タイトル	相加平均，相乗平均，調和平均
著者	木村，和範；KIMURA，Kazunori
引用	季刊北海学園大学経済論集，67(4)：55-70
発行日	2020-03-31

《論説》

相加平均，相乗平均，調和平均

木　村　和　範*

〈要旨〉

正の２数 a，c にかんする相加平均（$\mathfrak{m}_A$），相乗平均（$\mathfrak{m}_G$），調和平均（$\mathfrak{m}_H$）は，直径が $a+c$ の円（Fig. 1），または斜辺の長さが $a+c$ の直角三角形（Fig. 2）で図示される。

〈Abstract〉

The arithmetic ($\mathfrak{m}_A$), the geometric ($\mathfrak{m}_G$) and the harmonic mean ($\mathfrak{m}_H$) of two positive numbers (a, c) are illustrated with a circle whose diameter is $a+c$ (Fig. 1), or with a right triangle of which the length of hypotenuse is $a+c$ (Fig. 2).

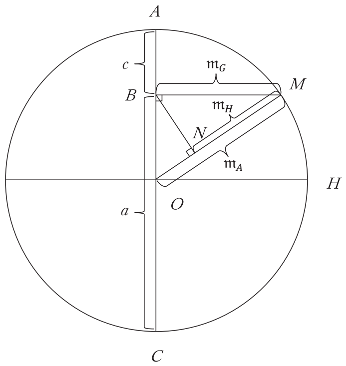


Fig. 1. A Circle and Three Types of Means

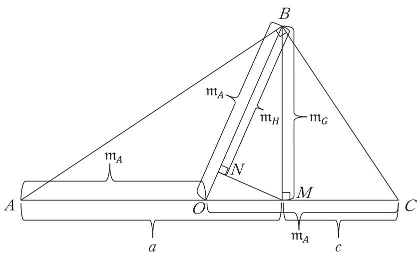


Fig. 2. A Right Triangle and Three Types of Means

〈叙述の順序〉

はじめに

１．古典的比例関係を満たす中項としての平均

(1)　算術的比例関係を満たす中項としての相加平均

(2)　幾何学的比例関係を満たす中項としての相乗平均

(3)　調和的比例関係を満たす中項としての調和平均

---

*　本学名誉教授

はじめに

３つの正数（a，b，c）が

$$a>b>c>0$$

という関係にあるとき，系列の両端に挟まれた b を「中項（termine centale）」と言う[(1)]。

ここで，３数から２数の組を２つ（たとえば，a と b，b と c）任意に作り，組ごとに２数の差をとる（たとえば，$(a-b)$ と $(b-c)$）。その比（$(a-b):(b-c)$）が，同じ３数から取り出した単一の数どうしの比（$a:a$），あるいは異なる２数の比（$(a:b)$，もしくは $(a:c)$）と等しいとおくとき，たとえば次のような等式が得られる。

$$(a-b):(b-c)=a:a \tag{1}$$
$$(a-b):(b-c)=a:b \tag{2}$$
$$(a-b):(b-c)=a:c \tag{3}$$

コッラド・ジニによれば，古代ギリシア（とりわけピュタゴラス学派）の数論では，これらの比例関係（proporzione）のうち，(1)式は「算術的比例関係（p. aritmetica）」，(2)式は「幾何学的比例関係（p. geometrica）」，(3)式は「調和的比例関係（p. harmonica）」と言われ，３つの比例関係は「古典的比例関係（p. classiche）」と総称された[(2)]。後に示すように，これらの比例関係を満たす中項の値（b）は，それぞれ２数（a，c）の相加平均 $\mathfrak{m}_A$，相乗平均 $\mathfrak{m}_G$，調和平均 $\mathfrak{m}_H$ に等しい。このことから，古代ギリシアでは，平均概念が形成されていたと見る論者[(3)] もいるが，平均という概念は存在して

⑴　Corrado Gini, *Le Medie,* Milano, 1958［Gini (1958)］p.3.（木村和範「比例関係と平均」同『ジニの統計理論』共同文化社，2010 年，第 4 章，160 頁。）

⑵　正の３数にかんする比例関係について，ピュタゴラス学派（ニコマコスとパッポス）は，これらの３個に加えて全部で 10 個の比例関係を定式化している。ピュタゴラス学派の構想を拡張したジニは，さらに６つの比例関係を追加した（Gini (1958), p.3.（木村「比例関係と平均」（前掲），154 頁））。

⑶　①Th. L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, Oxford, 1931（平田寛訳『ギリシア数学史　Ⅰ』共立出版，1959 年，49 頁以下；② C. B. Boyer, A *History of Mathematics*, New York, 1968（加賀美鐵雄，浦田由有訳『数学の歴史　Ⅰ』朝倉書店，1983 年，77 頁）。

