タイトル	ジニ係数の2時点間変化の寄与度分解にかんする試論
著者	木村，和範；KIMURA，Kazunori
引用	北海学園大学学園論集(185)：13-22
発行日	2021-07-26

ジニ係数の２時点間変化の寄与度分解にかんする試論

木　村　和　範*

はじめに

昇順に配列した世帯所得の系列を m 個の階級に分割する（世帯総数は N，階級別世帯数は n_j，全世帯の所得総額は E，階級別所得額は E_j）。第 j 階級の世帯割合を $x_j\left(=\dfrac{n_j}{N}\right)$，所得割合を $y_j\left(=\dfrac{E_j}{E}\right)$ とする（簡単のために，$x_j>0$，$y_j>0$ とする）。そして，第 j 階級までの世帯割合の累積相対度数を $\mathfrak{p}_j\left(=\sum_{i=1}^{j}x_i\right)$，所得割合の累積相対度数を $\mathfrak{q}_j\left(=\sum_{i=1}^{j}y_i\right)$ とする。このとき，単一時点におけるジニ係数は次式であたえられる。

$$G=1-\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_{j-1})(\mathfrak{q}_j-\mathfrak{q}_{j-1}) \tag{1}$$

基準時点(0)から比較時点(t)までの２時点間におけるジニ係数の変化(ΔG)は，別稿[(1)]で誘導したように，世帯割合変動効果と所得割合変動効果の２つの効果（要因）に分解さ

*本学名誉教授

（1）木村和範「ジニ係数の２時点間変化にかんする要因分解」『経済論集』（北海学園大学）第 69 巻第 1 号（合併号），2021 年 6 月。

れ，次式であたえられる。

$$\Delta G = {}^{t}G - {}^{0}G$$
$$= {}^{t}\left[1-\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_{j-1})(\mathfrak{q}_j-\mathfrak{q}_{j-1})\right] - {}^{0}\left[1-\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_{j-1})(\mathfrak{q}_j-\mathfrak{q}_{j-1})\right]$$
$$= \overbrace{\sum_{i=1}^{m} v_i \cdot \Delta x_i}^{\text{世帯割合変動効果}} + \overbrace{\sum_{i=1}^{m} w_i \cdot \Delta y_i}^{\text{世帯割合変動効果}} \qquad (2)$$

ただし，$v_i = \bar{y}_i - 2\bar{\mathfrak{q}}_i$，$w_i = 2\bar{\mathfrak{p}}_i - \bar{x}_i - 2$,

ここに, $\bar{x}_i = \frac{1}{2}({}^{t}x_i + {}^{0}x_i)$, $\bar{y}_i = \frac{1}{2}({}^{t}y_i + {}^{0}y_i)$,

$\bar{\mathfrak{p}}_i = \frac{1}{2}({}^{t}\mathfrak{p}_i + {}^{0}\mathfrak{p}_i)$，$\bar{\mathfrak{q}}_i = \frac{1}{2}({}^{t}\mathfrak{q}_i + {}^{0}\mathfrak{q}_i)$

本稿では，ジニ係数の2時点間変化にたいしては，(2)式とは異なる分解式があることを述べる。

1．単一時点におけるジニ係数(G)の分解式(2)

