タイトル	パレート指数にかんするベニーニの見解
著者	木村，和範
引用	季刊北海学園大学経済論集，52(2・3)：1-14
発行日	2004-12-25

《論説》

パレート指数にかんするベニーニの見解

木　村　和　範

はじめに

所得分布に関数関係をあてはめ，その関数のパラメータによって所得分布を時間的空間的に比較しようとした最初の試みは，ヴィルフレド・パレートによってなされた。このパラメータとは，いわゆるパレート法則における「パレート指数（Pareto's index)」α のことであって，古くは「パレート常数」と呼ばれていた。この α の数値的特定にパレートはコーシーの補間法を援用した。パレートによるこの研究は，イタリアの統計学者ロドルフォ・ベニーニを経て，コッラド・ジーニによって批判的に継承された。ジーニの所得分布研究は，①パレート・モデル（所得分布関数）の適合性と②パレート指数の解釈のいずれについても，パレートとは別の結論に帰着した。

さらにまた，ジーニの見解とそれに直接先行するベニーニの見解とを比較してみると，両者の見解は完全には一致していないことが分かる。上記の第1論点（モデルの適合性）にかんしては，ベニーニがパレートを支持しているのにたいして，ジーニはそうではなかった。他方で，第2論点（パレート指数の解釈）について，ジーニとベニーニとは同一の見解に至った。このように，ジーニとベニーニの見解は，細部にわたって同一であるとは言い難い。それにもかかわらず，ジーニは，所得分布を研究するにあたって，彼の直接先行者の1人にベニーニの名を挙げている。そこで，ジーニの所説を検討することを今後の課題としているために，本稿ではその予備的考察としてベニーニの見解を取り上げ，紹介・論評することとしたい。

叙述の順序は以下のとおりである。

(1) パレート所得分布論のイタリアにおける受容
(2) パレート指数 α にかんするベニーニの解釈

1．パレート所得分布論のイタリアにおける受容

(1) 概要

パレートは『政治経済学教程』（第2巻，1897年刊）の「所得曲線」という章でそれまでの彼の所得分布研究を総括的に展開した[1)]。

1）Pareto, Vilfredo, *Cours d'Économie Politique*, Tome 2, Lausanne 1897［以下Pareto（1897a)］.

この刊行直後にベニーニは，パレートの研究が所得分布研究の分野を切り開くものとして，それを肯定的に評価した[2)]。そして，パレートの所得分布研究が所得だけでなく，資産の分布にも適用できると述べた。彼は，自然尺度（scala naturale）によるグラフ表示と対数尺度（scala logaritmica）によるグラフ表示を比較検討し，後者の有効性を主張し，イタリアの所得分布にパレートの所得分布関数をあてはめ，コーシーの補間法によってパレート指数を計算した[3)]。このことを述べた論文を公刊した同じ年（1905年）に，ベニーニは，所得分布の統計的計測を含めてみずからの統計理論を体系的にまとめた，別の論文「統計学方法論原理」を執筆・公表した[4)]。これは「総論」と「各論」の2部編成（VII＋353ページ）で，『経済学』誌第18巻第1号の全体がこの論文に充てられている。以下では，この論文を中心にして，ベニーニの見解を見ることとする。あらかじめ，その内容を概観すると次のようになる。

ベニーニはまずイタリアの所得統計を自然尺度のグラフに表示して，その形状がパレートのいわゆる「社会的ピラミッド（pyramide sociale）」[5)]によく符合していることを示した（ただし，ベニーニは「社会的ピラミッド」という言葉を使用してはいない。）

次に，そのデータにパレートの所得分布関数

$$N(x)=\frac{H}{x^{\alpha}} \tag{1}$$

xは所得額，$N(x)$は所得がx以上の人数（もしくは世帯数）

をあてはめ，さらに(1)式を次のように対数変換した。

$$\log N(x)=\log H-\alpha \log x \tag{2}$$

そして，パレートにならいコーシーの補間法を適用して，Hとαの値を求めた。ベニーニは，このようにして特定された所得分布関数が実際の所得分布とよく符合していることを確かめた。

以上に概観したベニーニの研究目的は，第1に，パレートの構想をイタリアの所得統計に適用することにあった。第2には，パレート理論を統計的に検証することにおかれた。

表1　県庁所在地（23都市）における所得階級別世帯数（1887年）

世帯の所得 x	世帯数 N
1,000～ 2,000（リラ）	32,518
2,000～ 4,000	17,202
4,000～ 7,000	5,502
7,000～10,000	1,867
10,000～15,000	1,087
15,000～25,000	665
25,000～	645
合　計	59,486

（出所）① Benini, Rodolfo, "Di alcune curva descritte da fenomeni economici aventi relazione colla curva del reddito o con quella del patrimonio," *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XIV, 1897, p.179; ② ditto, "I diagram a scala logaritmica," *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XXX, 1905, p.224; ③ ditto, "Principii di Statistica Metodologia," *Biblioteca dell'Economista*, Volume XVIII, Dispensa 1ª, 1905, p.141.

（イタリア語訳［*Corso di Economia Politica*, Secondo Volume, Torino］は1942年に刊行された。以下Pareto（1942）。）

2）Benini, Rodolfo, "Di alcune curva descritte da fenomeni economici aventi relazione colla curva del reddito o con quella del patrimonio," *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XIV, 1897, p.177［以下Benini（1897）］.

3）Benini, R., "I diagram a scala logaritmica," *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XXX, 1905［以下Benini（1905a）］.

4）Benini, R., "Principii di Statistica Metodologia," *Biblioteca dell'Economista*, Volume XVIII, Dispensa 1ª, 1905［以下Benini（1905 b）］.

