じ。p.9(Tabella III. Possiblili Combinazioni delle Forme del Primo Membro e del Secondo Membro)にもとづく。

1)′式は $a>b>c$ という条件を満たさない。3 数の大小関係が逆の場合（$a<b<c$）には，(V-1)′式の左辺は負であるが，右辺は正となり，この場合にも 3 数の大小関係にかんする条件（$a<b<c$）を満たさない。このために，(V-1)式は除外しなければならない。これと同様のことは(VI-1)式についても妥当するので，(VI-1)式は除外される。

（vi）以上のようにさまざまな比例式から適切なものを選別すれば，考察の対象とすべき数式として 31 本が残される。その内訳は次のとおりである。

①左辺の比の値が正となる比例式は，表 3 の組合せ番号 12 について 6 本，7 番について 5 本，8 番について 5 本の合計 16 本の比例式である。

②左辺の比の値が負となるのは，全部で 15 本ある。

表 3 において，このような数式は強調文字で記載されている。

⑵　連続的比例とその中項

「これらの数式［古典的比例にかんする数式］は，任意の実数 a，b，c について意味をもつにもかかわらず，ピュタゴラス学派の人々は a，b，c が正の整数の場合だけに研究を限定していたことは事実である」⑵とジニは述べている。そして，上述した 31 本の（表 3 において強調文字を使用した）連続的比例式のそれぞれについて，スミュルナのテオンにならって，b をあたえる数式を誘導した。その上で，b が 3 数の大小関係にかんする所与の条件である $a>b>c$（または $a<b<c$）を満たしているという意味で，その b が 3 数の「中項（termine centrale)」となっているかどうかを検討した。その結果，3 数のなかの a と c が同符号（正または負）である場合には，第 2 カテゴリーに属す比例式のいずれにおいてであろうとも，b は中項とはなりえないことを明らかにした（22f.)。そのためであろうか，等差数列や等比数列のように数の系列が規則性をもって並ぶ数列を形成する場合に隣り合う 3 項の数量的関係を考察するときや当該数列の一般項を導出するときには，

表 4　連続的比例と平均の名称

番号	比例式	b	比例の名称ならびに a と c の平均としての b の名称	ニコマコス	パッポス
1	$\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{a}{a}$	$b=\dfrac{a+b}{2}$	算術的	*	*
2	$\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{a}{b}$	$b=\sqrt{ac}$	幾何学的	*	*
3	$\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{a}{c}$	$b=\dfrac{2ac}{a+c}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}}$ $\left(=\dfrac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}}{2}}\right)$	調和的	*	*
4	$\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{b}{a}$	$b=\dfrac{c-a\pm\sqrt{c^2+5a^2-2ac}}{2}$	第　6	*	*
5	$\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{c}{a}$	$b=\dfrac{a^2+c^2}{a+c}$	反調和的	*	*
6	$\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{c}{b}$	$b=\dfrac{a-c\pm\sqrt{a^2+5c^2-2ac}}{2}$	第　5	*	*
7	$\dfrac{a-b}{a-c}=\dfrac{a}{b}$	$b=\dfrac{a\pm\sqrt{4ac-3a^2}}{2}$			
8	$\dfrac{a-b}{a-c}=\dfrac{a}{c}$	$b=\dfrac{2ac-a^2}{c}$			
9	$\dfrac{a-b}{a-c}=\dfrac{b}{a}$	$b=\dfrac{a^2}{2a-c}$	第　8		*
10	$\dfrac{a-b}{a-c}=\dfrac{c}{a}$	$b=\dfrac{a^2+c^2-ac}{a}$	第　9		*
			第　8	*	
11	$\dfrac{a-b}{a-c}=\dfrac{c}{b}$	$b=\begin{cases}a-c\\c\end{cases}$	第　7		*
			第　10	*	
12	$\dfrac{a-c}{b-c}=\dfrac{a}{c}$	$b=\dfrac{2ac-c^2}{a}$	第　7	*	
13	$\dfrac{a-c}{b-c}=\dfrac{b}{a}$	$b=\begin{cases}a\\c-a\end{cases}$			
14	$\dfrac{a-c}{b-c}=\dfrac{b}{c}$	$b=\dfrac{c\pm\sqrt{4ac-3c^2}}{2}$	第　10		*
			第　9	*	
15	$\dfrac{a-c}{b-c}=\dfrac{c}{a}$	$b=\dfrac{a^2+c^2-ac}{c}$			
16	$\dfrac{a-c}{b-c}=\dfrac{c}{b}$	$b=\dfrac{c^2}{2c-a}$			