(1) 一般形

単一時点におけるジニ係数（(1)式）は以下のように2通りに分解することができる。

① 世帯割合(x_j)に着目した分解式

ジニ係数は次式であたえられる。

$$G = 1 - \sum_{i=1}^{m} \zeta_i \cdot x_i \qquad (3)$$

$$\text{ただし，} \zeta_i = y_i + \sum_{k=i-1}^{m} 2y_k \qquad (4)$$

なお，所得割合は一般に正($y_i > 0$)としたので，$\zeta_i > 0$である。

② 所得割合(y_j)に着目した分解式

ジニ係数は次式であたえられる。

$$G = 1 - \sum_{i=1}^{m} \eta_i \cdot y_i \qquad (5)$$

$$\text{ただし，} \eta_i = x_i + \sum_{k=i+1}^{m} 2x_k \qquad (6)$$

なお，世帯割合は一般に正($x_i > 0$)としたので，$\eta_i > 0$である。

(2) 特殊形

所得分布がm個の等分位階級に区分されている場合,ジニ係数は次式であたえられる。

$$G = 1 - \sum_{i=1}^{m} \nu_i \cdot y_i \qquad (7)$$

$$\text{ただし，} \nu_i = \frac{2m - 2i + 1}{m} \qquad (8)$$

なお，$m \geq i$であるから，$\nu_i > 0$である。

2．2時点間変化（ΔG）の分解式

(1) 一般形

① 世帯割合(x_j)に着目した分解式

ジニ係数の2時点間変化は，(3)式により以下のようになる。

$$\Delta G = {}^{t}G - {}^{0}G$$
$$= {}^{t}\left[1 - \sum_{i=1}^{m} \zeta_i \cdot x_i\right] - {}^{0}\left[1 - \sum_{i=1}^{m} \zeta_i \cdot x_i\right] \qquad (9)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} (-{}^{t}\zeta_i \cdot {}^{t}x_i + {}^{0}\zeta_i \cdot {}^{0}x_i)$$

(2) 木村和範「ジニ係数の分解」『経済論集』（北海学園大学）第68巻第3・4号，2021年3月。

したがって，ΔG にたいする第 j 階級の寄与度（${}_{\Delta G(x_j)}C_j$）は，

$$ {}_{\Delta G(x_j)}C_j = -{}^t\zeta_j \cdot {}^t x_j + {}^0\zeta_j \cdot {}^0 x_j \gtreqless 0 \qquad (10) $$

ただし，等号の成立条件は

$$ \frac{{}^t x_j}{{}^0 x_j} = \frac{1}{\dfrac{{}^t\zeta_j}{{}^0\zeta_j}} \quad (\because\ \zeta_j>0,\ x_j>0) $$

である[(3)]。${}_{\Delta G(x_j)}C_j>0$ のとき（${}^t\zeta_j \cdot {}^t x_j < {}^0\zeta_j \cdot {}^0 x_j$），第 j 階級は ΔG を押し上げ，${}_{\Delta G(x_j)}C_j<0$ のとき（${}^t\zeta_j \cdot {}^t x_j > {}^0\zeta_j \cdot {}^0 x_j$），第 j 階級は ΔG を押し下げる。(10) 式において等号が成立して，${}_{\Delta G(x_j)}C_j=0$ のとき（${}^t\zeta_j \cdot {}^t x_j = {}^0\zeta_j \cdot {}^0 x_j$），第 j 階級は ΔG にたいして影響をあたえない（このとき世帯割合の増加率（${}^t x_j/{}^0 x_j$）は，ウェイトの増加率（${}^t\zeta_j/{}^0\zeta_j$）の逆数に等しい）。

② 所得割合（y_j）に着目した分解式

ジニ係数の２時点間変化は，(5)式により以下のようになる。

$$ \begin{aligned} \Delta G &= {}^t G - {}^0 G \\ &= {}^t\left[1-\sum_{i=1}^{m}\eta_i \cdot y_i\right] - {}^0\left[1-\sum_{i=1}^{m}\eta_i \cdot y_i\right] \qquad (11) \\ &= -\sum_{i=1}^{m}{}^t\eta_i \cdot {}^t y_i + \sum_{i=1}^{m}{}^0\eta_i \cdot {}^0 y_i \end{aligned} $$

したがって，ΔG にたいする第 j 階級の寄与度（${}_{\Delta G(y_j)}C_j$）は，

$$ {}_{\Delta G(y_j)}C_j = -{}^t\eta_j \cdot {}^t y_j + {}^0\eta_j \cdot {}^0 y_j \gtreqless 0 \qquad (12) $$