5）Pareto (1897a), p.313［Pareto (1942), p.346.］なお，早川三代治「所得ピラミッドの端初的形態」『商学討究』（小樽商科大学）第2巻第1号1951年も参照。

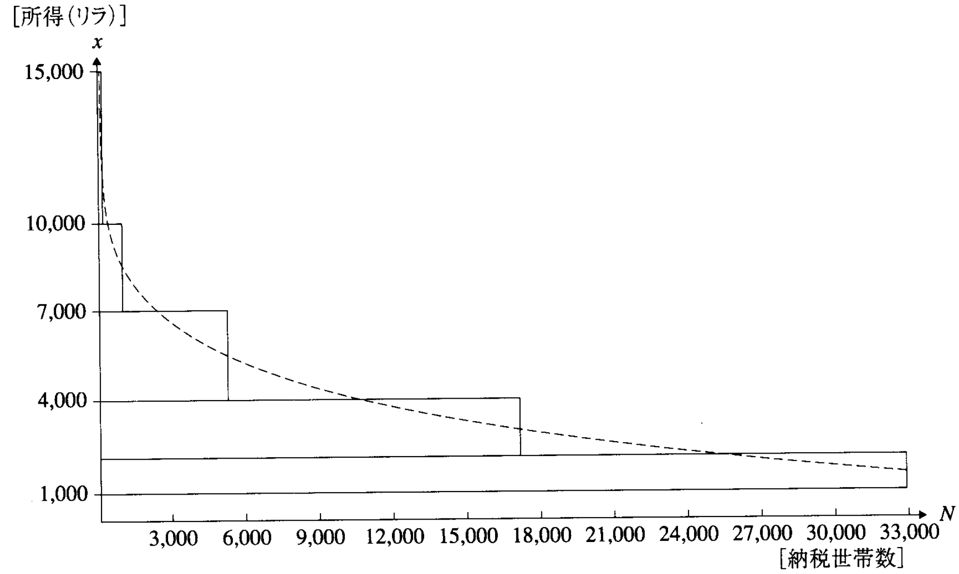

図1　所得階級別納税世帯数

(出所) Benini, Rodolfo, "Principii di Statistica Metodologia," *Biblioteca dell'Economista*, Volume XVIII, Dispensa 1ª, 1905, p.142.ただし，表1のデータによって訂正した。

第3には，パレート理論をイタリアの統計学界に受容することであった。

しかし，いわゆるパレート指数 α の解釈についてはベニーニとパレートとは正反対の関係にある。パレートは，α の減少が不平等度の緩和を意味する（逆に言えば α の増加は不平等度の強化を意味する）と考えた。これにたいして，ベニーニは，今日，通説となっている見解を主張した。すなわち，α が増大するに伴って，平等度が強まると考えた。α の解釈をめぐるベニーニの見解については，別に項を改めて述べることとする。

(2)　イタリアの所得統計（1887年）

パレートにならって所得分布関数をイタリアの所得統計に応用した論文として，ベニーニは少なくとも3篇，執筆している[6]。そのいずれにおいても彼は1887年の県庁所在地(23都市)[7]における世帯を課税単位とした同一の所得統計を利用している（表1参照)。

ベニーニは表1からグラフ（縦軸が所得階級で，横軸は納税者［世帯］数）を作成した（図1)。この図は，積み上げられた（5つの）長方形と曲線（点線）からなっている。その曲線は，それぞれの長方形について縦方向の辺の中点を結んだ平滑線である。

(3)　コーシーの補間法の適用

ベニーニは表1から，ある所得額 x を下限としてそれ以上の所得を有する累積世帯数 $N(x)$ を次のようにまとめた（表2)。なお，データを表2にまとめ直すとき，彼は，コーシーの補間法を適用するために，関連項目についてはその対数も表章した。

ベニーニはこの表2から，所得と世帯数を

6）① Benini (1897); ② Benini (1905a); ③ Benini (1905b). 以下の叙述では，主として③ Benini (1905b) にもとづき，その他の論文を適宜参照する。

7）Ancona, Arezzo, Belluno, Bologna, Cuneo, Ferrara, Firenze, Foggia, Grosseto, Mantova, Massa, Modena, Parma, Pavia, Perugia, Pesaro, Pisa, Reggio Emilia, Siena, Sondrio, Treviso, Udine, Vicenza

表 2　コーシーの補間法のための計算表

所得(リラ) x	納税世帯数(累積)* $N(x)$	$\log x$	$\log N(x)$	平均偏差 $\Delta\log x$	平均偏差 $\Delta\log N(x)$	
1,000	59,486	3.00000	4.77441	−0.76032	1.04137	
2,000	26,968	3.30103	4.43085	−0.45929	0.69781	
4,000	9,766	3.60206	3.98972	−0.15826	0.25667	
7,000	4,264	3.84510	3.62982	0.08478	−0.10323	
10,000	2,397	4.00000	3.37967	0.23968	−0.35337	
15,000	1,310	4.17609	3.11727	0.41577	−0.61577	
25,000	645	4.39794	2.80956	0.63762	−0.92348	
	平　均	3.76032	3.73304	−1.37786	1.99585	合　計
				1.37786	**−1.99585**	(符号ごと)

(訳注＊) この欄の左に記した所得額(x)を下限とする納税世帯数。
(出所) ① Benini, Rodolfo, "Di alcune curva descritte da fenomeni economici aventi relazione colla curva del reddito o con quella del patrimonio," *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XIV, 1897, p.179; ② ditto, "I diagram a scala logaritmica," *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XXX, 1905, p.225; ③ ditto, "Principii di Statistica Metodologia," *Biblioteca dell'Economista*, Volume XVIII, Dispensa 1ª, 1905, p.185. ただし，数値の誤りは引用者が訂正した。

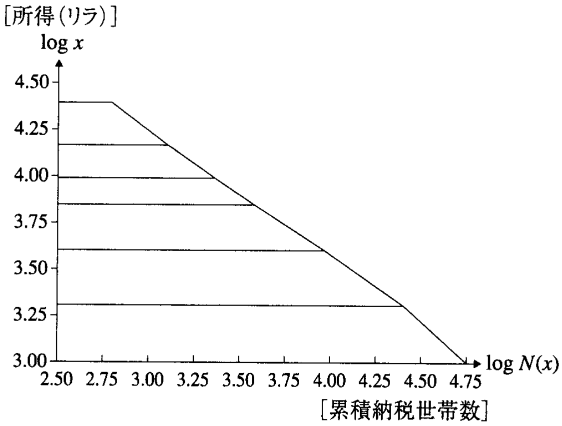

図 2　所得階級別納税世帯数の両対数グラフ
(出所) Benini, Rodolfo, "Principii di Statistica Metodologia," *Biblioteca dell'Economista*, Volume XVIII, Dispensa 1ª, 1905, p.147.