（注記）１．第 3 番目の中項にかんする（　）内の数式は引用者による。
　　　　２．第 2 カテゴリーの比例関係にたいして b をあたえる数式については Gini（1958: 16f.）参照。
　　　　３．b が 3 数の中項となるときにとりうる a と c の範囲については表 5 参照。
（出所）表 1 に同じ（p.14f.）。Tabella II/A。

第 2 カテゴリーの比例式を考察の対象外としている。

このように，ジニの考察の力点は，第 1 カテゴリーの比例式におかれているので，ここでもそれに合わせて，第 1 カテゴリーにかんするジニの要約表からその一部の項目を抜粋して，上に掲載した（表 4）。

表 5　比例式ごとに $\boldsymbol{b}$ の値がとる範囲

番号	比例式	名称（N はニコマコス，P はパッポス）	(1)		(2)		(3)		(4)	
			$a>0,\ c>0$		$a<0,\ c<0$		$a>0,\ c<0$		$a<0,\ c>0$	
			$a>c$	$a<c$	$\lvert a\rvert>\lvert c\rvert$	$\lvert a\rvert<\lvert c\rvert$	$\lvert a\rvert>\lvert c\rvert$	$\lvert a\rvert<\lvert c\rvert$	$\lvert a\rvert>\lvert c\rvert$	$\lvert a\rvert<\lvert c\rvert$
			$0\ \ c\ \ a$	$0\ \ a\ \ c$	$a\ \ c\ \ 0$	$c\ \ a\ \ 0$	$c\ \ 0\ \ a$	$c\ \ 0\ \ a$	$a\ \ 0\ \ c$	$a\ \ 0\ \ c$
1	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{a}$	算術的（N，P）	$\boldsymbol{a>b>c}$	$\boldsymbol{a<b<c}$	$\boldsymbol{a<b<c}$	$\boldsymbol{a>b>c}$	$\boldsymbol{a>b>c}$	$\boldsymbol{a>b>c}$	$\boldsymbol{a<b<c}$	$\boldsymbol{a<b<c}$
2	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b}$	幾何学的（N，P）	$\boldsymbol{a>b_1>c}$ $b_2<c$	$\boldsymbol{a<b_1<c}$ $b_2<c$	$b_1<c$ $\boldsymbol{a<b_2<c}$	$b_1>a$ $\boldsymbol{a>b_2>c}$	b_1，b_2 は虚数。	b_1，b_2 は虚数。	b_1，b_2 は虚数。	b_1，b_2 は虚数。
3	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$	調和的（N，P）	$\boldsymbol{a>b>c}$	$\boldsymbol{a<b<c}$	$\boldsymbol{a<b<c}$	$\boldsymbol{a>b>c}$	$b>c$	$b>a$	$b>c$	$b<a$
5	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{a}$	反調和的（N，P）	$\boldsymbol{a>b>c}$	$\boldsymbol{a<b<c}$	$\boldsymbol{a<b<c}$	$\boldsymbol{a>b>c}$	$b>a$	$b<c$	$b<a$	$b>c$
4	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{b}{a}$	第 6（N，P）	$\boldsymbol{a>b_1>c}$ $b_2<c$	$\boldsymbol{a<b_1<c}$ $b_2<a$	$b_1<c$ $\boldsymbol{a<b_2<c}$	$b_1<a$ $\boldsymbol{a>b_2>c}$	$\boldsymbol{a>b_1>c}$ $b_2<c$	$\boldsymbol{a>b_1>c}$ $b_2<c$	$b_1>c$ $\boldsymbol{a<b_2<c}$	$b_1>c$ $\boldsymbol{a<b_2<c}$
6	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{b}$	第 5（N，P）	$\boldsymbol{a>b_1>c}$ $b_2<c$	$\boldsymbol{a<b_1<c}$ $b_2<a$	$b_1>c$ $\boldsymbol{a<b_2<c}$	$b_1>a$ $\boldsymbol{a>b_2>c}$	$b_1>a$ $\boldsymbol{a>b_2>c}$	$b_1>a$ $\boldsymbol{a>b_2>c}$	$\boldsymbol{a<b_1<c}$ $b_2<a$	$\boldsymbol{a<b_1<c}$ $b_2>a$
7	$\frac{a-b}{a-c}=\frac{a}{b}$		$\left\{\begin{array}{l} b_1<c \\ b_2<c \end{array}\right.$ (1) b_1，b_2 は虚数(2)。	$\boldsymbol{a<b_1<c}$ $b_2<a$	$\left\{\begin{array}{l} b_1>c \\ b_2>c \end{array}\right.$ (3) b_1，b_2 は虚数(4)。	$b_1>a$ $\boldsymbol{a>b_2>c}$	b_1，b_2 は虚数。	b_1，b_2 は虚数。	b_1，b_2 は虚数。	b_1，b_2 は虚数。
8	$\frac{a-b}{a-c}=\frac{a}{c}$		$b<c$	$\boldsymbol{a<b<c}$	$b>c$	$\boldsymbol{a>b>c}$	$b>a$	$b>a$	$b>a$	$b>a$
9	$\frac{a-b}{a-c}=\frac{b}{a}$	第 8（P）	$\boldsymbol{a>b>c}$	$b>c$ (5) $b<a$ (6)	$\boldsymbol{a<b<c}$	$b>a$ (7) $b<c$ (8)	$\boldsymbol{a>b>c}$	$\boldsymbol{a>b>c}$	$\boldsymbol{a<b<c}$	$\boldsymbol{a<b<c}$
10	$\frac{a-b}{a-c}=\frac{c}{a}$	第 9（P）	$\boldsymbol{a>b>c}$	$b>c$	$\boldsymbol{a<b<c}$	$b>a$	$b>a$	$b>a$	$b<a$	$b<a$
11	$\frac{a-b}{a-c}=\frac{c}{b}$	第 7（P） 第10（N）	$\boldsymbol{a>b>c}$ (9) $b<c$ (10)	$b<a$	$\boldsymbol{a<b<c}$ (11) $b>c$ (12)	$b>a$	$b>a$	$b>a$	$b<a$	$b<a$
12	$\frac{a-c}{b-c}=\frac{a}{c}$	第 7（N）	$\boldsymbol{a>b>c}$	$b<a$	$\boldsymbol{a<b<c}$	$b>a$	$b<c$	$b<c$	$b>c$	$b>c$
14	$\frac{a-c}{b-c}=\frac{b}{c}$	第10（P） 第 9（N）	$\boldsymbol{a>b_1>c}$ $b_2<c$	$\left\{\begin{array}{l} b_1<a \\ b_2<a \end{array}\right.$ (13) b_1，b_2 は虚数(14)。	$b_1>c$ $\boldsymbol{a<b_2<c}$	$\left\{\begin{array}{l} b_1>a \\ b_2>a \end{array}\right.$ (15) b_1，b_2 は虚数(16)。	b_1，b_2 は虚数。	b_1，b_2 は虚数。	b_1，b_2 は虚数。	b_1，b_2 は虚数。
13	$\frac{a-c}{b-c}=\frac{b}{a}$		$b<c$	$\boldsymbol{a<b<c}$ (17) $b<c$ (18)	$b>c$	$\boldsymbol{a>b>c}$ (19) $b>a$ (20)	$b<c$	$b<c$	$b>c$	$b>c$
15	$\frac{a-c}{b-c}=\frac{c}{a}$		$b>a$	$\boldsymbol{a<b<c}$	$b<a$	$\boldsymbol{a>b>c}$	$b<c$	$b<c$	$b>c$	$b>c$
16	$\frac{a-c}{b-c}=\frac{c}{b}$		$b>a$ (21) $b<c$ (22)	$\boldsymbol{a<b<c}$	$b>c$ (23) $b<a$ (24)	$\boldsymbol{a>b>c}$	$\boldsymbol{a>b>c}$	$\boldsymbol{a>b>c}$	$\boldsymbol{a<b<c}$	$\boldsymbol{a<b<c}$