ただし，等号の成立条件は

$$ \frac{{}^t y_j}{{}^0 y_j} = \frac{1}{\dfrac{{}^t\eta_j}{{}^0\eta_j}} \quad (\because\ \eta_j>0,\ y_j>0) $$

である[(4)]。${}_{\Delta G(y_j)}C_j>0$ のとき（${}^t\eta_j \cdot {}^t y_j < {}^0\eta_j \cdot {}^0 y_j$），第 j 階級は ΔG を押し上げ，${}_{\Delta G(y_j)}C_j<0$ のとき（${}^t\eta_j \cdot {}^t y_j > {}^0\eta_j \cdot {}^0 y_j$），第 j 階級は ΔG を押し下げる。(12) 式において等号が成立して，${}_{\Delta G(y_j)}C_j=0$ のとき（${}^t\eta_j \cdot {}^t y_j = {}^0\eta_j \cdot {}^0 y_j$），第 j 階級は ΔG にたいして影響をあたえない（このとき所得割合の増加率（${}^t y_j/{}^0 y_j$）は，ウェイトの増加率（${}^t\eta_j/{}^0\eta_j$）の逆数の符号を反転させた値に等しい）。

(2) 特殊形

所得分布が m 個の等分位階級に区分されているとき，ジニ係数の２時点間変化は，

$$ G = 1-\sum_{i=1}^{m}\nu_i \cdot y_i \qquad (7)［再掲］ $$

$$ \text{ただし，}\ \nu_i = \frac{2m-2i+1}{m} \qquad (8)［再掲］ $$

により，次のようになる。

$$ \begin{aligned} \Delta G &= {}^t\left[1-\sum_{i=1}^{m}\nu_i \cdot y_i\right] - {}^0\left[1-\sum_{i=1}^{m}\nu_i \cdot y_i\right] \\ &= {}^t\left[1-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{2m-2i+1}{m}\right)y_i\right] - {}^0\left[1-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{2m-2i+1}{m}\right)y_i\right] \end{aligned} $$

(3) 仮設した基礎データ（付表 A(1)，B(1)）への(10)式の応用結果は付表１であり，付図１はそれを図示した。第 j 階級の寄与度（${}_{\Delta G(x_j)}C_j$）と Δx との間には，負の相関がある（$r=-0.7184$）。
(4) 仮設した基礎データ（付表 A(1)，B(1)）への(12)式の応用結果は付表２であり，付図２はそれを図示した。第 j 階級の寄与度（${}_{\Delta G(y_j)}C_j$）と Δy との間には，負の相関がある（$r=-0.8229$）。

$$=-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{2m-2i+1}{m}\right){}^{t}y_i+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{2m-2i+1}{m}\right){}^{0}y_i \qquad (13)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{2i-2m-1}{m}\right){}^{t}y_i-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{2i-2m-1}{m}\right){}^{0}y_i$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{2i-2m-1}{m}\right)\Delta y_i$$

したがって，ΔG にたいする第 j 階級の寄与度（${}_{\Delta G(y_j)}C_j$）は，以下のようになる(5)。

$$_{\Delta G(y_j)}C_j=\left(\frac{2j-2m-1}{m}\right)\Delta y_j \qquad (14)$$

ここに，

$$1\leq j\leq m$$

であるから，

$$\frac{2j-2m-1}{m}<0$$

である。${}_{\Delta G(y_j)}C_j>0$ のとき（$\Delta y_j<0$），第 j 階級は ΔG を押し上げ，${}_{\Delta G(y_j)}C_j<0$ のとき（$\Delta y_j>0$），第 j 階級は ΔG を押し下げる。(12)式において等号が成立して，${}_{\Delta G(y_j)}C_j=0$ のとき（$\Delta y_j=0$），第 j 階級は ΔG にたいして影響をあたえない。

