タイトル	ジニ係数の2時点間変化にかんする要因分解
著者	木村，和範；KIMURA，Kazunori
引用	季刊北海学園大学経済論集，69(1)：1-18
発行日	2021-06-30

《論説》

ジニ係数の２時点間変化にかんする要因分解

木　村　和　範*

は じ め に

昇順に並べた世帯所得で構成される統計系列を m 個の階級に分割する（全世帯数を N, その所得総額を E とする)。第 j 階級の世帯数を n_j, その階級の所得額を E_j とする。第 j 階級の世帯割合（世帯シェア）を $x_j\left(=\dfrac{n_j}{N}\right)$ とし，所得割合（所得シェア）を $y_j\left(=\dfrac{E_j}{E}\right)$ とすると，第 j 階級までの累積相対度数 $(\mathfrak{p}_j, \mathfrak{q}_j)$ は

$$\begin{cases} \mathfrak{p}_j=\sum_{i=1}^{j} x_i & (1) \\ \mathfrak{q}_j=\sum_{i=1}^{j} y_i & (2) \end{cases}$$

である。関彌三郎はこのことに着目し，基準時点 (0) と比較時点 (t) におけるジニ係数 $({}^0G, {}^tG)$ の２時点間変化 $(\varDelta G={}^tG-{}^0G)$ を，世帯割合 (x_j) と所得割合 (y_j) の２時点間変化 $(\varDelta x_j, \varDelta y_j)$ によって，

$$\varDelta G=-\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{v}_i\cdot\varDelta x_i+\mathfrak{w}_i\cdot\varDelta y_i)$$

ただし，$\mathfrak{v}_i=2\bar{\mathfrak{q}}_i-\bar{y}_i$, $\mathfrak{w}_i=2-(2\bar{\mathfrak{p}}_i-\bar{x}_i)$

---

*　本学名誉教授

と分解した(1)。

本稿では，ΔG を2つの積和の和に分解して

$$\Delta G=\sum_{i=1}^{m} v_i \cdot \Delta x_i+\sum_{i=1}^{m} w_i \cdot \Delta y_i$$

$$\text{ただし，}\ v_i=\bar{y}_i-2\bar{\mathfrak{q}}_i,\ w_i=2\bar{\mathfrak{p}}_i-\bar{x}_i-2$$

という形式の分解式を誘導し，この分解式の数学的性質を明らかにするとともに，これを仮設的数値(2)に応用する。

階級別の世帯割合と所得割合は，その両方もしくはいずれか一方がゼロであることもあるが，以下では，簡単のために

$$\begin{cases} x_j>0 & (3) \\ y_j>0 & (4) \end{cases}$$

とする。

1．分解式

(1)　一般形

ジニ係数の2時点間変化を世帯割合と所得割合の2時点間変化に分解するとき，関は

$$G=1-\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1})(\mathfrak{q}_i+\mathfrak{q}_{i-1}) \tag{5}$$

から始めた。本稿も関に倣うが，誘導の仕方・様式には違いがある。

基準時点から比較時点までのジニ係数の2時点間変化($\Delta G={}^tG-{}^0G$)は，次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\Delta G\\
&={}^tG-{}^0G\\
&=\left\{1-\sum_{i=1}^{m}({}^t\mathfrak{p}_i-{}^t\mathfrak{p}_{i-1})({}^t\mathfrak{q}_i+{}^t\mathfrak{q}_{i-1})\right\}-\left\{1-\sum_{i=1}^{m}({}^0\mathfrak{p}_i-{}^0\mathfrak{p}_{i-1})({}^0\mathfrak{q}_i+{}^0\mathfrak{q}_{i-1})\right\}\\
&=-\left\{\sum_{i=1}^{m}({}^t\mathfrak{p}_i-{}^t\mathfrak{p}_{i-1})({}^t\mathfrak{q}_i+{}^t\mathfrak{q}_{i-1})-\sum_{i=1}^{m}({}^0\mathfrak{p}_i-{}^0\mathfrak{p}_{i-1})({}^0\mathfrak{q}_i+{}^0\mathfrak{q}_{i-1})\right\}\\
&=-\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\mathfrak{p}_i-{}^t\mathfrak{p}_{i-1})({}^t\mathfrak{q}_i+{}^t\mathfrak{q}_{i-1})-({}^0\mathfrak{p}_i-{}^0\mathfrak{p}_{i-1})({}^0\mathfrak{q}_i+{}^0\mathfrak{q}_{i-1})\} \qquad (6)
\end{aligned}$$

ここに，

$$\begin{cases} {}^t\mathfrak{p}_j-{}^t\mathfrak{p}_{j-1}=\sum_{i=1}^{j}{}^tx_i-\sum_{i=1}^{j-1}{}^tx_i={}^tx_j & (7) \\ {}^0\mathfrak{p}_j-{}^0\mathfrak{p}_{j-1}=\sum_{i=1}^{j}{}^0x_i-\sum_{i=1}^{j-1}{}^0x_i={}^0x_j & (8) \end{cases}$$

である。

ここで，

$$\begin{cases} {}^tQ_j={}^t\mathfrak{q}_j+{}^t\mathfrak{q}_{j-1} \\ {}^0Q_j={}^0\mathfrak{q}_j+{}^0\mathfrak{q}_{j-1} \end{cases} \tag{9}$$

とおく。所得の累積相対度数は正であるから，

$${}^tQ_j>0 \wedge {}^0Q_j>0$$

である。よって，

$$\frac{{}^tQ_j+{}^0Q_j}{2}>0 \tag{10}$$

以上の準備をした上で，(6)式の和記号の中を抽出し，それに(7)式，(8)式，(9)式を代入すれば，次のようになる。

---

(1)　関彌三郎『寄与度・寄与率―増加率の寄与度分解法―』産業統計研究社，1992年，第7章「ジニ係数の差の寄与度分解」，174頁。以下，関(1992)と略記する。

(2)　基準時点の基礎データは付表A(1)，A(2)，比較時点にかんしては付表B(1)，B(2)である（本稿末尾に掲載)。この基礎データは，木村和範「ジニ係数の分解」『経済論集』(北海学園大学）第68巻第3･4号，2021年3月，からの再録である。本稿末尾の付表（1～2）と付図（1～5）は，この基礎データかんする要因分解の結果である。

$$({}^t\mathfrak{p}_j-{}^t\mathfrak{p}_{j-1})({}^t\mathfrak{q}_j+{}^t\mathfrak{q}_{j-1})-({}^0\mathfrak{p}_j-{}^0\mathfrak{p}_{j-1})({}^0\mathfrak{q}_j+{}^0\mathfrak{q}_{j-1})$$
$$={}^tx_j\cdot{}^tQ_j-{}^0x_j\cdot{}^0Q_j \tag{11}$$

一般に

$$a_1b_1-a_2b_2\equiv\frac{1}{2}(a_1-b_2)(b_1+b_2)+\frac{1}{2}(a_1+b_2)(b_1-b_2)$$

が成立するので，⑾式は以下のようになる。

$$\begin{aligned}&{}^tx_j\cdot{}^tQ_j-{}^0x_j\cdot{}^0Q_j\\&=\frac{1}{2}({}^tx_j-{}^0x_j)({}^tQ_j+{}^0Q_j)+\frac{1}{2}({}^tx_j+{}^0x_j)({}^tQ_j-{}^0Q_j)\\&=\frac{1}{2}({}^tQ_j+{}^0Q_j)({}^tx_j-{}^0x_j)+\frac{1}{2}({}^tx_j+{}^0x_j)({}^tQ_j-{}^0Q_j)\end{aligned} \tag{12}$$

ここで

$$\begin{cases}\Delta x_j={}^tx_j-{}^0x_j & (13)\\ \bar{x}_j=\dfrac{1}{2}({}^tx_j+{}^0x_j) & (14)\end{cases}$$

とおくと，⑿式は以下のようになる。

$${}^tx_j\cdot{}^tQ_j-{}^0x_j\cdot{}^0Q_j=\left(\frac{{}^tQ_j+{}^0Q_j}{2}\right)\Delta x_j+\bar{x}_j\cdot\Delta Q_j \tag{15}$$