それぞれ対数変換して両対数グラフに描いた(図 2)。そして，そこに描かれた原系列がほぼ直線状であることを確認した。そのことによって，モデルの適合性にかんする確証を得た。

その上で，ベニーニはコーシーの補間法を適用して，所得分布関数を特定した。パレートが援用したコーシーの補間法によれば，(x, $N(x)$) の組における各項の値を対数に変換して，($\log x$, $\log N(x)$) を得，これに

$$\log N(x)=a+b\log x$$

をあてはめたときの勾配 b をもとめることが当面の課題とされている。b は，「横座標にかんする平均偏差 ($\Delta\log x$) の絶対値の合計」で,「縦座標にかんする平均偏差 ($\Delta\log N(x)$) の絶対値の合計」を除したときに得られる商としてあたえられるとするのがコーシーの補間法である。パレートはこの補間法によって所得分布を対数変換したときに得られる一次式の勾配 b をもとめた[8)]。

これにたいして，ベニーニは，平均偏差の合計がゼロになること，すなわち正の平均偏差の合計と負の平均偏差の合計を足せば，ゼロになるということ(正もしくは負の平均偏差のそれぞれの合計の絶対値が等しいこと) に着目した。そして，$\Delta\log x$ については正の平均偏差だけに着目し，他方で，$\Delta\log N(x)$ の平均偏差については着目した正の $\Delta\log x$ と隣り合う項についてその合計をもとめれば(表 2 の平均偏差合計欄の強調数字参照)，パレートがコーシーの補間法を適用したときと同様に，所得分布関数を対数変換して得られ

8) たとえば，Pareto, V., "Il modo di figurare i fenomeni economici (A proposito di un libro del dottor Fornasari)," *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XII, 1896, p.84. [以下 Pareto (1896)]

た一次式の勾配をもとめることができると考えた。この工夫によって，勾配をもとめるときの手間は半減した。以上の手続きによって，ベニーニは，イタリアの所得統計にたいする所得分布関数の勾配 b を

$$b = \frac{1.99585}{-1.37786} = -1.45$$

ともとめた[9]。したがって，もとめるべき所得分布関数は

$$N(x) = \frac{H}{x^{1.45}} \quad (3)$$

となる。

さらに，ベニーニは所得分布関数

$$\log N(x) = \log H - 1.45 \log x \quad (4)$$

が平均$(\overline{\log x},\ \overline{\log N(x)}) = (3.7603,\ 3.7330)$を通ることから，この座標を(4)式に代入して，

$$\log H = 9.1854 \quad (5)$$

を得た。したがって，対数変換したときの所得分布関数は

$$\log N(x) = 9.1854 - 1.45 \log x \quad (6)$$

である。

また，(5)式から

$$H = 1{,}532{,}498{,}259$$

となり，最終的に1887年におけるイタリアの県庁所在地（23都市）における所得分布関数としては得られるのは次式となる。

$$N(x) = \frac{1{,}532{,}498{,}259}{x^{1.45}} \quad (7)$$

(4) パレート・モデルの適合性

ベニーニは，グラフ上に表示される関数関係が放物線（二次式）や双曲線のような曲線で示されるような場合，データとそれにたいするあてはめ線との適合性にかんする判定は，グラフを概観しただけでは困難であると考えた。しかし，直線をあてはめた場合には，データとその直線との間の適合性の判定で欺かれることはありえないと主張した。そして，ベニーニは，対数変換した原系列についてのグラフ（図2）から，所得分布が「ほぼ直線」になっていることを確認した。それにもとづいて，「自然尺度によるグラフ［図1］よりもこのグラフ［図2］によるほうが，統計系列の法則は非常に明白である」と述べ，データとそれにあてはめた所得分布関数との整合性を示唆し，もって，パレート・モデルの有効性がイタリアのデータにおいても確認できると考えた[10]。

しかし，モデルとデータとの適合性をグラフから「明白」に読みとることができるとしても，あてはめた内挿直線（補間式）と原系列との乖離を実測して，それを対照することのほうが，モデルの適合性についての説得力は高まる。このことから，ベニーニは，イタリアの所得分布データにたいしてパレート・モデルをあてはめて得た内挿直線

$$\log N(x) = 9.1854 - 1.45 \log x \quad (6)$$

と原系列との乖離を若干の所得金額について計算し，その結果をモデルと原系列との適合性の論拠としている[11]。ここではそのときに行われたベニーニの計算手続きに沿って，そ

9）パレートの方法では負となる $\Delta\log x$ の符号を正に換え，さらにそれに伴ってその項に隣接する $\Delta\log N(x)$ の符号を逆転させる。そして，$\Delta\log x$ と $\Delta\log N(x)$ の合計を求める（$\Sigma\Delta\log x = 2.75572$，$\Sigma\Delta\log N(x) = 3.9917$）。この結果，求める b は $\frac{\Sigma\Delta\log N(x)}{\Sigma\Delta\log x} = 1.45$ となる。これは，ベニーニの結果と同じである（たとえば，Pareto (1896), pp.84ff.参照）。

10）Benini (1905b), p.146.