む　す　び

本稿における考察は以下のように要約される。ジニ係数の2時点間変化（ΔG）にたいする第 j 階級の寄与度は，所得分布が m 個の等分位階級に区分されている場合は，次式であたえられる（特殊形）。

$$_{\Delta G(y_j)}C_j=\left(\frac{2j-2m-1}{m}\right)\Delta y_j \qquad (14)$$

他方で，所得分布が等分位階級に区分されていない場合，Δx_j に着目するとき，ΔG にたいする第 j 階級の寄与度（${}_{\Delta G(x_j)}C_j$）は，

$$_{\Delta G(x_j)}C_j=-{}^{t}\zeta_j\cdot{}^{t}x_j+{}^{0}\zeta_j\cdot{}^{0}x_j\gtreqless 0 \quad (10)[再掲]$$

$$ただし，\zeta_j=y_j+\sum_{k=j-1}^{m}2y_k$$

であり，Δy_j に着目するときの寄与度（${}_{\Delta G(y_j)}C_j$）は

$$_{\Delta G(y_j)}C_j=-{}^{t}\eta_j\cdot{}^{t}y_j+{}^{0}\eta_j\cdot{}^{0}y_j\gtreqless 0 \quad (12)[再掲]$$

$$ただし，\eta_j=x_j+\sum_{k=j+1}^{m}2x_k$$

である（一般形）。

一般形と特殊形のいずれにおいても，階級

(5) 等区分数（m）を $m=5$ とした基礎データ（付表A(2)，B(2)）への(14)式の応用結果が付表3であり，付図3はそれを図示した。第 j 階級の寄与度（${}_{\Delta G(y_j)}C_j$）と Δy_j とは，負の相関関係にある（$r=-0.9504$）。なお，Δy_j はウェイト$\left(\frac{2j-2m-1}{m}\right)$とも，負の相関関係にあるが（$r=-0.8560$），この値が -1 でないということから，第1五分位の寄与度が最大で，以後，階級の順に小さくなるとは言えないことが分る（付図3）。

別寄与度の総和は，ジニ係数の２時点間変化(ΔG)に等しい。階級別寄与度が正のとき，その階級はΔGを押し上げ，負のときは，押し下げる。

（2021 年 3 月 22 日提出）

付表

付表 A(1)　基礎データ（基準時点）（その１）

階級番号	世帯所得	世帯数($^{0}n_j$)	所得計($^{0}E_j$)	相対度数	
				世帯割合($^{0}x_j=\frac{^{0}n_j}{^{0}N}$)	所得割合($^{0}y_j=\frac{^{0}E_j}{^{0}E}$)
第 1 階級	1	2	2	0.0800	0.0146
第 2 階級	2	3	6	0.1200	0.0438
第 3 階級	3	3	9	0.1200	0.0657
第 4 階級	4	2	8	0.0800	0.0584
第 5 階級	5	2	10	0.0800	0.0730
第 6 階級	6	3	18	0.1200	0.1314
第 7 階級	7	3	21	0.1200	0.1533
第 8 階級	8	2	16	0.0800	0.1168
第 9 階級	9	3	27	0.1200	0.1971
第 10 階級	10	2	20	0.0800	0.1460
合　計（全階級）		$^{0}N=25$	$^{0}E=137$	1.0000	1.0000

（注）世帯所得の単位は 100 万円，世帯数の単位は 1 戸。

付表 B(1)　基礎データ（比較時点）（その１）

階級番号	世帯所得	世帯数($^{t}n_j$)	所得計($^{t}E_j$)	相対度数	
				世帯割合($^{t}x_j=\frac{^{t}n_j}{^{t}N}$)	所得割合($^{t}y_j=\frac{^{t}E_j}{^{t}E}$)
第 1 階級	1	6	6	0.2000	0.0395
第 2 階級	2	4	8	0.1333	0.0526
第 3 階級	3	2	6	0.0667	0.0395
第 4 階級	4	3	12	0.1000	0.0789
第 5 階級	5	2	10	0.0667	0.0658
第 6 階級	6	1	6	0.0333	0.0395
第 7 階級	7	2	14	0.0667	0.0921
第 8 階級	8	4	32	0.1333	0.2105
第 9 階級	9	2	18	0.0667	0.1184
第 10 階級	10	4	40	0.1333	0.2632
合　計（全階級）		$^{t}N=30$	$^{t}E=152$	1.0000	1.0000