この⒂式が(6)式における和記号の中である。⒂式を(6)式に代入する。

$$\Delta G$$
$$=-\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\mathfrak{p}_i-{}^t\mathfrak{p}_{i-1})({}^t\mathfrak{q}_i+{}^t\mathfrak{q}_{i-1})-({}^0\mathfrak{p}_i-{}^0\mathfrak{p}_{i-1})({}^0\mathfrak{q}_i+{}^0\mathfrak{q}_{i-1})\}$$
(6)［再掲］
$$=-\sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\frac{{}^tQ_i+{}^0Q_i}{2}\right)\Delta x_i+\bar{x}_i\cdot\Delta Q_i\right\}$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left\{-\left(\frac{{}^tQ_i+{}^0Q_i}{2}\right)\right\}\Delta x_i+\sum_{i=1}^{m}\{(-\bar{x}_i)\times\Delta Q_i\} \tag{16}$$

この⒃式を右辺第１項と第２項に分けて整理する。そのために，

$$\begin{cases}{}^tQ_j={}^t\mathfrak{q}_j+{}^t\mathfrak{q}_{j-1}\\ {}^0Q_j={}^0\mathfrak{q}_j+{}^0\mathfrak{q}_{j-1}\end{cases} \quad (9)［再掲］$$

$$\mathfrak{q}_j=\sum_{i=1}^{j}y_i \quad (2)［再掲］$$

を用いる。

①⒃式右辺第１項 $\left(\sum_{i=1}^{m}\left\{-\left(\frac{{}^tQ_i+{}^0Q_i}{2}\right)\right\}\Delta x_i\right)$

和記号の中から第 j 階級にかんする項を抽出する。

$$\begin{aligned}&-\left(\frac{{}^tQ_j+{}^0Q_j}{2}\right)\Delta x_j\\
&=-\frac{1}{2}\{({}^t\mathfrak{q}_j+{}^t\mathfrak{q}_{j-1})+({}^0\mathfrak{q}_j+{}^0\mathfrak{q}_{j-1})\}\Delta x_j\\
&=-\frac{1}{2}[\{({}^ty_1+\cdots+{}^ty_j)+({}^ty_1+\cdots+{}^ty_{j-1})\}\\
&\quad+\{({}^0y_1+\cdots+{}^0y_j)+({}^0y_1+\cdots+{}^0y_{j-1})\}]\Delta x_j\\
&=-\frac{1}{2}\left[\left\{({}^ty_1+\cdots+{}^ty_j)+({}^ty_1+\cdots+{}^ty_{j-1})+\overbrace{({}^ty_j-{}^ty_j)}^{\text{ゼロを加算}}\right\}\right.\\
&\quad\left.+\left\{({}^0y_1+\cdots+{}^0y_j)+({}^0y_1+\cdots+{}^0y_{j-1})+\overbrace{({}^0y_j-{}^0y_j)}^{\text{ゼロを加算}}\right\}\right]\Delta x_j\\
&=-\frac{1}{2}[\{2({}^ty_1+\cdots+{}^ty_j)-{}^ty_j\}+\{2({}^0y_1+\cdots+{}^0y_j)-{}^0y_j\}]\Delta x_j\\
&=-\frac{1}{2}\{2({}^t\mathfrak{q}_j+{}^0\mathfrak{q}_j)-({}^ty_j+{}^0y_j)\}\Delta x_j\\
&=-\left\{2\times\frac{1}{2}({}^t\mathfrak{q}_j+{}^0\mathfrak{q}_j)-\frac{1}{2}({}^ty_j+{}^0y_j)\right\}\Delta x_j\\
&=-(2\bar{\mathfrak{q}}_j-\bar{y}_j)\Delta x_j\\
&=(\bar{y}_j-2\bar{\mathfrak{q}}_j)\Delta x_j\end{aligned} \tag{17}$$

⒄式を⒃式右辺第１項に代入すると，

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{-\left(\frac{{}^tQ_i+{}^0Q_i}{2}\right)\right\}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_i-2\bar{\mathfrak{q}}_i)\Delta x_i \tag{18}$$

を得る。

$$\frac{{}^{t}Q_j+{}^{0}Q_j}{2}>0 \qquad \text{(10)[再掲]}$$

であるから，

$$-\left(\frac{{}^{t}Q_j+{}^{0}Q_j}{2}\right)<0 \qquad (19)$$

ゆえに，(19)式より

$$\bar{y}_j-2\bar{\mathfrak{q}}_j<0 \qquad (20)$$

②(16)式右辺第 2 項 $\left(\sum_{i=1}^{m}\{(-\bar{x}_i)\times\Delta Q_i\}\right)$

和記号の中から，第 j 階級にかんする項を抽出する。

$$\begin{aligned}
&(-\bar{x}_j)\times\Delta Q_j\\
&=-(\bar{x}_j)\times({}^{t}Q_j-{}^{0}Q_j)\\
&=-(\bar{x}_j)\times\{({}^{t}\mathfrak{q}_j+{}^{t}\mathfrak{q}_{j-1})-({}^{0}\mathfrak{q}_j+{}^{0}\mathfrak{q}_{j-1})\}\\
&=-(\bar{x}_j)\times[\{({}^{t}y_1+\cdots+{}^{t}y_{j-1}+{}^{t}y_j)+({}^{t}y_1+\cdots+{}^{t}y_{j-1})\}\\
&\qquad\qquad-\{({}^{0}y_1+\cdots+{}^{0}y_{j-1}+{}^{0}y_j)+({}^{0}y_1+\cdots+{}^{0}y_{j-1})\}]\\
&=-(\bar{x}_j)\times\{2({}^{t}y_1+\cdots+{}^{t}y_{j-1})-2({}^{0}y_1+\cdots+{}^{0}y_{j-1})+({}^{t}y_j-{}^{0}y_j)\}\\
&=-(\bar{x}_j)\times(2\Delta y_1+\cdots+2\Delta y_{j-1}+\Delta y_j)\\
&=(-1)\times\bar{x}_j\times(2\Delta y_1+\cdots+2\Delta y_{j-1}+\Delta y_j) \qquad (21)
\end{aligned}$$

(21)式を(16)式右辺第 2 項に代入し，整理する。

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\{(-\bar{x}_i)\times\Delta Q_i\}\\
&=\sum_{i=1}^{m}\{(-1)\times\bar{x}_i\times(2\Delta y_1+\cdots+2\Delta y_{i-1}+\Delta y_i)\}\\
&=-\bar{x}_1\Delta y_1\\
&\quad-\bar{x}_2(2\Delta y_1+\Delta y_2)\\
&\quad-\bar{x}_3(2\Delta y_1+2\Delta y_2+\Delta y_3)-\cdots\\
&\quad-\bar{x}_j(2\Delta y_1+\cdots+2\Delta y_{j-1}+\Delta y_j)-\cdots\\
&\quad-\bar{x}_{m-1}(2\Delta y_1+\cdots+2\Delta y_{m-2}+\Delta y_{m-1})\\
&\quad-\bar{x}_m(2\Delta y_1+\cdots+2\Delta y_{m-1}+\Delta y_m)\\
&=-(\bar{x}_1+2\bar{x}_2+\cdots+2\bar{x}_m)\Delta y_1\\
&\quad-(\bar{x}_2+2\bar{x}_3+\cdots+2\bar{x}_m)\Delta y_2-\cdots\\
&\quad-(\bar{x}_j+2\bar{x}_{j+1}+\cdots+2\bar{x}_m)\Delta y_j-\cdots\\
&\quad-(\bar{x}_{m-1}+2\bar{x}_m)\Delta y_{m-1}\\
&\quad-\bar{x}_m\Delta y_m\\
&=\sum_{i=1}^{m}\{-(\bar{x}_i+2\bar{x}_{i+1}+\cdots+2\bar{x}_m)\}\Delta y_i \qquad (22)
\end{aligned}$$