11）これと同様趣旨のモデルの適合性にかんする「検証（verificare）」は Benini (1905a), p.225f.にも見ることができる。

表 3　内挿直線［$\log N(x)=9.1854-1.45\log x$］と原系列との適合性テスト

所得（リラ）	納税世帯数*	対数変換後の実測値		理　論　値		乖離	乖離率（%）
x	$N(x)$ (1)	$\log x$	$\log N(x)$	$(\log N(x))'$	$N(x)'$ (2)	$N(x)'-N(x)$ (3) [=(2)−(1)]	(4) [$=\frac{(3)}{(1)}\times 100$]
1,000	59,486	3.00000	4.77441	4.83540	68,454	8,968	15.1
2,000	26,968	3.30103	4.43085	4.39891	25,056	−1,912	−7.1
4,000	9,766	3.60206	3.98972	3.96241	9,171	−595	−6.1
7,000	4,264	3.84510	3.62982	3.61001	4,074	−190	−4.5
10,000	2,397	4.00000	3.37967	3.38540	2,429	32	1.3
15,000	1,310	4.17609	3.11727	3.13007	1,349	39	3.0
25,000	645	4.39794	2.80956	2.80839	643	−2	−0.3

（注＊）所得が左欄の金額以上となる世帯数。
（出所）基礎データの出所は表 2 に同じ。ただし，いずれの強調も引用者による。

の結果を表にまとめることとする（表 3）。

ベニーニは表 3 に示したデータのうち，$x=10{,}000$ リラのときと，$x=25{,}000$ リラのときをとりあげた。そして，コーシーの補間法にもとづく内挿直線があたえる理論値と実測値との間の乖離（表 3 で白抜きした箇所参照）が小さいことを確認して，「計算と観察との差異は非常に小さい」と指摘した。しかし，所得階級の下方限界が下がるにつれて，乖離（および乖離率）が大きくなっている（表 3 (3)(4)欄参照）。ベニーニはこのことを不問に付すことなく，次のように述べている[12]。

> ［計算と観察の間の］より顕著な差異は少額の所得に見られる。だがしかし，ここでは，課税免除の限界の近傍に降るにつれて，首尾よく課税を免れた人々の数が多くなるということに留意したい。したがって，おそらく理論曲線は何らかの仕方でデータ収集時の欠陥をうまく補正してくれるであろう。

要するに，ベニーニの見解は次のようになろう。すなわち，所得階級の下限を下げるにしたがって，当該所得階級に所属するとされる世帯数については，実測値と理論値の間に「顕著な差異」が認められる。しかし，それは，モデルの現実説明力の脆弱性によるものではなく，必要データが不足しているからである。モデルの現実説明力には瑕疵がないばかりか，モデルには欠損データによって把捉しえない現実を復元する力能がある，とベニーニは考えたのである。

以上に見たように，ベニーニは，パレートの所得分布関数をイタリアの所得統計に応用した結果，そのパレート・モデルが現実説明力の点で遜色のないことを主張した。モデルの適合性について，ベニーニは別の点からも統計的に検証している。この項の最後にそのことに触れておく。

すでに述べたように，パレートの所得分布関数は

$$N(x)=\frac{H}{x^{\alpha}} \tag{1}$$

である。ここで所得が x_0 以上の世帯数を $N(x_0)$，x_1 以上の世帯数を $N(x_1)$ とおくと，(8)式と(9)式を得る（ただし，$x_0<x$ とする）。

$$N(x_0)=\frac{H}{x_0^{\alpha}} \tag{8}$$

$$N(x_1)=\frac{H}{x_1^{\alpha}} \tag{9}$$

(8)式と(9)式から

12）Benini (1905b), p.186.

表 4　補間法による世帯数 $N(x_1)$ の理論値
── パレート指数 α が 1.45 のとき ──

基準所得 x_0 (リラ)	所得 x_1 (リラ)						
	1,000	2,000	4,000	7,000	10,000	15,000	25,000
1,000	–	21,773	7,969	3,540	2,111	1,172	559
2,000	–	–	9,871	4,385	2,614	1,452	692
4,000	–	–	–	4,338	2,586	1,437	685
7,000	–	–	–	–	2,542	1,412	673
10,000	–	–	–	–	–	1,331	635
15,000	–	–	–	–	–	–	625
25,000	–	–	–	–	–	–	–
[参考] 世帯数 (実測値)	59,486	26,968	9,766	4,264	2,397	1,310	645

(注) ベニーニが，モデルの適合性を確かめるために計算したのは，白抜きで強調した世帯数 (9,871) と□で囲んだ世帯数 (4,338) だけである。

$$\frac{N(x_0)}{N(x_1)} = \frac{\dfrac{H}{x_0^\alpha}}{\dfrac{H}{x_1^\alpha}}$$

$$= \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^\alpha \qquad (10)$$

を得る。

この(10)式を次のように変形すれば，その含意がより明確になる。

$$N(x_1) = \frac{N(x_0)}{\left(\dfrac{x_1}{x_0}\right)^\alpha} \qquad (11)$$

現実の所得統計は 2,000 リラ以上の所得になる世帯数が 26,968 であることを示している (表 3 (1)欄網掛け数字参照)。さらにまた，これまでの計算からコーシーの補間法は，$\alpha=1.45$ をあたえている。ここで，かりに基準所得 (x_0) を 2,000 リラとすれば，その 2 倍の所得額は 4,000 リラ ($=x_1$) である。

以上から関連データををまとめれば，

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x_0=2,000 \\ x_1=4,000 \end{array}\right\} \therefore \ \dfrac{x_1}{x_0}=2 \\ \alpha=1.45 \\ N(x_0)=26,968 \end{array}\right.$$

となる。これらのデータを(11)式に代入すれば，

$$N(x_1)=9,871$$

となる。実際に 4,000 リラ以上の所得がある世帯数 $N(4,000)$ は 9,766 である (表 3 (1)欄の□で囲んだ数字参照)。

また，$x_0=4,000$，$x_1=7,000$ についてもこのように計算すれば，所得が 7,000 リラを上回る世帯数は 4,338 となる。この計算結果についてベニーニは「計算された数字は観測値 4,264 [表 3 (1)欄の太字による強調数字] とわずかしか異なっていない」と結論した[13]。ベニーニは，これら一連の計算が，一方ではパレート・モデルの適合性を統計的に検証するとともに，他方では内挿直線を特定するための方法としてのコーシーの補間法の有効性を確認するものであると考えた。