（注）世帯所得の単位は 100 万円，世帯数の単位は 1 戸。

付表Ａ(2)　基礎データ（基準時点）（その２）（五分位区分）

階級番号	世帯所得	世帯数(^0n_j)	所得計(^0E_j)	相対度数	
				世帯割合($^0x_j=\frac{^0n_j}{^0N}$)	所得割合($^0y_j=\frac{^0E_j}{^0E}$)
第１五分位	～2	5	8	0.2000	0.0584
第２五分位	3～4	5	17	0.2000	0.1241
第３五分位	5～6	5	28	0.2000	0.2044
第４五分位	7～8	5	37	0.2000	0.2701
第５五分位	9～	5	47	0.2000	0.3431
合　計（全分位）		25	137	1.0000	1.0000

（注）世帯所得の単位は 100 万円，世帯数の単位は１戸。

付表Ｂ(2)　基礎データ（比較時点）（その２）（五分位区分）

階級番号	世帯所得	世帯数(^tn_j)	所得計(^tE_j)	相対度数	
				世帯割合($^tx_j=\frac{^tn_j}{^tN}$)	所得割合($^ty_j=\frac{^tE_j}{^tE}$)
第１五分位	～1	6	6	0.2000	0.0395
第２五分位	2～3	6	14	0.2000	0.0921
第３五分位	4～6	6	28	0.2000	0.1842
第４五分位	7～8	6	46	0.2000	0.3026
第５五分位	9～	6	58	0.2000	0.3816
合　計（全分位）		30	152	1.0000	1.0000

（注）世帯所得の単位は 100 万円，世帯数の単位は１戸。

付表 1　ジニ係数の 2 時点間変化にかんする寄与度分解（その 1）

			全階級	第 1 階級	第 2 階級	第 3 階級
${}^t\zeta_j$	(1)			0.0395	0.1316	0.2237
${}^t x_j$	(2)			0.2000	0.1333	0.0667
${}^t\zeta_j \cdot {}^t x_j$	(3)	(1) × (2)		0.0079	0.0175	0.0149
${}^0\zeta_j$	(4)			0.0146	0.0730	0.1825
${}^0 x_j$	(5)			0.0800	0.1200	0.1200
${}^0\zeta_j \cdot {}^0 x_j$	(6)	(4) × (5)		0.0012	0.0088	0.0219
Δx	(7)	(2) − (4)		0.1200	0.0133	−0.0533
${}_{\Delta G(x_j)}C_j$	(8)	− (3) + (6)		−0.0067	−0.0088	0.0070
ΔG	(9)	Σ(8)	0.0713			

（注）　${}_{\Delta G(x_j)}C_j = -{}^t\zeta_j \cdot {}^t x_j + {}^0\zeta_j \cdot {}^0 x_j$（ただし，$\zeta_j = y_j + \sum_{k=j-1}^{m} 2y_k$）。$G = 1 - \sum_{i=1}^{m} \zeta_i \cdot x_i$　により，${}^tG=0.3662$，${}^0G=0.2949$。Δx と寄与度の相関係数：−0.7184。

（出所）　付表 A(1)，B(1)

付表 2　ジニ係数の 2 時点間変化にかんする寄与度分解（その 2）

			全階級	第 1 階級	第 2 階級	第 3 階級
${}^t\eta_j$	(1)			1.8000	1.4667	1.2667
${}^t y_j$	(2)			0.0395	0.0526	0.0395
${}^t\eta_j \cdot {}^t y_j$	(3)	(1) × (2)		0.0711	0.0772	0.0500
${}^0\eta_j$	(4)			1.9200	1.7200	1.4800
${}^0 y_j$	(5)			0.0146	0.0438	0.0657
${}^0\eta_j \cdot {}^0 y_j$	(6)	(4) × (5)		0.0280	0.0753	0.0972
Δy	(7)	(2) − (4)		0.0249	0.0088	−0.0262
${}_{\Delta G(y_j)}C_j$	(8)	− (3) + (6)		−0.0430	−0.0019	0.0472
ΔG	(9)	Σ(8)	0.0713			