ここで，(22)式における和記号の中から第 j 階級の項を抽出して，整理する。

$$\begin{aligned}
&-(\bar{x}_j+2\bar{x}_{j+1}+\cdots+2\bar{x}_m)\Delta y_j\\
&=-\left\{\bar{x}_j+(2\bar{x}_{j+1}+\cdots+2\bar{x}_m)+\overbrace{\{(2\bar{x}_1+\cdots+2\bar{x}_j)-(2\bar{x}_1+\cdots+2\bar{x}_j)\}}^{\text{ゼロを加算}}\right\}\Delta y_j\\
&=-\{\bar{x}_j+2\times(\bar{x}_1+\cdots+\bar{x}_m)-2\times(\bar{x}_1+\cdots+\bar{x}_j)\}\Delta y_j\\
&=\{2\times(\bar{x}_1+\cdots+\bar{x}_j)-\bar{x}_j-2\times(\bar{x}_1+\cdots+\bar{x}_m)\}\Delta y_j \qquad (23)
\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
&\bar{x}_1+\cdots+\bar{x}_j\\
&=\frac{{}^{t}x_1+{}^{0}x_1}{2}+\cdots+\frac{{}^{t}x_j+{}^{0}x_j}{2}\\
&=\frac{1}{2}\{({}^{t}x_1+\cdots+{}^{t}x_j)+({}^{0}x_1+\cdots+{}^{0}x_j)\}\\
&=\frac{1}{2}({}^{t}\mathfrak{p}_j+{}^{0}\mathfrak{p}_j)\\
&=\bar{\mathfrak{p}}_j \qquad (24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{x}_1+\cdots+\bar{x}_m\\
&=\frac{{}^{t}x_1+{}^{0}x_1}{2}+\cdots+\frac{{}^{t}x_m+{}^{0}x_m}{2}\\
&=\frac{1}{2}\{({}^{t}x_1+\cdots+{}^{t}x_m)+({}^{0}x_1+\cdots+{}^{0}x_m)\}\\
&=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}{}^{t}x_i+\sum_{i=1}^{m}{}^{0}x_i\right)\\
&=1 \qquad (25)
\end{aligned}$$

$\left(m\text{ 個に分割された階級別世帯割合}(x_i)\text{の合計}\left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)\text{は }1\right)$

であるから，(24)式と(25)式を(23)式に代入すれば，次式を得る。

$$-(\bar{x}_j+2\bar{x}_{j+1}+\cdots+2\bar{x}_m)\Delta y_j$$

$$=\{2\times(\bar{x}_1+\cdots+\bar{x}_j)-\bar{x}_j-2\times(\bar{x}_1+\cdots+\bar{x}_m)\}\Delta y_j \quad (23)[\text{再掲}]$$

$$=(2\bar{\mathfrak{p}}_j-\bar{x}_j-2)\Delta y_j \quad (26)$$

(26)式を(22)式に代入すれば，次式を得る。

$$\sum_{i=1}^{m}\{(-\bar{x}_i)\times\Delta Q_i\}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\{-(\bar{x}_i+2\bar{x}_{i+1}+\cdots+2\bar{x}_m)\}\Delta y_i \quad (22)[\text{再掲}]$$

$$=\sum_{i=1}^{m}(2\bar{\mathfrak{p}}_i-\bar{x}_i-2)\Delta y_i \quad (27)$$

すべての世帯割合は正である（$0<x_j<1$）。したがって，(26)式の元の式

$$-(\bar{x}_j+2\bar{x}_{j+1}+\cdots+2\bar{x}_m)\Delta y_j$$

においては，Δy_j のウェイトは負である。すなわち，

$$-(\bar{x}_j+2\bar{x}_{j+1}+\cdots+2\bar{x}_{m-1}+2\bar{x}_m)<0$$

よって，(26)式における Δy_j のウェイトの符号は負である。すなわち，

$$(2\bar{\mathfrak{p}}_j-\bar{x}_j-2)<0 \quad (28)$$

以上により，(16)式右辺第１項と第２項については，次式を得た。

$$\begin{cases}\text{第１項}:\sum_{i=1}^{m}\left\{-\left(\dfrac{{}^tQ_i+{}^0Q_i}{2}\right)\right\}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_i-2\bar{\mathfrak{q}}_i)\Delta x_i & (18)[\text{再掲}]\\ \text{第２項}:\sum_{i=1}^{m}\{(-\bar{x}_i)\times\Delta Q_i\}=\sum_{i=1}^{m}(2\bar{\mathfrak{p}}_i-\bar{x}_i-2)\Delta y_i & (27)[\text{再掲}]\end{cases}$$

(18)式と(28)式から，ジニ係数の２時点間変化（ΔG）は以下のようになる。

$$\Delta G$$

$$={}^tG-{}^0G$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\mathfrak{p}_i-{}^t\mathfrak{p}_{i-1})({}^t\mathfrak{q}_i+{}^t\mathfrak{q}_{i-1})-({}^0\mathfrak{p}_i-{}^0\mathfrak{p}_{i-1})({}^0\mathfrak{q}_i+{}^0\mathfrak{q}_{i-1})\} \quad (6)[\text{再掲}]$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left\{-\left(\frac{{}^tQ_i+{}^0Q_i}{2}\right)\right\}\Delta x_i+\sum_{i=1}^{m}\{(-\bar{x}_i)\times\Delta Q_i\} \quad (16)[\text{再掲}]$$

$$=\overbrace{\sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_i-2\bar{\mathfrak{q}}_i)\Delta x_i}^{\text{世帯割合変動効果}}+\overbrace{\sum_{i=1}^{m}(2\bar{\mathfrak{p}}_i-\bar{x}_i-2)\Delta y_i}^{\text{所得割合変動効果}} \quad (29)$$

(29)式により，ジニ係数の２時点間変化は，世帯割合変動効果（effect of variation in households share）（(29)式右辺第１項）と所得割合変動効果（effect of variation in income share）（(29)式右辺第２項）に分解されることが分かる。なお，ΔG の分解式（(29)式）は，以下のようにも表すことができる。

$$\Delta G=\overbrace{\sum_{i=1}^{m}v_i\cdot\Delta x_i}^{\text{世帯割合変動効果}}+\overbrace{\sum_{i=1}^{m}w_i\cdot\Delta y_i}^{\text{所得割合変動効果}} \quad (30)$$

ただし，第 j 階級のウェイト[(3)] は

$$\begin{cases}v_j=\bar{y}_j-2\bar{\mathfrak{q}}_j & (31)\\ w_j=2\bar{\mathfrak{p}}_j-\bar{x}_j-2 & (32)\end{cases}$$

以上から，ジニ係数の２時点間変化（ΔG）にたいする第 j 階級の寄与度（${}_{\Delta G}C_j$）は世帯割合変動効果と所得割合変動効果の和としてあたえられ，以下のようになる[(4)]。

---

(3)　関の用語法では，Δx_i と Δy_i のウェイトはそれぞれが (v_i, w_i) と表されているが（関（1992）：174），本稿におけるウェイト (v_i, w_i) は，関が誘導したウェイトの $(-v_i, -w_i)$ に対応する。この違いは，本稿では，分解式を２つの積和の総和としていることによる。

(4)　基礎データへの応用により，付表１を得る（付図１参照）。

$$ {}_{\Delta G}C_j = \overbrace{(\overline{y}_j - 2\overline{\mathfrak{q}}_j)\Delta x_j}^{\text{世帯割合変動効果(第}j\text{階級)}} + \overbrace{(2\overline{\mathfrak{p}}_j - \overline{x}_j - 2)\Delta y_j}^{\text{所得割合変動効果(第}j\text{階級)}} \quad (33)$$

世帯割合変動効果における Δx_j のウェイト $(\overline{y}_j - 2\overline{\mathfrak{q}}_j)$ を v_j，所得割合変動効果における Δy_j のウェイト $(2\overline{\mathfrak{p}}_j - \overline{x}_j - 2)$ を w_j とおくと，

$$ {}_{\Delta G}C_j = \overbrace{v_j \cdot \Delta x_j}^{\text{世帯割合変動効果(第}j\text{階級)}} + \overbrace{w_j \cdot \Delta y_j}^{\text{所得割合変動効果(第}j\text{階級)}} \quad (34)$$

(2)　特殊形

前項で導出したジニ係数の 2 時点間変化にかんする分解式（(29)式）から，その系として，m 個の等分位階級に区分されている特殊な所得分布にかんするジニ係数の 2 時点間変化 (ΔG) の分解式を誘導する。基準時点と比較時点のいずれについても同様に m 個の等分位階級に区分されている所得分布においては，階級別世帯割合は，すべて同一である。すなわち，

$$\begin{cases} {}^0x_1 = \cdots = {}^0x_j = \cdots = {}^0x_m = {}^0x = \dfrac{1}{m} & (35) \\ {}^tx_1 = \cdots = {}^tx_j = \cdots = {}^tx_m = {}^tx = \dfrac{1}{m} & (36) \end{cases}$$