おらず，その萌芽形態が見られるに過ぎないという見解(4) もある。

先の大戦以前のこの国では古代ギリシアの伝統を汲んで，相加平均は算術平均とも言われ，また相乗平均は幾何平均とも言われていた(5)。「算術」・「幾何」という冠は，それぞれの平均をあたえる比例関係にたいする呼称に対応している。そもそも比例関係が「算術的」とか「幾何学的」とか言われるのはなぜであろうか(6)。この問題は今後の課題として措定される。本稿は，かかる課題を検討するための予備的考察である。

叙述の順序は以下のとおりである。「1．古典的比例関係を満たす中項としての平均」では，$a>b>c>0$ の順に並ぶ3数にかんする比例関係の中項が様々な平均に等しいことを述べる。「2．音楽的比例関係」では，上で求められた3つの平均の数学的関係を示す比例関係について述べる。「3．3つの平均についての幾何学的説明」と「4．直角三角形と3つの平均」では，2数にかんする相乗平均だけでなく，相加平均と調和平均もまた幾何学的に説明できることを述べる。

1．古典的比例関係を満たす中項としての平均

それぞれの比例関係を満たす中項（b）が，正の2数（a，c）にかんする「平均」であることを以下で示す。

(1) 算術的比例関係を満たす中項としての相加平均

$$(a-b):(b-c)=a:a \qquad (1)［再掲］$$

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{a}$$

$$a-b=b-c$$

$$2b=a+c\ \left(\Rightarrow b:(a+c)=1:2\left(=\frac{1}{2}:1\right)\right)$$

$$b=\frac{a+c}{2} \qquad (4)$$

以上から，(1)式を満たす中項 b は，正の2数（a，c）の相加平均 $\mathfrak{m}_A$ であることが分かる。したがって，

$$b=\mathfrak{m}_A \qquad (5)$$

(2) 幾何学的比例関係を満たす中項としての相乗平均

$$(a-b):(b-c)=a:b \qquad (2)［再掲］$$

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b}$$

$$ab-b^2=ab-ac$$

$$b^2=ac\ (\Rightarrow a:b=b:c)$$

$$b=\sqrt{ac} \qquad (6)$$

以上から，(2)式を満たす中項 b は，正の

(4) 「ギリシア人たちが『平均（media）』という言葉を使用することはなく，また平均という今日的な概念を陽表的には定式化しなかったことは確言できる。しかし，それにもかかわらず，彼らの研究は，その後，平均概念へと導き，3つの古典的比例関係と反調和的比例関係の中項をもとめる論理過程の嚆矢となった。」(Gini (1958), p.13.)

ここに，「反調和的比例関係（p. antiarmonica)」とは，調和的比例関係（(3)式）の右辺を構成する各項を入れ替えて得られる次の比例関係のことである。

$$(a-b):(b-c)=c:a \qquad ①$$

①式を満たす中項の値は

$$b=\frac{a^2+c^2}{a+c} \qquad ②$$

である(*cf.* Gini (1958), p.14)。

(5) 中学校と高等学校の数学では，調和平均という用語は，今日でも使用されているが，半世紀以上も前から算術平均には相加平均という用語が，また幾何平均には相乗平均という用語が当てられている。

(6) かつて等差数列（級数）が算術数列（級数）と言われ，また，等比数列（級数）が幾何数列（級数）と言われたことについても同様の疑問が生ずる。

2 数（a, c）の相乗平均 $\mathfrak{m}_G$ であることが分かる。したがって，

$$b = \mathfrak{m}_G \tag{7}$$

⑶　調和的比例関係を満たす中項としての調和平均

$$(a-b):(b-c)=a:c \qquad (3)\,[\text{再掲}]$$

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$$

$$ac-bc=ab-ac$$

$$b(a+c)=2ac \ \ (\Rightarrow b:ac=2:(a+c))$$ [7]

$$b=\frac{2ac}{a+c} \tag{8}$$

$$=2\times\frac{ac}{a+c}$$

$$=2\times\frac{1}{\frac{a+c}{ac}}$$

$$=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$$

$$=\frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2}}$$

以上から，⑶式を満たす中項 b は，正の 2 数（a, c）の逆数$\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{c}\right)$の相加平均$\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2}\right)$の逆数であり，$a$, c の調和平均 $\mathfrak{m}_H$ であることが分かる。したがって，

$$b = \mathfrak{m}_H \tag{9}$$

＊　＊　＊　＊　＊

古典的比例関係に対応する平均を要約すれば，以下のようになる。

$$\begin{cases} \text{算術的比例関係→相加(算術)平均}: \mathfrak{m}_A=\dfrac{a+c}{2} & (10) \\ \text{幾何学的的比例関係→相乗(幾何)平均}: \mathfrak{m}_G=\sqrt{ac} & (11) \\ \text{調和的比例関係→調和平均}: \mathfrak{m}_H=\dfrac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2}} & (12) \end{cases}$$