ここでは以上に述べたベニーニの方法にならって，さらに計算の範囲を拡張し，その計算結果を一覧に供することにする (表 4)。

13) 観測値 4,264 と対照される 4,338 という理論値は(11)式に関連データを代入して，$\dfrac{9,766}{\left(\dfrac{7,000}{4,000}\right)^{1.45}}$ であたえられる。Cf. Benini (1897), p.180. ただし，ベニーニの計算の誤りは訂正した。

表5　実測値との乖離

基準所得 x_0(リラ)	所得 x_1（リラ）						
	1,000	2,000	4,000	7,000	10,000	15,000	25,000
1,000	−	−5,195	−1,797	−724	−286	−138	−86
2,000	−	−	105	121	217	142	47
4,000	−	−	−	74	189	127	40
7,000	−	−	−	−	145	102	28
10,000	−	−	−	−	−	21	−10
15,000	−	−	−	−	−	−	−20

(注) 乖離は，[理論値−実測値] で求めた。これによって，実測値 [表3(1)欄] にたいする理論値 [(11式) による] の過不足が分かる。

この表の表側は基準となる所得金額（x_0：基準所得）である。表頭は比較される所得金額（x_1）である。表のなかの数字は，コーシーの補間法を適用して得られた α（パレート指数）が1.45である場合に，所得分布モデル [(6)式・(7)式] があたえる世帯数の理論値である。たとえば白抜き数字9,871は，2,000リラ（表側）を基準所得としてその2倍の4,000リラ以上（表頭）の所得を有する世帯に着目したときの，その世帯数にかんする理論値である。また，□で囲んだ数字(4,338) は，4,000リラを基準所得としたときに，所得が7,000リラ以上になる世帯数(理論値) である。

この表4にもとづいて，さらにモデルの適合性にかんする分析を続けるために，理論値が所得階級別の実際の世帯数（実測値）にくらべて，どれだけ乖離しているかを

理論値−実測値

によって調べることにしよう（表5）。

この表5からは，基準所得 x_0 を課税所得最低限度額（1,000リラ）まで下げた場合には，推計の誤りが大きいことが分かる。それにたいして，基準所得 x_0 を引き上げるにしたがって，推計の誤りは減衰する傾向にある。このことは，低額所得世帯数の把捉が正確性に欠けているからであって，モデルの現実説明力の脆弱性を意味するものではないというベニーニの主張を支持しているかのように思われる。

しかし，ベニーニによって利用された統計は，とくに上位の所得階級にかんしてのみパレート・モデルに適合的だったからであって，所得分布が一般にパレート・モデルに従っているということを確証できるかどうかは，解明されたわけではないという反論が成り立ちうる余地はあろう。パレート・モデルの適合性をめぐる問題がその後どのように取り扱われ，論議されたかについては，今後の課題としたい。ここでは，パレートの所得分布関数によるモデル分析法をイタリアの統計学界が受容するにあたって重要な役割を演じたベニーニの所説を確認するにとどめる。そして，項を改めて，パレート指数 α にたいするベニーニの解釈について考察することにしよう。

2．パレート指数 α にかんするベニーニの解釈

(1)　所得分布の不平等度と α の大小

ベニーニは，パレートの所説を全面的に肯定して，受容したわけではない。パレート指数 α の解釈については，パレートとは正反対である。すなわち，パレートは，α の増大が所得分布の不平等性の強化を意味すると述べている[14)]のにたいして，ベニーニは，

14)「h [パレート指数] の値の減少は，所得の不平等性が小さくなる傾向を示していることに注意

それとは逆に α の増大は所得分布がより平等になり，不平等度が弱まったことを意味すると解釈した。このことはすでに述たことであるが，ここではベニーニの言を参照して，彼の見解をさらに読み解くことにする。ベニーニは次のように述べている[15]。

> α の値が大きくなるときには，それぞれの所得等級尺度［所得階級］にいる所有者の減少が急激である。要するに，所得分布の不平等は小さくなる。実際，$\alpha = 2$ のときには，所有者の人数は所得限界度（redditi-limite）の逆数の平方の範囲で変化すると言えるであろう。…………$\alpha = 3$ とすれば，所有者の人数は，所定の所得限界度の逆数の立方に従って変化するであろう。α の値がさらに大きくなれば，低位の所得尺度［所得階級］にいる人々が増加し，もはや［見るべき］納税名義人（titolare）がいなくなってしまうことは明らかであって，経済条件にかんする人口の各階層間の違いはすこぶる軽微になると結論せざるをえない。

このベニーニの主張におけるキーワードは，「所得限界度（redditi-limite）」である。ここでは，この言葉は，基準所得 x_0 と比較所得 x_1 との比$\left(\frac{x_1}{x_0}\right)$を意味する[16]。したがって，これは「所得倍率」と言い直すことができる。この所得倍率は，パレートの所得分布関数から x_0 と x_1 のときの世帯数 $N(x_0)$ と $N(x_1)$ をもとめて誘導した

$$N(x_1) = \frac{N(x_0)}{\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{\alpha}} \tag{11}$$

の右辺の分母に見出すことができる。ここで，上に引用したベニーニによる α についての解釈を理解するために，基準所得を x_0 とする（これは捕捉できる最低限度の所得と考えてもよいが，必ずしもそうである必要はない）。そして，この所得額を上回る任意の所得額 x_1 が基準所得 x_0 の2倍，3倍，……，10倍となっている場合を想定する。すなわち，所得倍率（ベニーニのいわゆる「所得限界度」）が，2，3，……，10であるとする。さらにまた，基準所得以上の所得を有する世帯数 $N(x_0)$ を100とする。このとき，パレート指数 α の値に応じて，所得が x_1 を越える世帯数はどのように変化するかを考えてみた

したい。」(Pareto, V., “La legge della domanda,” *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume X, 1895, p.61.) α が小さいと言うことは，高額所得者数が相対的に少ないことを意味する。上に引用したパレートの見解から，彼は，このような事態をもって不平等度が強まると解釈したと考えられる。このパレートの見解を念頭においてのことと考えられるが，ジーニは次のように述べている。「富者の数が貧者の数に較べて相対的に少ないほど，富の分布がより不平等であると考える人がいる。この根拠は，おそらく，特権をもつ人が少なくなるにつれて，富の不均衡がより強く感じられるという心理学的な考えであろう。」(Gini, Corrado, “Il diverso accrescimento delle classi sociali e la concentrazione della ricchezza,” *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XXXXVIII, 1909, p.69.)