(35)式と(36)式から，

$$\begin{aligned} \Delta x_j &= {}^tx_j - {}^0x_j \\ &= \frac{1}{m} - \frac{1}{m} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (37)$$

を得る。この(37)式を，すでに導出したジニ係数の 2 時点間変化にかんする分解式（(29)式）に代入する。

$$\Delta G = \overbrace{\sum_{i=1}^{m}(\overline{y}_i - 2\overline{\mathfrak{q}}_i)\Delta x_i}^{\text{世帯割合変動効果}} + \overbrace{\sum_{i=1}^{m}(2\overline{\mathfrak{p}}_i - \overline{x}_i - 2)\Delta y_i}^{\text{所得割合変動効果}} \quad (29)[\text{再掲}]$$

$$= \overbrace{\sum_{i=1}^{m}(2\overline{\mathfrak{p}}_i - \overline{x}_i - 2)\Delta y_i}^{\text{所得割合変動効果}} \quad (38)$$

(38)式を簡単にするために，(35)式と(36)式から次式を誘導する。

$$\begin{cases} \overline{x}_1 = \dfrac{1}{2}({}^tx_1 + {}^0x_1) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m}\right) = \dfrac{1}{m} \\ \quad\vdots \\ \quad\vdots \\ \quad\vdots \\ \overline{x}_j = \dfrac{1}{2}({}^tx_j + {}^0x_j) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m}\right) = \dfrac{1}{m} \end{cases} \quad (39)$$

$\therefore$

$$\overline{\mathfrak{p}}_j = \overbrace{\overline{x}_1 + \cdots + \overline{x}_j}^{j\text{個}} \quad (24)[\text{再掲}]$$

$$= \frac{1}{m} \times j \quad (40)$$

以上の準備をした上で，以下では，分解式（(38)式）の和記号の中から第 j 階級にかんする Δy_j のウェイト $(2\overline{\mathfrak{p}}_j - \overline{x}_j - 2)$ を抽出し，それに(40)式と(39)式を代入する。すなわち，

$$\begin{aligned} & 2\overline{\mathfrak{p}}_j - \overline{x}_j - 2 \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{m} \times j\right) - \frac{1}{m} - 2 \\ &= \frac{2j - 2m - 1}{m} \end{aligned} \quad (41)$$

(41)式を(38)式に戻せば，所得分布が等分位階級に区分されているときの，ジニ係数の 2 時点間変化は次のように要因分解される。

$$\Delta G = \overbrace{\sum_{i=1}^{m}(2\overline{\mathfrak{p}}_i - \overline{x}_i - 2)\Delta y_i}^{\text{所得割合変動効果}} \quad (38)[\text{再掲}]$$

$$= \overbrace{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{2i - 2m - 1}{m}\right)\Delta y_i}^{\text{所得割合変動効果}} \quad (42)$$

$\varDelta y_i$ のウェイトを z_i とおけば，(42)式は次のように書くこともできる。

$$\varDelta G=\overbrace{\sum_{i=1}^{m} z_i \cdot \varDelta y_i}^{\text{所得割合変動効果}} \tag{43}$$

ジニ係数の２時点間変化（$\varDelta G$）は，階級別寄与度（${}_{\varDelta G}C_j$）の総和である[5]。したがって，特殊形においては階級別寄与度は

$$ {}_{\varDelta G}C_j=\overbrace{\left(\frac{2j-2m-1}{m}\right)\varDelta y_j}^{\text{所得割合変動効果（第 } j \text{ 階級）}} \tag{44}$$

あるいは

$$ {}_{\varDelta G}C_j=\overbrace{z_j \cdot \varDelta y_j}^{\text{所得割合変動効果（第 } j \text{ 階級）}} \tag{45}$$

ただし，

$$z_j=\frac{2j-2m-1}{m} \tag{46}$$

であり，所得割合変動効果と一致する。

ここに，

$$1 \leq j \leq m$$

であるから，

$$z_j=\frac{2j-2m-1}{m}<0 \tag{47}$$

である。

関は所得分布が五分位と十分位に分割される場合（$m=5, 10$ のとき）を取り上げて，ジニ係数の２時点間変化（$\varDelta G$）を次のように分解した[6]。

<u>五分位の場合</u>

$$\varDelta G=-\left(\frac{9}{5}\varDelta y_1+\frac{7}{5}\varDelta y_2+\frac{5}{5}\varDelta y_3+\frac{3}{5}\varDelta y_4+\frac{1}{5}\varDelta y_5\right)$$

<u>十分位の場合</u>

$$\varDelta G=-\left(\frac{19}{10}\varDelta y_1+\frac{17}{10}\varDelta y_2+\frac{15}{10}\varDelta y_3+\frac{13}{10}\varDelta y_4+\frac{11}{10}\varDelta y_5 +\frac{9}{10}\varDelta y_6+\frac{7}{10}\varDelta y_7+\frac{5}{10}\varDelta y_8+\frac{3}{10}\varDelta y_9+\frac{1}{10}\varDelta y_{10}\right)$$

２．ウェイト

(1)　一般形

ジニ係数の２時点間変化（$\varDelta G$）にたいする要因分解式として，次式を誘導した。

$$\varDelta G=\overbrace{\sum_{i=1}^{m} v_i \cdot \varDelta x_i}^{\text{世帯割合変動効果}}+\overbrace{\sum_{i=1}^{m} w_i \cdot \varDelta y_i}^{\text{所得割合変動効果}} \tag{30}$$
［再掲］

ここでは，２つの効果におけるウェイト（v_j, w_j）の範囲を考察する。そのために，隣り合う２つの階級（第 j 階級と第（$j+1$）階級）にかんするウェイトの大小関係を明らかにする。

①　世帯割合変動効果のウェイト（v_j, v_{j+1}）

$$v_j > v_{j+1}$$

を証明する。

$$\begin{cases} v_j=\bar{y}_j-2\bar{q}_j \\ v_{j+1}=\bar{y}_{j+1}-2\bar{q}_{j+1} \end{cases} \tag{31}$$
［再掲］

より

(5)　基礎データへの応用により，付表２を得る（付図２参照）。

(6)　関（1992：171，167）

$$
\begin{aligned}
&v_j - v_{j+1}\\
&=(\bar{y}_j - 2\bar{\mathfrak{q}}_j) - (\bar{y}_{j+1} - 2\bar{\mathfrak{q}}_{j+1})\\
&=(\bar{y}_j - \bar{y}_{j+1}) - 2(\bar{\mathfrak{q}}_j - \bar{\mathfrak{q}}_{j+1})\\
&=(\bar{y}_j - \bar{y}_{j+1}) - 2\left\{\frac{1}{2}({}^t\mathfrak{q}_j + {}^0\mathfrak{q}_j) - \frac{1}{2}({}^t\mathfrak{q}_{j+1} + {}^0\mathfrak{q}_{j+1})\right\}\\
&=(\bar{y}_j - \bar{y}_{j+1}) - 2\left\{\frac{1}{2}({}^t\mathfrak{q}_j - {}^t\mathfrak{q}_{j+1}) + \frac{1}{2}({}^0\mathfrak{q}_j - {}^0\mathfrak{q}_{j+1})\right\}\\
&=(\bar{y}_j - \bar{y}_{j+1}) - 2\left[\frac{1}{2}\{({}^ty_1 + \cdots + {}^ty_j) - ({}^ty_1 + \cdots + {}^ty_j + {}^ty_{j+1})\}\right.\\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}\{({}^0y_1 + \cdots + {}^0y_j) - ({}^0y_1 + \cdots + {}^0y_j + {}^0y_{j+1})\}\right]\\
&=\left\{\frac{1}{2}({}^ty_j + {}^0y_j) - \frac{1}{2}({}^ty_{j+1} + {}^0y_{j+1})\right\} - 2\left(-\frac{1}{2}{}^ty_{j+1} - \frac{1}{2}{}^0y_{j+1}\right)\\
&=\frac{1}{2}({}^ty_j + {}^0y_j + {}^ty_{j+1} + {}^0y_{j+1})
\end{aligned}
\tag{48}
$$

本稿が取り扱う所得割合は，時点と世帯階級を問わず，1 未満の正数である($0<y_j<1$, $0<y_{j+1}<1$)。したがって，(48)式の値は正であるから，

$$v_j - v_{j+1} > 0$$

よって，

$$v_j > v_{j+1} \tag{49}$$

q.e.d.