2．音楽的比例関係

⑴　恒等式としての音楽的比例関係

ジニによれば，ピュタゴラス学派では，次のような比例関係を「音楽的比例関係（p. musicale)」と言い，ゲラサのニコマコス（ピュタゴラス学派の数学者）は「完全比例関係（p. completa)」と名付けた[8]。

---

(7)　これを変形すれば，以下のようになる。

$$b:ac=1:\frac{a+c}{2}$$

$$b:\mathfrak{m}_G{}^2=1:\mathfrak{m}_A \qquad ③$$

以下で述べるように，上式の b は調和平均（$\mathfrak{m}_H$）であるから，$\mathfrak{m}_H$ をあたえる比例関係には，相加平均（$\mathfrak{m}_A$）と相乗平均（$\mathfrak{m}_G$）が内在している。このことは，⑻式を

$$b=\frac{ac}{\frac{a+c}{2}}$$

と変形すれば，調和平均が$\mathfrak{m}_G$の平方と$\mathfrak{m}_A$の比の値としてあたえられることからも明らかである。

なお，③式からは，次式を得る。

$$\mathfrak{m}_H:\mathfrak{m}_G{}^2=1:\mathfrak{m}_A$$

$$\mathfrak{m}_G{}^2=\mathfrak{m}_A\cdot\mathfrak{m}_H$$

これは次項で述べる音楽的比例関係である（⒁式参照)。

(8)　Gini (1958), p.5. この「音楽的比例関係」のことを，ボイヤーは「黄金比」と言っている。ボイヤーの「黄金比」とは，「ある二つの数[a, c]のはじめの数[a]に対する二つの数の算術平均[$(a+c)/2$]の比[$a:(a+c)/2$]は，二つの数の調和平均[$2ac/(a+c)$]に対する 2 番目の数[c]の比[$2ac/(a+c):c$]に等しい[$a:(a+c)/2=2ac/(a+c):c$]という関係」のことである。(Carl B. Boyer，前掲訳書，77 頁。ただし，[　] 内は引用者による。）この関係式は，後述の⒀式（音楽的比例関係）と同値である。ユークリッド以来

$$a:\frac{a+c}{2}=\frac{2ac}{a+c}:c \tag{13}$$

この比例関係は次式で示される恒等式から誘導される。すなわち，

$$\begin{aligned}&1=1\\&ac=ac\\&\quad=\frac{a+c}{2}\times\frac{2}{a+c}\times ac\\&\quad=\frac{a+c}{2}\times\frac{2ac}{a+c}\\\therefore\quad &a:\frac{a+c}{2}=\frac{2ac}{a+c}:c\end{aligned}$$

(13)［再掲］

⑵ 音楽的比例関係と3つの平均

(13)式左辺の $\frac{a+c}{2}$ は正の2数（a，c）の相加平均 $\mathfrak{m}_A$ である（(4)式と(5)式による)。(13)式右辺の $\frac{2ac}{a+c}$ は，同じ正の2数（a，c）の調和平均 $\mathfrak{m}_H$ である（(8)式と(9)式による)。また，ac は相乗平均の平方である（(6)式による)。したがって，(13)式で示される音楽的比例関係は次のようになる。

$$a:\mathfrak{m}_A=\mathfrak{m}_H:c \tag{13$'$}$$

$$ac=\mathfrak{m}_A\cdot\mathfrak{m}_H$$

$$\therefore\quad \mathfrak{m}_G{}^2=\mathfrak{m}_A\cdot\mathfrak{m}_H \tag{14}$$

以上から，音楽的比例関係あるいは完全比例関係は，(14)式に帰着することが明らかになる。この(14)式は，相乗平均の平方が相加平均と調和平均の積に等しいことを示しており，これよって，3数にかんする古典的比例関係を構成する3つの比例関係の数学的関係が明らかになる。換言すれば，音楽的比例関係（完全比例関係）とは，古典的比例関係を構成する3つの比例関係の間に成立する数学的関係を示している。なお，(14)式を変形すると，次のようになり，3つの平均のそれぞれが，たがいに他の2つの平均によってあたえられることが分かる。

$$\begin{cases}\text{相加平均}:\mathfrak{m}_A=\dfrac{\mathfrak{m}_G{}^2}{\mathfrak{m}_H}\\\text{相乗平均}:\mathfrak{m}_G=\sqrt{\mathfrak{m}_A\cdot\mathfrak{m}_H}\\\text{調和平均}:\mathfrak{m}_H=\dfrac{\mathfrak{m}_G{}^2}{\mathfrak{m}_A}\end{cases} \tag{14$'$}$$

⑶ 音楽的比例関係の一般化

系列

$$a_1>a_2>\cdots\cdots>a_n>0$$

にかんして計算される3つの平均は次のようになる。

$$\begin{cases}\text{相加平均}:\mathscr{M}_A=\dfrac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}\\\text{相乗平均}:\mathscr{M}_G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n}\\\text{調和平均}:\mathscr{M}_H=\dfrac{1}{\dfrac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}}\end{cases} \tag{15}$$