(1) $c>\frac{3}{4}a$ のとき。(2) $c<\frac{3}{4}a$ のとき。(3) $\lvert c\rvert>\frac{3}{4}\cdot\lvert a\rvert$ のとき。(4) $\lvert c\rvert<\frac{3}{4}\cdot\lvert a\rvert$ のとき。(5) $a>\frac{c}{2}$ のとき。(6) $a<\frac{c}{2}$ のとき。(7) $\lvert a\rvert>\frac{\lvert c\rvert}{2}$ のとき。(8) $\lvert a\rvert<\frac{\lvert c\rvert}{2}$ のとき。(9) $\frac{a}{2}>c$ のとき。(10) $\frac{a}{2}<c$ のとき。(11) $\frac{\lvert a\rvert}{2}>c$ のとき。(12) $\frac{\lvert a\rvert}{2}<\lvert c\rvert$ のとき。(13) $a>\frac{3}{4}c$ のとき。(14) $a<\frac{3}{4}c$ のとき。(15) $\lvert a\rvert>\frac{3}{4}\lvert c\rvert$ のとき。(16) $\lvert a\rvert<\frac{3}{4}\lvert c\rvert$ のとき。(17) $\frac{a}{2}>c$ のとき。(18) $\frac{a}{2}<c$ のとき。(19) $\frac{\lvert a\rvert}{2}>\lvert c\rvert$ のとき。(20) $\frac{\lvert a\rvert}{2}<\lvert c\rvert$ のとき。(21) $c>\frac{a}{2}$ のとき。(22) $c<\frac{a}{2}$ のとき。(23) $\lvert c\rvert>\frac{\lvert a\rvert}{2}$ のとき。(24) $\lvert c\rvert<\frac{\lvert a\rvert}{2}$ のとき。