(49)式は，第 j 階級のウェイトのほうが第 $(j+1)$ 階級よりも大きいことを示す。このことは，m 個の階級の中で第 1 階級のウェイトが最大で，第 m 階級のウェイトが最小であることを意味する。最小値となる第 m 階級のウェイト(v_m)をもとめる。

$$v_j = \bar{y}_j - 2\bar{\mathfrak{q}}_j \qquad (31)[再掲]$$

であるから，$j=m$ のとき

$$
\begin{aligned}
v_m &= \bar{y}_m - 2\bar{\mathfrak{q}}_m\\
&= \bar{y}_m - 2\times\frac{1}{2}({}^t\mathfrak{q}_m + {}^0\mathfrak{q}_m)\\
&= \bar{y}_m - 2\times\frac{1}{2}(1+1)\\
&= \bar{y}_m - 2
\end{aligned}
\tag{50}
$$

となる。$0<\bar{y}_m<1$ であるから，v_m は -2 より大きい。ただし，ウェイト(v_j)は負数であるから（(20)式参照)，

$$0 > v_m > -2$$

したがって，Δx_j のウェイト(v_j)の大小関係は次のようになる[7]。

$$0 > v_1 > \cdots > v_j > \cdots > v_m > -2 \tag{51}$$

②所得割合変動効果のウェイト(w_j, w_{j+1})

$$w_j < w_{j+1}$$

を証明する。

$$
\begin{cases}
w_j = 2\bar{\mathfrak{p}}_j - \bar{x}_j - 2\\
w_{j+1} = 2\bar{\mathfrak{p}}_{j+1} - \bar{x}_{j+1} - 2
\end{cases}
\qquad (32)[再掲]
$$

より，

$$
\begin{aligned}
&w_j - w_{j+1}\\
&=(2\bar{\mathfrak{p}}_j - \bar{x}_j - 2) - (2\bar{\mathfrak{p}}_{j+1} - \bar{x}_{j+1} - 2)\\
&=(-\bar{x}_j + \bar{x}_{j+1}) + 2(\bar{\mathfrak{p}}_j - \bar{\mathfrak{p}}_{j+1})\\
&=(-\bar{x}_j + \bar{x}_{j+1}) + 2\left\{\frac{1}{2}({}^t\mathfrak{p}_j + {}^0\mathfrak{p}_j) - \frac{1}{2}({}^t\mathfrak{p}_{j+1} + {}^0\mathfrak{p}_{j+1})\right\}\\
&=(-\bar{x}_j + \bar{x}_{j+1}) + 2\left\{\frac{1}{2}({}^t\mathfrak{p}_j - {}^t\mathfrak{p}_{j+1}) + \frac{1}{2}({}^0\mathfrak{p}_j - {}^0\mathfrak{p}_{j+1})\right\}\\
&=(-\bar{x}_j + \bar{x}_{j+1}) + 2\left[\frac{1}{2}\{({}^tx_1 + \cdots + {}^tx_j) - ({}^tx_1 + \cdots + {}^tx_j + {}^tx_{j+1})\}\right.
\end{aligned}
$$

(7)　階級別の v_j については付図 3 参照。

$$+\frac{1}{2}\{({}^0x_1+\cdots+{}^0x_j)-({}^0x_1+\cdots+{}^0x_j+{}^0x_{j+1})\}\Big]$$
$$=\left\{-\frac{1}{2}({}^tx_j+{}^0x_j)+\frac{1}{2}({}^tx_{j+1}+{}^0x_{j+1})\right\}-2\left\{\frac{1}{2}({}^tx_{j+1}+{}^0x_{j+1})\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}({}^tx_j+{}^0x_j+{}^tx_{j+1}+{}^0x_{j+1}) \tag{54}$$

本稿が取り扱う世帯割合は，時点と世帯階級を問わず，１未満の正数である（$0<x_j<1$, $0<x_{j+1}<1$）。したがって，(54)式の値は負であるから，

$$w_j-w_{j+1}<0$$

よって

$$w_j<w_{j+1} \tag{55}$$

q.e.d.

(55)式は，第$(j+1)$階級のウェイトのほうが第j階級よりも大きいことを示す。それは，m個の階級の中で第m階級のウェイトが最大で，第１階級のウェイトが最小であることを意味する。最小値となる第１階級のウェイト(w_1)をもとめる。

$$\begin{aligned}w_1&=2\bar{\mathfrak{p}}_1-\bar{x}_1-2\\&=2\times\frac{1}{2}({}^t\mathfrak{p}_1+{}^0\mathfrak{p}_1)-\bar{x}_1-2\\&=2\times\frac{1}{2}({}^tx_1+{}^0x_1)-\bar{x}_1-2\\&=2\times\bar{x}_1-\bar{x}_1-2\\&=\bar{x}_1-2\end{aligned} \tag{56}$$

ここに，$0<\bar{x}_1<1$であるから，w_1は-2より大きい。ただし，ウェイト(w_j)は負数であるから（(27)式参照），

$$-2<w_1<0$$

以上要するに，$\varDelta y_j$のウェイト(w_j)の大小関係は次のようになる[8]。

$$-2<w_1<\cdots<w_j<\cdots<w_m<0 \tag{57}$$

(2)　特殊形

階級別寄与度は以下のとおりである。

$$_{\varDelta G}C_j=\overbrace{z_j\cdot\varDelta y_j}^{\text{所得割合変動効果（第}j\text{階級）}} \qquad (45)[再掲]$$

ただし，

$$z_j=\frac{2j-2m-1}{m} \qquad (46)[再掲]$$

２つの階級（第j階級と第$(j+1)$階級）のウェイトについて，

$$z_j<z_{j+1}$$

が成立することを証明する。

$$\begin{aligned}&z_j-z_{j+1}\\&=\frac{2j-2m-1}{m}-\frac{2(j+1)-2m-1}{m}\\&=-\frac{2}{m}\end{aligned}$$

$m>0$であるから，

$$-\frac{2}{m}<0$$

したがって

$$z_j-z_{j+1}<0$$

よって，

(8)　階級別のw_jについては付図４参照。

$z_j < z_{j+1}$

q.e.d.

最小値となる z_j は，$j=1$ のときであり，

$$z_1 = \frac{2\times 1 - 2m - 1}{m} = \frac{1}{m} - 2$$

したがって，ウェイト(z_j)の最小値(z_1)は-2よりも小さくない。ただし，z_j は負数であるから（(47)式参照)，

$$-2 < z_1 < \cdots < z_j < \cdots < z_m < 0 \quad (60)$$

を得る[9]。

(60)式が示すように，低位の階級にかんするウェイトの絶対値($|z_j|$)は比較的大きい。しかし，所得割合変動効果は，ウェイト($z_j<0$)と所得割合の2時点間変化($\Delta y_j \gtreqless 0$)の積($z_j\cdot\Delta y_j$)であるから，低位の階級で所得割合の2時点間変化の絶対値($|\Delta y_j|$)が小さい場合には，ウェイトによる増幅効果は減殺される[10]。

3．階級別寄与度

(1)　一般形

階級別寄与度(${}_{\Delta G}C_j$)は，２つの効果（世帯割合変動効果と所得割合変動効果）の和である。すなわち，

$$_{\Delta G}C_j = \overbrace{v_j\cdot\Delta x_j}^{\text{世帯割合変動効果(第}j\text{階級)}} + \overbrace{w_j\cdot\Delta y_j}^{\text{所得割合変動効果(第}j\text{階級)}} \quad (34)[再掲]$$

である。${}_{\Delta G}C_j>0$ のとき，その値が大きいほど，その階級はジニ係数の２時点間変化(ΔG)の値を押し上げる。${}_{\Delta G}C_j<0$ のとき，その値が小さいほど，その階級は ΔG を押し下げる。${}_{\Delta G}C_j=0$ のときには，その階級は ΔG を押し上げも押し下げもすることはない。

$v_j\cdot\Delta x_j$（世帯割合変動効果）と $w_j\cdot\Delta y_j$（所得割合変動効果）の和としてあたえられる ${}_{\Delta G}C_j$（階級別寄与度）の符号と２つの効果の符号との間には，次頁の表に一覧されるような関係がある。