上の系列のように一般に項数が n のときに，2数（a，c）にかんする音楽的比例関係

$$\mathfrak{m}_G{}^2=\mathfrak{m}_A\cdot\mathfrak{m}_H$$

(14)［再掲］

を拡張して，

$$\mathscr{M}_G{}^n=\mathscr{M}_A\cdot\mathscr{M}_H \tag{16}$$

が成立するかどうかを考察する。(15)式により(16)式右辺は次のようなる。

の伝統によれば，長さが $x+y$ の線分（$x<y$）が $x:y=y:(x+y)$ の関係にあるとき（$x:y=1:1.61803\ 3989\ \cdots\cdots$)，この比を「中末比（media ed estrema ragione)」）と言う。線分のこのような分割は「黄金分割（sezione aurea del segmento)」と言われるので（Gini (1958), p.5)，上述のボイヤーの用語法は紛らわしい。

$$\mathcal{M}_A\cdot\mathcal{M}_H=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_n}}{n}}$$

$$=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$$

$$=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{\dfrac{(a_2a_3\cdots\cdots a_n)+(a_1a_3\cdots\cdots a_n)+\cdots\cdots+(a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1})}{a_1a_2\cdots\cdots a_n}}$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots\cdots a_n(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)}{(a_2a_3\cdots\cdots a_n)+(a_1a_3\cdots\cdots a_n)+\cdots\cdots+(a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1})}$$

$$=\mathcal{M}_G{}^n\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{(a_2a_3\cdots\cdots a_n)+(a_1a_3\cdots\cdots a_n)+\cdots\cdots+(a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1})} \tag{17}$$

$a_1>a_2>\cdots\cdots>a_n>0$のとき，

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{(a_2a_3\cdots\cdots a_n)+(a_1a_3\cdots\cdots a_n)+\cdots\cdots+(a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1})}>0 \tag{18}$$

であり，かつ

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{(a_2a_3\cdots\cdots a_n)+(a_1a_3\cdots\cdots a_n)+\cdots\cdots+(a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1})}\neq 1 \tag{19}$$

である[9]。(18)式と(19)式により

$$\mathcal{M}_G{}^n\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{(a_2a_3\cdots\cdots a_n)+(a_1a_3\cdots\cdots a_n)+\cdots\cdots+(a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1})}\neq\mathcal{M}_G{}^n$$

すなわち，

$$\mathcal{M}_A\cdot\mathcal{M}_H\neq\mathcal{M}_G{}^n$$

となり，

$$\mathcal{M}_G{}^n=\mathcal{M}_A\cdot\mathcal{M}_H \tag{16}$$［再掲］

は成立するとは言いがたく，音楽的比例関係は，これを n 項まで拡張して一般化することができない。

3．平均にかんする幾何学的説明

(1)　相乗平均

正の 2 数（a，c）にかんする相乗平均 b が「幾何」平均と言われるのは，b と 2 数（a，c）の関係が図形によって幾何学的に説明できるからであると言われることがある。一辺の長さを a，c とする長方形の面積（$S_1=ac$）が，一辺の長さを b とする正方形の面積（$S_2=b^2$）に等しいとすれば，上述の長方形の面積と正方形の面積の間には，次のような数学的関係がある。

$$S_2=S_1$$
$$\therefore\quad b^2=ac$$

上式の両辺の平方根をとれば，

$$b=\sqrt{ac}$$

となる。ここに，b は，2 数（a，c）の相乗平均であるから，相乗平均を求めるとは，任意の長方形の面積と同じ大きさの面積の正方形の一辺の長さを求めることに等しい（図 1)。

また，任意の正の 3 数（a，b，c）にかんする相乗平均 g は

$$g=\sqrt[3]{abc}$$

であるが，この g は，縦，横，高さをそれぞれ a，b，c とする直方体の体積（$V_1=abc$）と同じ体積（$V_2=g^3$）をあたえる立方体の一辺の長さ（g）に等しい。このことから，3 数にかんする相乗平均 g を求めることは，任意の直方体と同じ体積の立方体の一辺の長さを求めることと同義である。

---

(9)　$a_i=1$ のとき（$i=1,2,\ldots,n$），

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{(a_2a_3\cdots\cdots a_n)+(a_1a_3\cdots\cdots a_n)+\cdots\cdots+(a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1})}=\frac{n}{1\times n}=1 \text{④}$$