（注）　${}_{\Delta G(y_j)}C_j = -{}^t\eta_j \cdot {}^t y_j + {}^0\eta_j \cdot {}^0 y_j$（ただし，$\eta_j = x_j + \sum_{k=j+1}^{m} 2x_k$）。$G = 1 - \sum_{i=1}^{m} \eta_i \cdot y_i$　により，${}^tG=0.3662$，${}^0G=0.2949$。Δy と寄与度の相関係数：−0.8229。

（出所）　付表 A(1)，B(1)

付表 3　ジニ係数の 2 時点間変化にかんする寄与度分解（その 3）

			全分位	第 1 五分位	第 2 五分位	第 3 五分位
$\frac{2j-2m-1}{m}$	(1)			−1.8000	−1.4000	−1.0000
${}^t y_j$	(2)			0.0395	0.0921	0.1842
${}^0 y_j$	(3)			0.0584	0.1241	0.2044
Δy_j	(4)	(2) − (3)		−0.0189	−0.0320	−0.0202
${}_{\Delta G(y_j)}C_j$	(5)	(1) × (4)		0.0341	0.0448	0.0202
ΔG	(6)	Σ(5)	0.0718			

（注）　${}_{\Delta G(y_j)}C_j = \left(\frac{2j-2m-1}{m}\right)\Delta y_j$。$G = 1 - \sum_{i=1}^{m} \nu_i \cdot y_i$（ただし，$\nu_i = \frac{2m-2i+1}{m}$）により，${}^tG=0.3579$，${}^0G=0.2861$。$\Delta y$ と寄与度の相関係数：−0.9504。

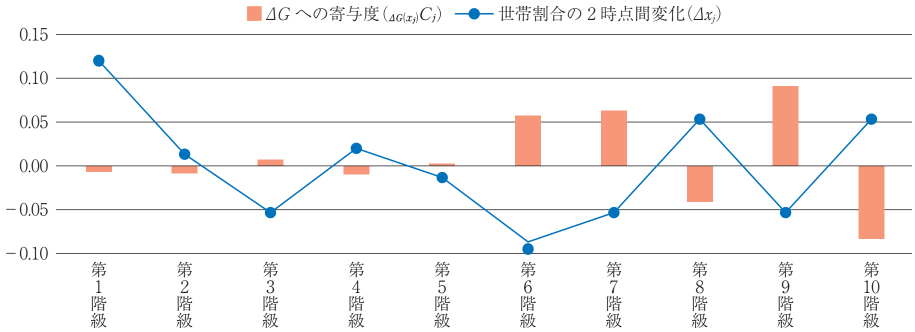
（出所）　付表 A(2)，B(2)

第４階級	第５階級	第６階級	第７階級	第８階級	第９階級	第10階級
0.3421	0.4868	0.5921	0.7237	1.0263	1.3553	1.7368
0.1000	0.0667	0.0333	0.0667	0.1333	0.0667	0.1333
0.0342	0.0325	0.0197	0.0482	0.1368	0.0904	0.2316
0.3066	0.4380	0.6423	0.9270	1.1971	1.5109	1.8540
0.0800	0.0800	0.1200	0.1200	0.0800	0.1200	0.0800
0.0245	0.0350	0.0771	0.1112	0.0958	0.1813	0.1483
0.0200	−0.0133	−0.0867	−0.0533	0.0533	−0.0533	0.0533
−0.0097	0.0026	0.0573	0.0630	−0.0411	0.0910	−0.0833