この表から，２つの効果の値に応じて，階級別寄与度(${}_{\Delta G}C_j$)は正，ゼロ，負の値を取ることが分かる。すなわち，

$$_{\Delta G}C_j = v_j\cdot\Delta x_j + w_j\cdot\Delta y_j \gtreqless 0 \quad (61)$$

以下では，(61)式において等号が成立する条件を考察する。表が示すように，

$$_{\Delta G}C_j = 0 \quad (62)$$

が成立するのは，次の３とおりである。

$$\Delta x_j<0, \Delta y_j>0 \text{ かつ } |v_j\cdot\Delta x_j| = |w_j\cdot\Delta y_j| \quad (63)$$
$$\Delta x_j = \Delta y_j = 0 \quad (64)$$
$$\Delta x_j>0, \Delta y_j<0 \text{ かつ } |v_j\cdot\Delta x_j| = |w_j\cdot\Delta y_j| \quad (65)$$

---

(9)　階級別の z_j については付図5参照。

(10)　ウェイトの大小関係を根拠として関は，「低所得層の y_i の増減［Δy_i］が ΔG を決めることになり易い。故に，ジニ係数［の2時点間変化(ΔG)］は主として低所得層における所得割合 y_i の変化［Δy_i］によって，所得分配の不平等の変化をあらわさんとする尺度であると言える。」と述べている（関（1992：167)，ただし，［　］内は引用者による)。これについて，筆者は，見解を異にする。低所得層のウェイトの絶対値は他の階層に較べて大きいが，Δy_i の絶対値が小さい場合には，ウェイト(z_i)と Δy_i の積の絶対値はさほど大きくならず，その階層による ΔG への影響は大きくないからである。たとえば，基礎データ（五分位区分）から作成した付図5では，第１五分位のウェイトの絶対値は最大であるが，Δy_1 は第２五分位の Δy_2 よりも小さいので，第１五分位の変動効果（寄与度）は第２五分位よりも小さく，変動効果が階級の順に従っていないことが分かる。

表　$v_j \cdot \Delta x_j$（世帯割合変動効果）と $w_j \cdot \Delta y_j$（所得割合変動効果），およびその合成としての ${}_{\Delta G}C_j$（階級別寄与度）

ウェイト		2時点間変化		効果		2つの効果（絶対値）の大小関係	寄与度
v_j	w_j	Δx_j	Δy_j	$v_j \cdot \Delta x_j$	$w_j \cdot \Delta y_j$	$\lvert v_j \cdot \Delta x_j \rvert \gtrless \lvert w_j \cdot \Delta y_j \rvert$	${}_{\Delta G}C_j$
負	負	負	負	正	正	$\lvert v_j \cdot \Delta x_j \rvert \gtrless \lvert w_j \cdot \Delta y_j \rvert$	正
			ゼロ		ゼロ	$\lvert v_j \cdot \Delta x_j \rvert > \lvert w_j \cdot \Delta y_j \rvert$	正
			正		負	$\lvert v_j \cdot \Delta x_j \rvert > \lvert w_j \cdot \Delta y_j \rvert$	正
						$\lvert v_j \cdot \Delta x_j \rvert = \lvert w_j \cdot \Delta y_j \rvert$	ゼロ
						$\lvert v_j \cdot \Delta x_j \rvert < \lvert w_j \cdot \Delta y_j \rvert$	負
		ゼロ	負	ゼロ	正	$\lvert v_j \cdot \Delta x_j \rvert < \lvert w_j \cdot \Delta y_j \rvert$	正
			ゼロ		ゼロ	$\lvert v_j \cdot \Delta x_j \rvert = \lvert w_j \cdot \Delta y_j \rvert$	ゼロ
			正		負	$\lvert v_j \cdot \Delta x_j \rvert < \lvert w_j \cdot \Delta y_j \rvert$	負
		正	負	負	正	$\lvert v_j \cdot \Delta x_j \rvert < \lvert w_j \cdot \Delta y_j \rvert$	正
						$\lvert v_j \cdot \Delta x_j \rvert = \lvert w_j \cdot \Delta y_j \rvert$	ゼロ
						$\lvert v_j \cdot \Delta x_j \rvert > \lvert w_j \cdot \Delta y_j \rvert$	負
			ゼロ		ゼロ	$\lvert v_j \cdot \Delta x_j \rvert > \lvert w_j \cdot \Delta y_j \rvert$	負
			正		負	$\lvert v_j \cdot \Delta x_j \rvert \gtrless \lvert w_j \cdot \Delta y_j \rvert$	負

（注）（1）$v_j < 0,\ w_j < 0$
（2）$\Delta x_j \gtreqless 0,\ \Delta y_j \gtreqless 0$（複号任意）

(63)式と(65)式において，ウェイト(v_j, w_j)は負であるから，絶対値の記号を外せば，いずれも同様になる。すなわち，

$$v_j \cdot \Delta x_j = -w_j \cdot \Delta y_j$$

$$\frac{\Delta y_j}{\Delta x_j} = -\frac{1}{\dfrac{w_j}{v_j}}$$

したがって，(63)式と(65)式はまとめて，

$\Delta x_j \lesseqgtr 0, \Delta y_j \gtreqless 0$ のとき（複号同順），

$$\frac{\Delta y_j}{\Delta x_j} = -\frac{1}{\dfrac{w_j}{v_j}} \qquad (66)$$

と表現することができる。

以上から，

$${}_{\Delta G}C_j = 0 \qquad (62)[再掲]$$

が成立する条件は2つにまとめられる。第1の条件は，

$$\Delta x_j = \Delta y_j = 0 \qquad (64)[再掲]$$

であり，第2の条件は，

$$\frac{\Delta y_j}{\Delta x_j} = -\frac{1}{\dfrac{w_j}{v_j}} \qquad (66)[再掲]$$

ただし，$\Delta x_j \lesseqgtr 0, \Delta y_j \gtreqless 0$（複号同順）

である。これらの2つの条件のうちいずれか一方が成立するとき，(62)式が成立する。なお，(66)式は，所得割合の2時点間変化(Δy_j)にたいする世帯割合の2時点間変(Δx_j)の比の値$\left(\dfrac{\Delta y_j}{\Delta x_j}\right)$が，$w_j$（$\Delta y_j$のウェイト）にたいする$v_j$（$\Delta x_j$のウェイト）の比の値$\left(\dfrac{w_j}{v_j}\right)$の逆数

$\left(\frac{v_j}{w_j}\right)$について，その符号を反転させた値に等しいことを意味する。

⑵　特殊形

階級別寄与度は，以下のとおりである。

$$ {}_{\Delta G}C_j = \overbrace{z_j \cdot \Delta y_j}^{\text{所得割合変動効果(第} j \text{階級)}} \qquad ⑷⑹[再掲] $$

ここに，

$$ z_j < 0 \qquad ⑷⑺[再掲] $$

であるから，$\Delta y_j \gtreqless 0$ のとき，

$$ {}_{\Delta G}C_j \lesseqgtr 0 $$

である（複号同順)。${}_{\Delta G}C_j<0$ のとき，ΔG は押し下げられ，${}_{\Delta G}C_j>0$ のとき，ΔG は押し上げられる。${}_{\Delta G}C_j=0$ のときは，いずれでもない。

む す び

本稿における考察結果は以下のとおりである。

1．ジニ係数の 2 時点間変化(ΔG)は，世帯割合変動効果と所得割合変動効果に分解される（一般形)。すなわち，

$$ \Delta G = \overbrace{\sum_{i=1}^{m} v_i \cdot \Delta x_i}^{\text{世帯割合変動効果}} + \overbrace{\sum_{i=1}^{m} w_i \cdot \Delta y_i}^{\text{所得割合変動効果}} \qquad ⑶⑽[再掲] $$

ここに，$v_i = \overline{y}_i - 2\overline{\mathfrak{q}}_i,\ w_i = 2\overline{\mathfrak{p}}_i - \overline{x}_i - 2$

所得分布が m 個の等分位階級に区分されている特殊な場合には，ΔG は所得割合変動効果に分解される（特殊形)。すなわち，

$$ \Delta G = \overbrace{\sum_{i=1}^{m} z_i \cdot \Delta y_i}^{\text{所得割合変動効果}} \qquad ⑷⑸[再掲] $$