であるが，題意は

$$a_1>\cdots>a_i>a_{i+1}>\cdots>a_n>0$$

であるから，④式は成立しない。

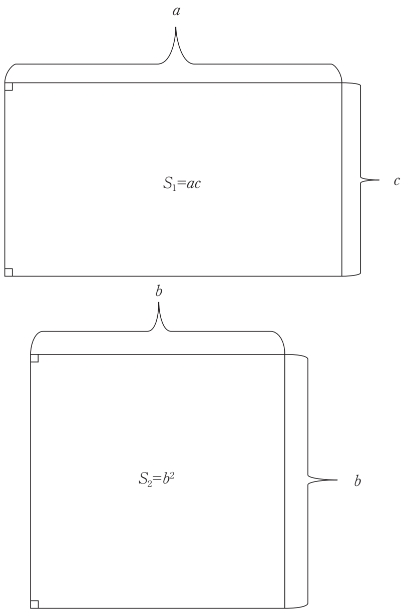


図１　長方形の面積（S_1）と正方形の面積（S_2）
$ac=b^2$ のとき，積（ac）をあたえる２数（a と c）の相乗平均 $b(=\sqrt{ac})$ は，正方形の一辺の長さに等しい。

以上，要するに相乗平均は長方形の面積（あるいは直方体の体積）と面積（あるいは体積）が同一になる正方形（あるいは立方体）の一辺を求めることに等しい。このことから，相乗平均は図形によって，その数理的意味を説明可能であり，この意味において相乗平均は幾何平均と言われる。── このように説明されることがある。

しかし，２数（a，c）にかんする相加平均は，最大数（a）との差（$a-b$）と最小数（c）との差（$b-c$）が等しくなるような b，すなわち相加平均は

$$a-b=b-c$$

を満たす b であるから，その位置を図形で示せば，線分 $\overline{CA}$ の中点 B である（図２参照）。この中点を求めるには，コンパスと定規を使って，点 A と点 C から等距離の点を直線 $\overline{OD}$ 上にマークすればよい。したがって，相加平均もまた図形によって説明することができる。図形的な説明は，相乗平均に固有ではない。

以下では，２つの異なる正数にかんする相加平均と相乗平均だけでなく，調和平均もまた，図形的な説明が可能であることを示し[(10)]，相乗平均のみが幾何学的な説明と親和的であるという見解を検討する。

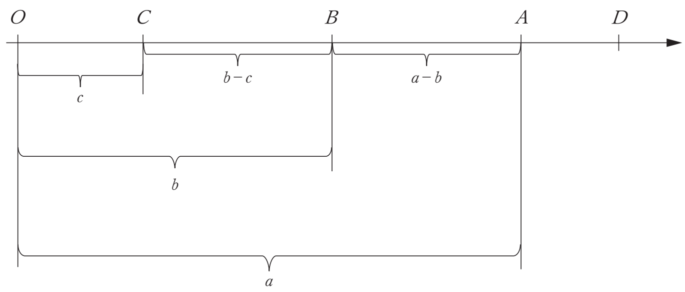


図２　線分 $\overline{CA}$ の中点としての点 B（$\overline{CB}=\overline{BA}$）
相加平均もまた図によって幾何学的に説明される。

（10）　以下の叙述は，①「相乗平均（幾何平均）の意味，図形的イメージ，活躍する例」（https://mathwords.net/soujouheikin, accessed on Dec. 15, 2019），および②「いろんな平均たちの関係を『たった１つの円』で可視化してみる」（https://www.yukisako.xyz/entry/average, accessed on Dec. 15, 2019）にもとづく。ただし，本稿における図形の形状，文字遣い等は，①②とは異なる。

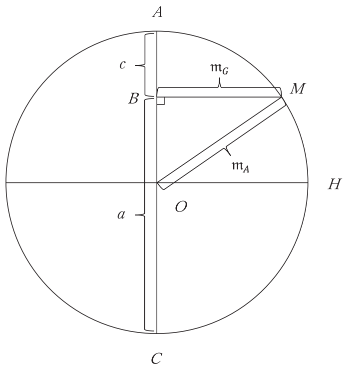


図 3　円と相加平均・相乗平均（$\overline{AO}\perp\overline{BM}$）
直径を（$a+c$）とする円の中に，相加平均 $\mathfrak{m}_A(=\frac{1}{2}(a+c)$ と相乗平均 $\mathfrak{m}_G(=\sqrt{ac})$ が表示される。

⑵　相加平均，相乗平均，調和平均の統一的説明

3 つの正数（$a>b>c>0$）にかんする相加平均，相乗平均，調和平均は直径が $a+c$ の円（中心は点 O）によって統一的に表現される。

① 相加平均 $\mathfrak{m}_A$

円の直径

$$a+c$$

は線分 $\overline{AC}$ である（図 3）。線分 $\overline{OM}$ はこの円の半径である。したがって，

$$\overline{OM}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}$$
$$=\frac{1}{2}(a+c) \tag{20}$$

である。(20)式は，a と c の相加平均 $\mathfrak{m}_A$ であるから，$\mathfrak{m}_A$ は図中の線分 $\overline{OM}$ によって表すことができる。