15) Benini (1905b), p.187f. なお，同様趣旨の見解は Benini (1905a), p.227 にも見ることができる。しかし，それよりも早い段階で，α の増大は，「［所得の］限界ないし水準が上昇するにつれて，その限界値以上の所得になる人数が，どの程度，多かれ少なかれ，急激に減少するかを示している」とベニーニは指摘している（Benini (1897), p.178）。

16) ベニーニは redditi-limite を $\frac{x_1}{x_0}$ という比（所得倍率）を表す概念として使っているが，所得階級を $x_0 \sim x_1$, $x_1 \sim x_2$, $x_2 \sim x_3$, ……とするとき，その階級の下限（もしくは上限）と言う意味で redditi-limite が用いられることもある（Bresciani, Costantino, “Sull'interpretazione e comparazione di seriazioni di redditi e di patrimoni,” *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XXXIV, 1907, p.32）。

表6　パレート指数 α と所得階級別人数 $N(x_1)$ との関係 $[N(x_0)=100]$

パレート指数 α	所得倍率 $\left(\frac{x_1}{x_0}\right)$								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.5	70.7	57.7	50.0	44.7	40.8	37.8	35.4	33.3	31.6
1.0	50.0	33.3	25.0	20.0	16.7	14.3	12.5	11.1	10.0
2.0	**25.0**	**11.1**	**6.3**	**4.0**	**2.8**	**2.0**	**1.6**	**1.2**	**1.0**
3.0	12.5	3.7	1.6	0.8	0.5	0.3	0.2	0.1	0.1
4.0	6.3	1.2	0.4	0.2	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0
5.0	**3.1**	0.4	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

い。そのためには，関連データを(11)式に代入すればよい。その結果は次のように表章される（表6）。

上に引用した文章のなかでベニーニは，パレート指数 α が $\alpha=2$ のとき，各々の所得階級の人数は「所得限界度」(所得倍率）の逆数の平方に従って変化すると述べた。表6で強調した箇所から明らかなように，$\alpha=2$ の場合，「所得限界度」(所得倍率）が2であるときの世帯数 $N(x_1)$ は，基準所得 x_0 以上の所得の世帯数 $N(x_0)$ を100とすれば，25.0となっている。これは，100に2（「所得限界度」=所得倍率）の逆数（1/2）の2乗を乗じた値 $[100\times\left(\frac{1}{2}\right)^2]$ に等しい（この「べき［2］」をあたえるのがパレート指数である)。$\alpha=3$ の場合も，同様に考えれば，ベニーニの言わんとすることが理解できる。

以上のような道具立てをしておいて，パレート指数 α についてのベニーニの見解を検討することにしよう。表6から明らかなように，α の値が大きくなるにつれて，所得が基準所得 x_0 から大きく乖離した階層に属す世帯数は減衰する。たとえば，$\alpha=1$ の場合には，基準所得以上の世帯数が100であるとき，基準所得 x_0 の2倍以上の所得を得ている世帯数は50世帯である（基準所得 x_0 の4倍以上の所得があるのは25世帯である)。すなわち，$\alpha=1$ のときには，基準所得の2倍の所得が，基準所得以上の世帯（全世帯と考えてもよい）を2等分しているのである。これにたいして，$\alpha=5$ のときには，基準所得 x_0 の2倍以上の所得を得る世帯数は，全体の3.1%となって，圧倒的大多数の世帯は基準所得からその2倍の所得までの所得階級に集中していることになる。所得 x_0 を基準にして，それぞれの所得階級に属す世帯数を計算すれば，パレート指数 α が大きいほど，それぞれの世帯が所属する所得階級が限定されるようになると言うことができる。すなわち，α が大きいほど，世帯間の所得格差は小さい。このことから，ベニーニは，α が大きいほど，所得の不平等度が減衰すると考えたと解釈することができる。

(2)　α の安定性

① パレート（ベニーニ）の見解

ベニーニはイタリアの県庁が所在する23都市[17]の所得統計（1887年）から $\alpha=1.45$ ともとめた[18]。またパレートはイギリス（1843年）の所得統計から $\alpha=1.50$ ともとめた[19]。そして，パレートは，イギリスについての彼の計算結果とイタリアにかんするベニーニの計算結果を，次のような図で模式的に示した（図3）。

17）脚注7参照。

18）① Benini (1897), p.179; ② Benini (1905a), p. 225; ③ Benini (1905b), p.186.

19）Pareto (1897a), p.309 [Pareto (1942), p.340].

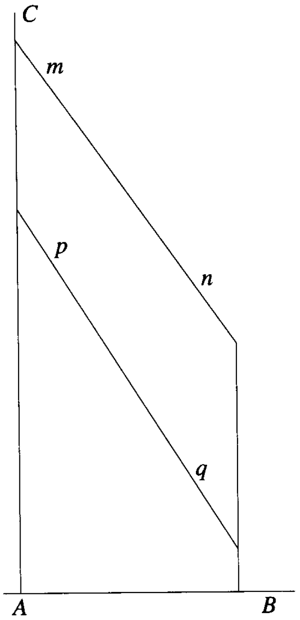

図3　所得分布の模式図

(訳注) 1) 直線 mn はイギリス，pq はイタリア。
2) 横軸 (AB) は人数 (世帯数)。
3) 縦軸 (AC) は所得額。
(出所) Pareto, Vilfredo, *Cours d'Économie Politique*, Tome 2, Lausanne 1897, p.305; ditto, *Corso di Economia Politica*, Secondo Volume, Torino 1942, p.335.