ここに，$z_i = \dfrac{2i-2m-1}{m}$

2．世帯割合と所得割合の 2 時点間変化(Δx_i と Δy_i）にかんする階級別のウェイト(v_i, w_i, z_i)の大小関係は階級の順に従う。

$$ 0 > v_1 > \cdots > v_j > \cdots > v_m > -2 \qquad ⑸⑴[再掲] $$

$$ -2 < w_1 < \cdots < w_j < \cdots < w_m < 0 \qquad ⑸⑺[再掲] $$

$$ -2 < z_1 < \cdots < z_j < \cdots < z_m < 0 \qquad ⑹⑽[再掲] $$

3．ΔG にたいする階級別寄与度（一般形）は以下のとおりである。

$$ {}_{\Delta G}C_j = \overbrace{\overbrace{v_j \cdot \Delta x_j}^{\text{世帯割合変動効果(第} j \text{階級)}} + \overbrace{w_j \cdot \Delta y_j}^{\text{所得割合変動効果(第} j \text{階級)}}}^{\text{寄与度(第} j \text{階級)}} \qquad ⑶⑷[再掲] $$

所得分布が等分位階級に分割されているときの階級別寄与度（特殊形）は以下のとおりである。

$$ {}_{\Delta G}C_j = \overbrace{\overbrace{z_j \cdot \Delta y_j}^{\text{所得割合変動効果(第} j \text{階級)}}}^{\text{寄与度(第} j \text{階級)}} \qquad ⑷⑸[再掲] $$

4．階級別寄与度(${}_{\Delta G}C_j \gtreqless 0$)が大きいほど，ジニ係数の 2 時点間変化を押し上げる（vice versa)。

5．${}_{\Delta G}C_j \gtreqless 0$ における等号の成立条件は，一般形にあっては，

$$ (\Delta x_j = \Delta y_j = 0) \vee \left(\frac{\Delta y_j}{\Delta x_j} = -\frac{1}{\frac{w_j}{u_j}};\ \text{ただし，}\ \Delta x_j \lesseqgtr 0 \wedge \Delta y_j \gtreqless 0 \text{(複号同順)} \right) $$

であり，特殊形にあっては，

$$\varDelta y_j = 0$$

である。

（2021 年 4 月 2 日提出）

付表

付表 A(1)　基礎データ（基準時点）（その 1 ）

階級番号	世帯所得	世帯数 (^0n_j)	所得計 (^0E_j)	相対度数		累積相対度数	
				世帯 (^0x_j)	所得 (^0y_j)	世帯 ($^0\mathfrak{p}_j$)	所得 ($^0\mathfrak{q}_j$)
第 1 階級	1	2	2	0.0800	0.0146	0.0800	0.0146
第 2 階級	2	3	6	0.1200	0.0438	0.2000	0.0584
第 3 階級	3	3	9	0.1200	0.0657	0.3200	0.1241
第 4 階級	4	2	8	0.0800	0.0584	0.4000	0.1825
第 5 階級	5	2	10	0.0800	0.0730	0.4800	0.2555
第 6 階級	6	3	18	0.1200	0.1314	0.6000	0.3869
第 7 階級	7	3	21	0.1200	0.1533	0.7200	0.5401
第 8 階級	8	2	16	0.0800	0.1168	0.8000	0.6569
第 9 階級	9	3	27	0.1200	0.1971	0.9200	0.8540
第 10 階級	10	2	20	0.0800	0.1460	1.0000	1.0000
合　計		$^0N=25$	$^0E=137$	1.0000	1.0000		

（注）世帯所得の単位は 100 万円，世帯数の単位は 1 戸

付表 B(1)　基礎データ（比較時点）（その 1 ）

階級番号	世帯所得	世帯数 (^tn_j)	所得計 (^tE_j)	相対度数		累積相対度数	
				世帯 (^tx_j)	所得 (^ty_j)	世帯 ($^t\mathfrak{p}_j$)	所得 ($^t\mathfrak{q}_j$)
第 1 階級	1	6	6	0.2000	0.0395	0.2000	0.0395
第 2 階級	2	4	8	0.1333	0.0526	0.3333	0.0921
第 3 階級	3	2	6	0.0667	0.0395	0.4000	0.1316
第 4 階級	4	3	12	0.1000	0.0789	0.5000	0.2105
第 5 階級	5	2	10	0.0667	0.0658	0.5667	0.2763
第 6 階級	6	1	6	0.0333	0.0395	0.6000	0.3158
第 7 階級	7	2	14	0.0667	0.0921	0.6667	0.4079
第 8 階級	8	4	32	0.1333	0.2105	0.8000	0.6184
第 9 階級	9	2	18	0.0667	0.1184	0.8667	0.7368
第 10 階級	10	4	40	0.1333	0.2632	1.0000	1.0000
合　計		$^tN=30$	$^tE=152$	1.0000	1.0000		

（注）世帯所得の単位は 100 万円，世帯数の単位は 1 戸

付表 A(2)　基礎データ（基準時点）（その２）（五分位区分）

階級番号	世帯所得	世帯数 (^0n_j)	所得計 (^0E_j)	相対度数		累積相対度数	
				世帯(^0x_j)	所得(^0y_j)	世帯($^0\mathfrak{p}_j$)	所得($^0\mathfrak{q}_j$)
第１五分位	～2	5	8	0.2000	0.0584	0.2000	0.0584
第２五分位	3～4	5	17	0.2000	0.1241	0.4000	0.1825
第３五分位	5～6	5	28	0.2000	0.2044	0.6000	0.3869
第４五分位	7～8	5	37	0.2000	0.2701	0.8000	0.6569
第５五分位	9～	5	47	0.2000	0.3431	1.0000	1.0000
合　計		$^0N=25$	$^0E=137$	1.0000	1.0000		

（注）世帯所得の単位は 100 万円，世帯数の単位は１戸

付表 B(2)　基礎データ（比較時点）（その２）（五分位区分）

階級番号	世帯所得	世帯数 (^tn_j)	所得計 (^tE_j)	相対度数		累積相対度数	
				世帯(^tx_j)	所得(^ty_j)	世帯($^t\mathfrak{p}_j$)	所得($^t\mathfrak{q}_j$)
第１五分位	～1	6	6	0.2000	0.0395	0.2000	0.0395
第２五分位	2～3	6	14	0.2000	0.0921	0.4000	0.1316
第３五分位	4～6	6	28	0.2000	0.1842	0.6000	0.3158
第４五分位	7～8	6	46	0.2000	0.3026	0.8000	0.6184
第５五分位	9～	6	58	0.2000	0.3816	1.0000	1.0000
合　計		$^tN=30$	$^tE=152$	1.0000	1.0000		

（注）世帯所得の単位は 100 万円，世帯数の単位は１戸

付表 1　ジニ係数の 2 時点間変化にかんする要因分解表（その 1 ：一般形）

	基準時点(1)				比較時点(2)				世帯割合変動効果				
	相対度数		累積相対度数		相対度数		累積相対度数						
	世帯(^0x_j)	所得(^0y_j)	世帯($^0\mathfrak{p}_j$)	所得($^0\mathfrak{q}_j$)	世帯(^tx_j)	所得(^ty_j)	世帯($^t\mathfrak{p}_j$)	所得($^t\mathfrak{q}_j$)	$\bar{y}_j$	$2\times\bar{\mathfrak{q}}_j$	v_j	Δx_j	$v_j\cdot\Delta x_j$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
									{(6)＋(2)}/2	2×{(8)＋(4)}/2	(9)－(10)	(5)－(1)	(11)×(12)
第 1 階級	0.0800	0.0146	0.0800	0.0146	0.2000	0.0395	0.2000	0.0395	0.0270	0.0541	−0.0270	0.1200	−0.0032
第 2 階級	0.1200	0.0438	0.2000	0.0584	0.1333	0.0526	0.3333	0.0921	0.0482	0.1505	−0.1023	0.0133	−0.0014
第 3 階級	0.1200	0.0657	0.3200	0.1241	0.0667	0.0395	0.4000	0.1316	0.0526	0.2557	−0.2031	−0.0533	0.0108
第 4 階級	0.0800	0.0584	0.4000	0.1825	0.1000	0.0789	0.5000	0.2105	0.0687	0.3930	−0.3243	0.0200	−0.0065
第 5 階級	0.0800	0.0730	0.4800	0.2555	0.0667	0.0658	0.5667	0.2763	0.0694	0.5318	−0.4624	−0.0133	0.0062
第 6 階級	0.1200	0.1314	0.6000	0.3869	0.0333	0.0395	0.6000	0.3158	0.0854	0.7027	−0.6172	−0.0867	0.0535
第 7 階級	0.1200	0.1533	0.7200	0.5401	0.0667	0.0921	0.6667	0.4079	0.1227	0.9480	−0.8253	−0.0533	0.0440
第 8 階級	0.0800	0.1168	0.8000	0.6569	0.1333	0.2105	0.8000	0.6184	0.1637	1.2754	−1.1117	0.0533	−0.0593
第 9 階級	0.1200	0.1971	0.9200	0.8540	0.0667	0.1184	0.8667	0.7368	0.1578	1.5909	−1.4331	−0.0533	0.0764
第 10 階級	0.0800	0.1460	1.0000	1.0000	0.1333	0.2632	1.0000	1.0000	0.2046	2.0000	−1.7954	0.0533	−0.0958
合計													0.0248