② 相乗平均 $\mathfrak{m}_G$

弧 $\widehat{AH}$ 上の点 M から線分 $\overline{OA}$ 上に垂線を引き，その交点（足）を B とする（$\overline{AO}\perp\overline{BM}$）。このとき，線分$\overline{OB}$の長さは，

$$\overline{OB}=\overline{OA}-\overline{BA}$$
$$=\overline{OM}-\overline{BA}$$

（線分 $\overline{OA}$ と $\overline{OM}$ はいずれも円の半径であり，相等しい）

$$=\frac{1}{2}(a+c)-c$$

（$\overline{BA}=c$）

$$=\frac{1}{2}(a+c-2c)$$
$$=\frac{1}{2}(a-c) \tag{21}$$

である。

$\triangle OBM$ は直角三角形であるから（$\angle OBM=\angle\mathrm{R}$），この三角形においては三平方の定理が成立している。すなわち，

$$\overline{OM}^2=\overline{OB}^2+\overline{BM}^2$$

よって，

$$\overline{BM}^2=\overline{OM}^2-\overline{OB}^2 \tag{22}$$

である。ここに，

$$\begin{cases}\overline{OM}=\frac{1}{2}(a+c) & (20)［再掲］\\ \overline{OB}=\frac{1}{2}(a-c) & (21)［再掲］\end{cases}$$

である。この 2 式を(22)式に代入すれば，次式を得る。

$$\overline{BM}^2=\left\{\frac{1}{2}(a+c)\right\}^2-\left\{\frac{1}{2}(a-c)\right\}^2$$
$$=\left(\frac{a+c}{2}+\frac{a-c}{2}\right)\left(\frac{a+c}{2}-\frac{a-c}{2}\right)$$
$$=ac$$

ゆえに，

$$\overline{BM}=\sqrt{ac}$$
$$=\mathfrak{m}_G \tag{23}$$

$\sqrt{ac}$ は a と c の相乗平均であるから，円の中の線分 $\overline{BM}$ によって相乗平均が表された

（図３）。

③　調和平均 $\mathfrak{m}_H$

図３から△OBM（直角三角形）を抜き出して，その斜辺 $\overline{OM}$ にたいして点 B から垂線を引き，斜辺 $\overline{OM}$ との交点（足）を N とする（図４）。このときに作られる△BNM（直角三角形）に着目し，これと△OBM（直角三角形）を対比する（図５）。

２つの直角三角形（△BNM と△OBM）において，

$$\angle BNM = \angle OBM = \angle \mathrm{R}$$
$$\angle BMN = \angle OMB = \alpha$$

となり，２角が等しいから，これらの２つの直角三角形は相似の関係にある（２角相当)。すなわち，

$$\triangle BNM \backsim \triangle OBM$$

したがって，２つの直角三角形の２辺については次の関係が成立する。

$$\overbrace{\overline{NM}:\overline{BM}}^{\triangle BNM} = \overbrace{\overline{BM}:\overline{OM}}^{\triangle OBM} \tag{24}$$

内項の積と外項の積が等しいので，(24)式は

$$\overline{OM}\cdot\overline{NM} = \overline{BM}^2 \tag{24$'$}$$

となる。(24)′式を整理すれば，次のようになる。

$$\overline{NM} = \frac{\overline{BM}^2}{\overline{OM}}$$
$$= \frac{\mathfrak{m}_G{}^2}{\mathfrak{m}_A} \qquad \text{((20)式と(23)式による)}$$
$$= \frac{ac}{\frac{a+c}{2}}$$
$$= \frac{ac\cdot\frac{1}{ac}}{\frac{a+c}{2}\cdot\frac{1}{ac}}$$
$$= \frac{1}{\frac{a+c}{2ac}}$$
$$= \frac{2}{\frac{a+c}{ac}}$$
$$= \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$$