パレートによれば，図3の直線 mn はイギリスを示し，直線 pq はイタリアを示している。通貨単位が異なるので，この図の読み方には注意を要すると述べつつも，パレートは，「直線 mn と pq の形状，ならびに AB にたいするこれらの直線の勾配が，採用された尺度［通貨単位］に依存しない」ことに注目した。そして，次のように指摘した[20]。

> 同一の化学物質は沢山の描き方でその結晶を表現することができる。大きな結晶もあれば，並の大きさの結晶もあり，小さな結晶もあるが，それらの形態は皆，同一である。

さらに，パレートは国（地域）ごとの所得分布について

$$\log N(x) = \log H - \alpha \log x \tag{2}$$

をあてはめて，勾配 α（パレート指数）をもとめた。そして，その値を表7にまとめ，

表7　各国のパレート指数 α

国（地域）		パレート指数 α	国（地域）		パレート指数 α
イギリス	(1843年)	1.50	ペルージャ	(都市部)	1.69
	(1879－80年)	1.35		(郡部)	1.37
プロイセン	(1852年)	1.89	アンコーナ，アレッツォ，パルマ，ピサ	(計)	1.32
	(1876年)	1.72	イタリア23都市[1]		1.45
	(1881年)	1.73	バーゼル	(1887年)	1.24
	(1886年)	1.68	パリ[2]		1.57
	(1890年)	1.60	アウクスブルク	(1471年)	1.43(＊)[3]
	(1894年)	1.60		(1498年)	1.47(＊)
ザクセン	(1880年)	1.58		(1512年)	1.26(＊)
	(1886年)	1.51		(1526年)	1.43(＊)
フィレンツェ		1.41	ペルー	(18世紀末)	1.79(＊)

(訳注) 1) Ancona, Arezzo, Belluno, Bologna, Cuneo, Ferrara, Firenze, Foggia, Grosseto, Mantova, Massa, Modena, Parma, Pavia, Perugia, Pesaro, Pisa, Reggio Emilia, Siena, Sondrio, Treviso, Udine, Vicenza。1887年のデータ。計算はベニーニによる（脚注18参照）。
2) 年不詳。
3) (＊) は「不正確」なデータにもとづくとパレートが注記している数値である。
(出所) Pareto, Vilfredo, *Cours d'Économie Politique*, Tome 2, Lausanne 1897, p.314; ditto, *Corso di Economia Politica*, Secondo Volume, Torino 1942, p.344.

20) Pareto (1897a), p.305 [Pareto (1942), p.335].

「イギリス，アイルランド，ドイツ，イタリア諸都市，ペルーなどのように，経済条件が非常に異なっている地域でもほぼ同一である」ことを確認した[21]。切片 $\log H$ の大きさに違いはありつつも，勾配 α が安定的であることに注目したのである。

そして，ベニーニは，表7からいくつかの国（地域）を抜き取ってパレート指数 α の平均値を計算すれば，それがおよそ1.5になるからであろうか，次のように述べた[22]。

> パレート（『政治経済学教程』第2巻所載の「所得曲線」の章）は……さまざまな地域について，また時を隔てて，所得の分布が同一の単純な法則に従っていることを証明した。言うなれば，[所得の分布が] 対数尺度では明白に直線（sensibilimente retta）になるような描線（linea）で，また自然尺度では双曲線（iperbole）で示されることを証明したのである。その直線の勾配は，その値が1.50のまわりで変動する係数 α によってあたえられる。

② ブレシアーニの見解

ジーニは，パレート指数 α が安定的であるとするパレート（ベニーニ）の見解にたいして，安定的に見えるのは，所得分布の統計的計測指標としての α の感度が低いためであり，別な指標によれば，所得分布が安定的であるとは言いがたいことが分ると批判した。彼は「集中指数（indici di concentrazione)」によってこのことを明らかにしようとした[23]。ジーニの見解については別途検討することとして，ここでは，パレート指数 α によっても，その安定性は確認できないと述べたコスタンチーノ・ブレシアーニの批判[24]を取り上げることにしよう。はじめに，α の解釈についてブレシアーニはベニーニと同様に，α の値が小さいほど，不平等度が強まると考えていることを確認しておく。

ブレシアーニはベニーニの方法（所得分布式 $\log N(x) = \log H - \alpha \log x$ にコーシーの補間法を応用するパレートの手法）を適用した。そして，プロイセン王国（1902年），ザクセン王国（1898年），オーストリア帝国（1898年），バーデン大公国（1898年），ヘッセン選侯国（1898－99年）の所得統計にもとづいて，パレート指数 α を計算した。上記のいずれの国についても類似した傾向が見られるので，ここでは地域区分がもっとも詳細に表章されているプロイセンだけを引用する。

表8の左側に記載した地域は「際だった工業的性格を色濃く」もっている。これにたいして，右側の地域は「農業的性格が強い」。地域的特性をこのように規定した上で，ブレ

21) Pareto (1897a), p.312 [Pareto (1942), p.344].

22) Benini (1905a), p.226f. ベニーニが抜き出した α の値は，イギリス（1879年，1.35），プロイセン（1894年，1.60），ザクセン（1886年，1.51），バーゼル（1887年，1.24），イタリア諸都市（1887年，1.45），パリ（現在 [1905年]，1.42），パリ（1292年，1.32），アウクスブルク（1498年，1.47），ペルー（18世紀末，1.79）の9個である（パリについてはパレートの原表 [表7] とは異なっている）。これらの α の平均は，1.46となる。確かにパレートは α が安定的であると主張してはいるが，α の安定的結果が数値的に特定されて，それが1.5であると主張したのは，ベニーニであろう。

23) Gini, C., "Indici di concentrazione e di dipendenza," *Atti della Società Italiano per il Progresso delle Scienze, Terza Ruinione, Padova, Settembre 1909*, Roma 1910. なお，木村和範「ジーニの集中指数」『開発論集』（北海学園大学）第74号　2004年も参照。

24) Bresciani, C., "Dell'influenza de le condizioni economiche sulla forma della curva dei redditi," *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda Volume XXXI, 1905 [以下 Bresciani (1905)].