（注）基準時点のジニ係数(^0G)は，0.2949，比較時点のジニ係数(^tG)は，0.3662 である(ΔG＝0.0713)（木村和範「ジニ係数の分解」『経済論集』第 68 巻第 3･4 号　2021 年 3 月，付表 1 (a)(b)，50 頁参照）。

（出所）(1)基準時点：付表 A(1)
(2)比較時点：付表 B(1)

付表 2　ジニ係数の 2 時点間変化にかんする要因分解表（その 2 ：特殊形）

	所得の相対度数		Δy_j	z_j(＊)	所得割合変動効果（階級別寄与度）	寄与率	
	基準時点(1)	比較時点(2)					
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
			(2)－(1)		(4)×(3)	(5)/$_{\Delta G}C_j$	%
第 1 五分位	0.0584	0.0395	−0.0189	−1.8000	0.0341	0.4746	47.5
第 2 五分位	0.1241	0.0921	−0.0320	−1.4000	0.0448	0.6239	62.4
第 3 五分位	0.2044	0.1842	−0.0202	−1.0000	0.0202	0.2810	28.1
第 4 五分位	0.2701	0.3026	0.0326	−0.6000	−0.0195	−0.2722	−27.2
第 5 五分位	0.3431	0.3816	0.0385	−0.2000	−0.0077	−0.1073	−10.7
合計					0.0718	1.0000	100.0

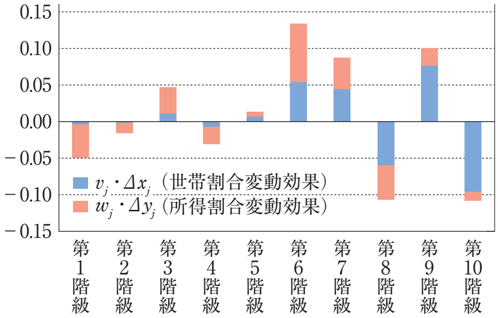
（＊）ウェイトの計算式は $z_j=\dfrac{2j-2m-1}{m}$ による。

（注）基準時点のジニ係数(^0G)は，0.2861，比較時点のジニ係数(^tG)は，0.3597 である(ΔG＝0.0718)（木村前掲論文，付表 2 (a)(b)，51 頁参照）。

（出所）(1)基準時点：付表 A(2)
(2)比較時点：付表 B(2)

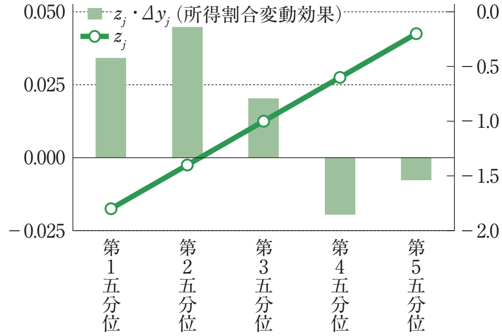
所得割合変動効果					階級別寄与度	寄与率		
$2\times\bar{\mathfrak{p}}_j$	$\bar{x}_j$	w_j	Δy_j	$w_j \cdot \Delta y$	${}_{\Delta G}C_j$	(20)	(21)	
(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)			
2×{(7)+(3)}/2	{(5)+(1)}/2	(14)−(15)−2	(6)－(2)	(16)×(17)	(13)＋(18)	(19)/${}_{\Delta G}C_j$	%	
0.2800	0.1400	-1.8600	0.0249	-0.0463	-0.0495	-0.6941	-69.4	第 1 階級
0.5333	0.1267	-1.5933	0.0088	-0.0141	-0.0154	-0.2165	-21.6	第 2 階級
0.7200	0.0933	-1.3733	-0.0262	0.0360	0.0468	0.6566	65.7	第 3 階級
0.9000	0.0900	-1.1900	0.0206	-0.0245	-0.0309	-0.4338	-43.4	第 4 階級
1.0467	0.0733	-1.0267	-0.0072	0.0074	0.0136	0.1901	19.0	第 5 階級
1.2000	0.0767	-0.8767	-0.0919	0.0806	0.1341	1.8794	187.9	第 6 階級
1.3867	0.0933	-0.7067	-0.0612	0.0432	0.0873	1.2231	122.3	第 7 階級
1.6000	0.1067	-0.5067	0.0937	-0.0475	-0.1068	-1.4969	-149.7	第 8 階級
1.7867	0.0933	-0.3067	-0.0787	0.0241	0.1006	1.4096	141.0	第 9 階級
2.0000	0.1067	-0.1067	0.1172	-0.0125	-0.1083	-1.5175	-151.7	第 10 階級
				0.0465	0.0713	1.0000	100.0	合計

付図



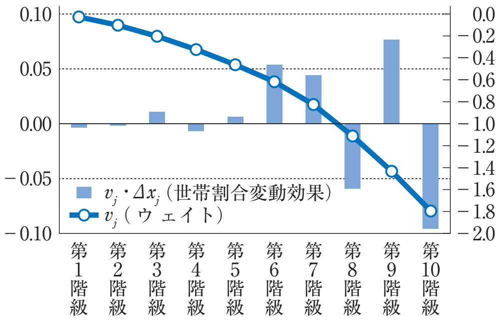
付図 1　ジニ係数の 2 時点間変化にたいする階級別寄与度（世帯割合変動効果と所得割合変動効果）

（出所）付表 1



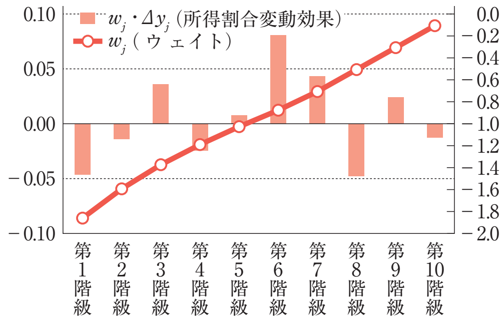
付図 2　階級別寄与度（所得割合変動効果）($z_j \cdot \Delta y_j$) とウェイト (z_j)（五分位区分）

（出所）付表 2



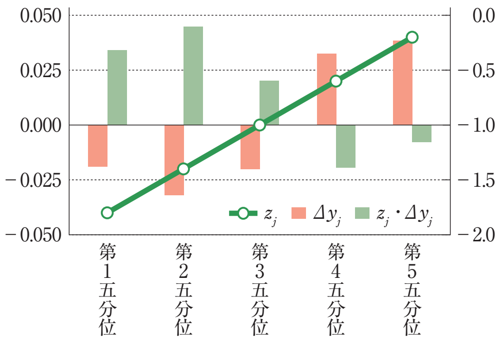
付図 3　世帯割合変動効果 ($v_j \cdot \Delta x_j$) とウェイト (v_j)

（出所）付表 1



付図 4　所得割合変動効果 ($w_j \cdot \Delta y_j$) とウェイト (w_j)

（出所）付表 1



付図 5　ウェイト (z_j)，所得割合の 2 時点間変化 (Δy_j)，階級別寄与度（所得割合変動効果）($z_j \cdot \Delta y_j$)（五分位区分）

（出所）付表 2