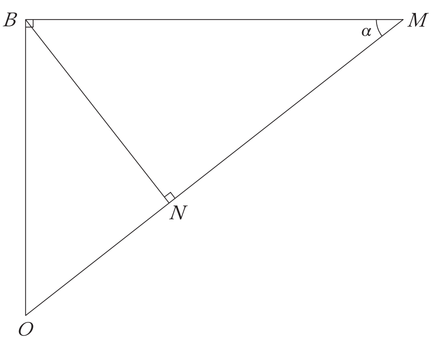


図４　直角三角形（△OBM）と垂線$\overline{BN}$
△OBM∽△BNM

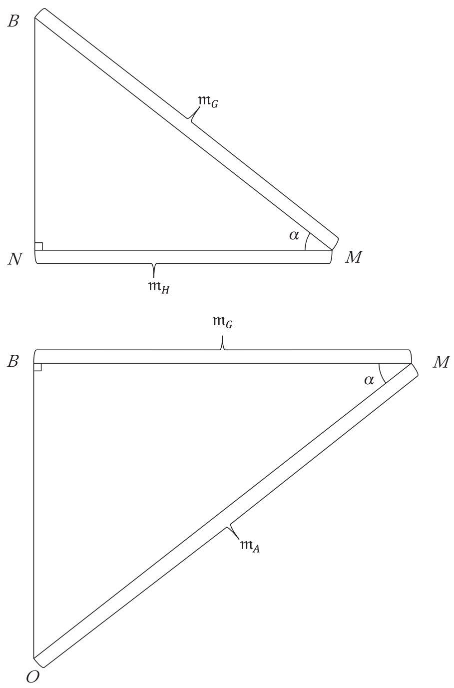


図５　２つの直角三角形（△OBM と△BNM）
$\overline{NM}$ は調和平均 $\mathfrak{m}_H$ に等しい。

$$=\frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}}{2}} \tag{25}$$

(25)式は，2数（a，c）にかんするそれぞれの逆数$\left(\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{c}\right)$の相加平均$\left(\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}}{2}\right)$の逆数であるから，2数（$a$，$c$）の調和平均である。すなわち，

$\overline{NM}=\mathfrak{m}_H$

である（図5）。

④　直径が$(a+c)$の円と3つの平均 ── 本項の要約 ──

以上の考察により，2数（a，b）にかんする3つの平均（相加平均$\mathfrak{m}_A$，相乗平均$\mathfrak{m}_G$，調和平均$\mathfrak{m}_H$）は，直径を$(a+c)$とする円によって表すことができる（図6）。

この図6を用いれば，相加平均$\mathfrak{m}_A$と相乗平均$\mathfrak{m}_G$の大小関係，および相乗平均$\mathfrak{m}_G$と調和平均$\mathfrak{m}_H$の大小関係を明らかにすることができる。

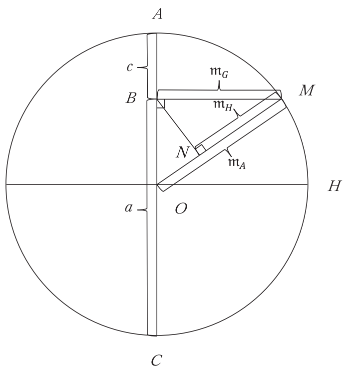


図6　円と3つの平均（$\overline{OM}\perp\overline{BN}$）
直径：$\phi=a+c$
相加平均：$\mathfrak{m}_A=\overline{OM}$
相乗平均：$\mathfrak{m}_G=\overline{BM}$
調和平均：$\mathfrak{m}_H=\overline{NM}$

(a)　相加平均$\mathfrak{m}_A$と相乗平均$\mathfrak{m}_G$の大小関係

図6より明らかであるが，$\triangle OBM$において，斜辺（$\overline{OM}$）は他の一辺（$\overline{BM}$）よりも長いので，

$\overline{OM}>\overline{BM}$

よって，

$\mathfrak{m}_A>\mathfrak{m}_G$

cが大きくなってaの値に近づき，究極的に

$c\ \rightarrow\ a$

となるとき（点Bが限りなく点Oに近づくとき），点Mは点Hに近づき，その結果，線分$\overline{BM}$は，線分$\overline{OM}$と同じ長さに近づき，

$\mathfrak{m}_G\ \rightarrow\ \mathfrak{m}_A$

である。しかし，題意によりaはcよりも大きいので（$a>c$），相加平均$\mathfrak{m}_A$は相乗平均$\mathfrak{m}_G$よりも大きい[(11)]。

(b)　相乗平均$\mathfrak{m}_G$と調和平均$\mathfrak{m}_H$の大小関係

これもまた図6より明らかであるが，$\triangle BNM$（直角三角形）において，斜辺（$\overline{BM}$）は，他の一辺（$\overline{NM}$）よりも長いので，

---

(11)　$a>c>0$のとき，$\mathfrak{m}_A>\mathfrak{m}_G$であることの代数的な証明は以下のとおりである。$\mathfrak{m}_A>0, \mathfrak{m}_G>0$であるから，それぞれを平方しても大小関係は変わらない。したがって，次のようになる。

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_A{}^2-\mathfrak{m}_G{}^2&=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2-\left(\sqrt{ac}\right)^2\\&=\left(\frac{a^2+2ac+c^2}{4}\right)-ac\\&=\frac{a^2-2ac+c^2}{4}\\&=\frac{(a-c)^2}{4}>0\ (\because a>c)\end{aligned}$$

よって$\mathfrak{m}_A>\mathfrak{m}_G$

q.e.d.