（注記）比例式の番号は表 3 に同じ。原表どおりに，4 番と 5 番ならびに 13 番と 14 番の表記順序を逆にした。
（出所）表 1 に同じ（p.18f.）。Tabella III/A にもとづく。

⑶ 中項の範囲

表3に表章した比例式のなかで，その左辺の比の値が正になる第1カテゴリーに着目する。それらの比例式にかんして3数 a，b，c を構成する a と c の符号およびその絶対値の大小関係に応じて，表4に表章した b は a，c とどのような関係にあるのであろうか。このことを検討し，その結果を要約したのが，表5（前頁）である。この表では，3数 a，b，c において b（1つであるとは限らない）が a と c の文字どおり中項になっている場合を，ジニにならって太字で強調した[15]。

表5から a および c の①符号と②絶対値の大小関係にかんする8つの可能性のすべてについて，b に一価的（univoco）な値があたえられ，しかもそれが3数 a，b，c の中項となるのは，相加平均（算術平均）だけであることが分かる。このために，相加平均は広範に応用される可能性を内包し，実際にも広く応用されて，後に「平均の別名（la media per antonomasia)」ともなったとジニは指摘している（26)。

すでに述べたように，古代ギリシアにおいては「平均」という用語が使用されることはなかった。しかし，「平均というものは連続的比例の中項である（la media è termina centrale di una proporzione continua)」と考えるようになったことが，「平均概念の発展における第一段階」であった（13）とジニは指摘している。この意味からもジニは，ギリシア数学における中項の研究が平均にかんする考察の「さきがけ」であると見ている。ところで，3数の中項は，最も大きい値の項よりも大きくなく，最も小さい値の項よりも小さくなく，両端項の内部に位置する。これは，基本的には，平均にかんするコーシーの定義に照応する。ジニは，コーシーを踏襲して，あらゆる平均が満たすべき条件として「内部性の要請（il requsito dell'internalità)」(60）を掲げた。古代ギリシアの中項にかんする所説の延長線上にジニの「内部性の要請」がある。したがって，「内部性の要請」は，古代ギリシア（ピュタゴラス学派）の数学理論に端を発し，コーシーを経て，ジニによって定式化されたと考えることができる。

お わ り に

ジニは，学説史的な検討を経て，平均（計算・操作）の起源をピュタゴラス学派にあると見た。平均という用語はピュタゴラス学派にはなかったが，実質的に平均の計算方法が定式化されていたからである[16]。この学説史的系譜の延長線上にコーシーの平均概念が位置づけされる。そして，ジニはコーシーの定義を踏襲して平均概念を定義したと言うことができる。

ジニは，平均を「解析的平均」と「非解析的平均」に二分している。ジニの「解析的平均」は多様である。このために，ピュタゴラ

15）表3における第2カテゴリー（左辺における比の値が負になる比例式）にかんしてもジニは表5と同様の表（Tabella III/B）を掲げている（Gini (1958: 22ff.)）。その表にもとづいてジニは，aと c の符号が一致する場合（①$a>0$，$c>0$，②$a<0$，$c<0$ のとき）には，どの比例式においても $a<b<c$ または $a>b>c$ にはならず，b が中項にはならないこと，ならびに a と c の符号が一致しない場合（③$a>0$，$c<0$，②$a<0$，$c>0$ のとき）には，$a<b<c$ または $a>b>c$ となる（b が中項になる）比例式があることを指摘するにとどめている。

16）なお，この点ついてはピュタゴラス（学派）にはすでに平均概念が存在していたと考えている論者もいる。たとえば，①Heath, Th. L., *A Manual of Greek Mathematics*, Oxford 1931（平田寛訳『ギリシア数学史 Ⅰ』共立出版，1959年，p.49 以下）；②Boyer, C. B., *A History of Mathematics*, New York 1968（加賀美鐵雄，浦野由有訳『数学の歴史 Ⅰ』朝倉書店，1983年，p. 77）。

ス学派による中項の計算式を拡張し，それを一覧に供した表 4 は，ジニの「解析的平均」の一部にすぎない。本稿では取り上げなかったが，ジニはさまざまな「解析的平均」の数学的性質を検討している。その考察は今後の課題である。

［謝辞］　本稿の執筆にあたり，栗林広明本学経済学部教授（哲学担当）からご教示を賜った。記して謝意を表す。