第４階級	第５階級	第６階級	第７階級	第８階級	第９階級	第10階級
1.1000	0.9333	0.8333	0.7333	0.5333	0.3333	0.1333
0.0789	0.0658	0.0395	0.0921	0.2105	0.1184	0.2632
0.0868	0.0614	0.0329	0.0675	0.1123	0.0395	0.0351
1.2800	1.1200	0.9200	0.6800	0.4800	0.2800	0.0800
0.0584	0.0730	0.1314	0.1533	0.1168	0.1971	0.1460
0.0747	0.0818	0.1209	0.1042	0.0561	0.0552	0.0117
0.0206	−0.0072	−0.0919	−0.0612	0.0937	−0.0787	0.1172
−0.0121	0.0203	0.0880	0.0367	−0.0562	0.0157	−0.0234

第４五分位	第５五分位
−0.6000	−0.2000
0.3026	0.3816
0.2701	0.3431
0.0326	0.0385
−0.0195	−0.0077

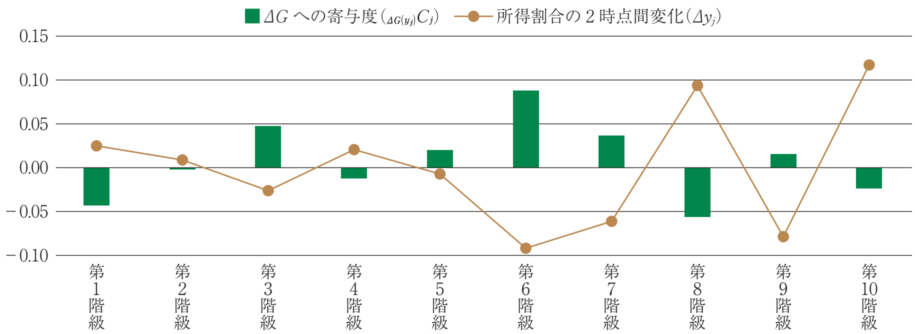
付図



付図 1　ΔG への寄与度（$_{\Delta G(x_j)}C_j$）と世帯割合の 2 時点間変化（Δx_i）

$r = -0.7184$

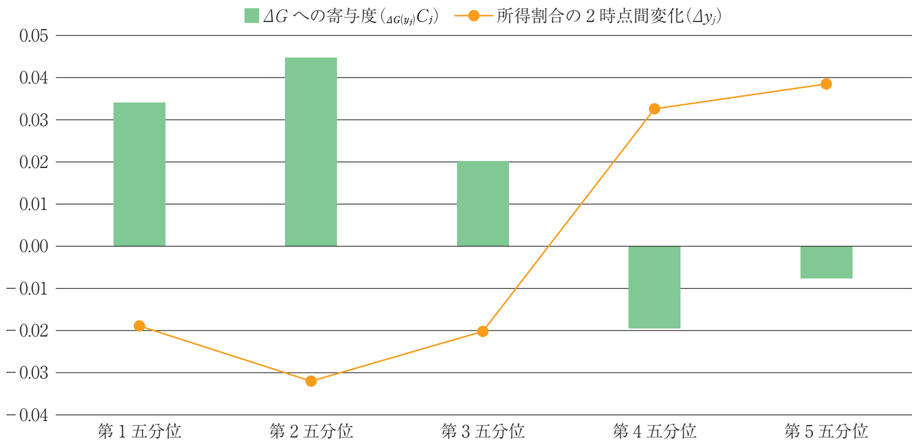
（出所）付表 1



付図 2　ΔG への寄与度（$_{\Delta G(y_j)}C_j$）と所得割合の 2 時点間変化（Δy_i）

$r = -0.8229$

（出所）付表 2



付図 3　ΔG への寄与度（$_{\Delta G(y_j)}C_j$）と所得割合の 2 時点間変化（Δy_i）（等区分の場合）

$r = -0.9504$

（出所）付表 3