表8　プロイセン王国（1902年）の地域別パレート指数

都市部	1.441	郡部	1.647
ブランデンブルク	1.390	西プロイセン	1.839
ライン州	1.462	ポメラニア	1.779
ウェストファリア	1.532	東プロイセン	1.768
		ポーゼン	1.670

（出所）Bresciani, Costantino, “Dell’influenza de le condizioni economiche sulla forma della curva dei redditi,” *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XXXI, 1905, p.118.

シアーニは次のように述べている[25]。

> αの値（所得曲線の形状）にたいする経済体制の影響はこの数字から明白である。このことは，完全に一致して，また完全なる規則性をもって，工業的要因の影響が優勢なところではどこでも，すなわち資本主義経済が急速に進展しているところでは，個々の階級の納税者の分布はより不平等になることを示している。

さらにまた，ブレシアーニは，プロイセン，ザクセン，オーストリアの都市について人口規模別にαの値を計算した。そして，いずれの国においても「人口が増大するにつれて，驚くべき規則性をもって，αが小さくなる」傾向を確認した（表9）。

ブレシアーニは，人口集中が工業化（資本主義化）の進展を反映するものであると述べ，このことが，資本主義の発展に伴って所得分布はより不平等になるという先の主張を補強していると考えた。彼は，資本主義の発展テンポと所得分布の変化の関係を統計的に検証し，もって所得分布が一般に「人間の本性(natura dell’umo)」に規定されるというパレートの見解[26]を批判したのである。

表9　人口規模別パレート指数

国	人口（人）	パレート指数α
プロイセン	25,000－ 50,000	1.70
	50,000－100,000	1.566
	100,000－200,000	1.386
	200,000以上	1.301
ザクセン	200,000以上	1.333
オーストリア	100,000－200,000	1.444
	ウィーン	1.423

（出所）Bresciani, Costantino, “Dell’influenza de le condizioni economiche sulla forma della curva dei redditi,” *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XXXI, 1905, p. 121.

む す び

一般に，所得分布関数による所得分布の研究はパレートに始まり，それがジーニによる検討を経て，ジブラ[27]に至ったと言われている[28]。ジーニに限定して見ると，所得分布の研究は，パレート理論の批判的検討を経て，ジーニ指数（集中指数）に結実した。さらに，その後，いわゆるジーニ係数が構想されるようになった。この一連のジーニの研究を触発したのがベニーニであった。ベニーニは，ジーニに先んじて，パレート理論を検討し，所得分布モデルの構築から（コーシーの補間

25）Bresciani (1905), p.119.
26）「[富の分布という] 現象の主たる原因は，人間の本性のなかにもとめられるべきである。」(Pareto (1897a), p.304 [Pareto (1942), p.334].) なお，同様趣旨の発言については以下も参照。Pareto, V., “Aggiunta allo studio sulla curva delle entrate,” *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XIV, 1897 [Pareto (1897b)].
27）Gibrat, R., *Les inégalités économiques*, Paris 1931.
28）高山憲之「分配」『経済学大辞典　I』（第2版）　東洋経済新報社　1980年　p.474。

法の適用による）パレート指数 α の数値的特定にいたる一連の手法の全体を受容して，イタリアの統計学界にパレート理論を普及させた。その意味でベニーニは，理論史上ではパレートとジーニをつなぐ環としての位置にいる。

本稿では，パレートの所得分布関数による所得分析がイタリアに受容されるにあたって，このように小さくない役割を演じたベニーニの見解を紹介・論評してきた。その検討から明らかになったことは，ベニーニはパレートによるこの分野の研究を基本的には肯定的にかつ高く評価しているということである。内容的に言えば，いわゆるパレート法則の受容（ただし，α の解釈を除く）とコーシーの補間法の援用の点で，ベニーニは，パレートとジーニとを結びつける位置にいる。ところが，その反面で，ベニーニは，パレート指数 α の解釈についてはパレートとは正反対の見解に立っている。ベニーニは，パレート指数 α の解釈をめぐる論点を特記し，パレートを名指しで批判することは回避している。ベニーニの著作を通じてパレートを学ぼうとする者は，パレートがあたかも

α の増大＝所得分布の均等化

と考えているのではないかと，誤解しかねない。それほどまでにベニーニによるパレート批判は深い慎みの姿勢を保持して行われているかのように思われる。1930年代になってもパレート指数の解釈をめぐっては論議が重ねられているが[29]，ベニーニはこの種の問題を，パレートの見解が公表された当時において検討した。その意味から言えば，ベニーニはパレート理論をイタリアの統計学界に導入し，ジーニの先行研究者となっただけでなく，パレート理論の基本性格をめぐる論点を，早い段階で取り上げた理論家の一人と位置づけることができる。

29) Cf. ① Bresciani-Turroni, Costantino., “On Pareto’s Law,” *JRSS*, Vol. 100, Pt. 3, 1937; ② ditto, “Annual Survey of Statistical Data: Pareto’s Law and the Index of Inequality of Incomes,” *Econometirica*, Vol. 7, 1939. なお，この論文の著者は，表8，表9，脚注16, 24, 25で取り上げたCostantino Brescianiと同一人物である。

［付記］本稿の執筆にあたっては日本学術振興会から研究助成（2002［平成14］年度～2004［平成16］年度）を受けている（機関番号：30107，研究種目：基盤(B)(2)，課題番号：14402031，研究代表者：池田均北海学園大学経済学部教授）。