なお，$\mathfrak{m}_A{}^2-\mathfrak{m}_G{}^2=0$，すなわち$\mathfrak{m}_A{}^2=\mathfrak{m}_G{}^2$ ($\Leftrightarrow\mathfrak{m}_A=\mathfrak{m}_G$)となる条件は，$a=c$である。

$$\overline{BM} > \overline{NM}$$

よって，

$$\mathfrak{m}_G > \mathfrak{m}_H$$

c が大きくなって a の値に近づき，究極的に

$$c \ \rightarrow \ a$$

となるとき（点 B が限りなく点 O に近づくとき），点 N は点 O に近づき，その結果，線分（$\overline{NM}$）は，線分（$\overline{BM}$）と同じ長さに近づき，

$$\mathfrak{m}_H \ \rightarrow \ \mathfrak{m}_G$$

である。しかし，題意により，a は c よりも大きいので（$a>c$），相乗平均 $\mathfrak{m}_G$ は調和平均 $\mathfrak{m}_H$ よりも大きい(12)。

＊　＊　＊　＊　＊

以上から，大小関係が $a>c$ となるような正の２数にかんする相加平均 $\mathfrak{m}_A$，相乗平均 $\mathfrak{m}_G$，および調和平均 $\mathfrak{m}_H$ の大小関係は，以下のようになる。

$$\mathfrak{m}_A > \mathfrak{m}_G > \mathfrak{m}_H \qquad (26)$$

なお，(26)式における等号の成立条件は

$$a=c$$

である。

4．直角三角形と３つの平均

２数（a と c）の相加平均 $\mathfrak{m}_A$，相乗平均 $\mathfrak{m}_G$，調和平均 $\mathfrak{m}_H$ が，直角三角形 ABC のなかに隠れていることを示す（図７）。$\triangle ABC$ は，線分 $\overline{AC}$ を斜辺とし，$\angle ABC$ を直角とする。そして，頂点 B からの垂線と斜辺との交点（足）を M とする。

ここに，

$$\begin{cases} \overline{AM} = a \\ \overline{MC} = c \end{cases}$$

とすると，斜辺の長さは

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \overline{AM} + \overline{MC} \\ &= a + c \end{aligned}$$

である。

後の検討のために，$\triangle ABC$ において，

$$\angle BAC = \alpha \qquad (27)$$

とすると，

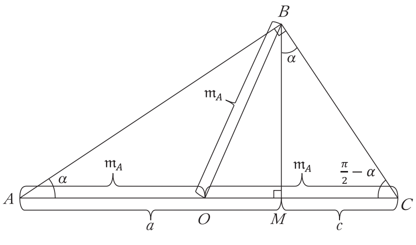


図７　直角三角形 ABC
（$\overline{AC} = \overline{AM} + \overline{MC} = a + c, \overline{AO} = \overline{OC}$）
相加平均 $\mathfrak{m}_A$：$\overline{AO}$，$\overline{OC}$，$\overline{OB}$

（12）$a>c>0$ のとき，$\mathfrak{m}_G > \mathfrak{m}_H$ であることの代数的な証明は以下のとおりである。$\mathfrak{m}_G>0, \mathfrak{m}_H>0$ であるから，それぞれを平方しても大小関係は変わらない。したがって，次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_G{}^2 - \mathfrak{m}_H{}^2 &= \left(\sqrt{ac}\right)^2 - \left(\frac{2ac}{a+c}\right)^2 \\ &= \frac{ac(a+c)^2 - 4a^2c^2}{(a+c)^2} \\ &= \frac{ac\{(a^2+2ac+c^2)-4ac\}}{(a+c)^2} \\ &= \frac{ac(a^2-2ac+c^2)}{(a+c)^2} \\ &= \frac{ac(a-c)^2}{(a+c)^2} > 0 \ (\because a>c>0) \end{aligned}$$

よって $\mathfrak{m}_G > \mathfrak{m}_H$

q.e.d.

なお，$\mathfrak{m}_G{}^2 - \mathfrak{m}_H{}^2 = 0$，すなわち $\mathfrak{m}_G{}^2 = \mathfrak{m}_H{}^2$（$\Leftrightarrow \mathfrak{m}_G = \mathfrak{m}_H$）となる条件は，$a=c$ である。

$$\angle BCA = \frac{\pi}{2} - \alpha \tag{28}$$

$$(\because \angle ABC = \angle \mathrm{R})$$

であることを確認しておく。

また，$\triangle ABC$ の $\angle BCA$ と $\triangle BMC$ の $\angle MCB$ は同一であるから，次のようになることも指摘しておく。

$$\angle MCB = \angle BCA = \frac{\pi}{2} - \alpha \tag{29}$$

(1)　相加平均

斜辺 $\overline{AC}$ を 2 等分する点（中点）を O とする（図 7）。斜辺の長さは $a+c$ であるから，この斜辺を 2 等分する線分 $\overline{AO}$ の長さは，

$$\frac{a+c}{2}$$

である。これは，a と c の相加平均 $\mathfrak{m}_A$ に等しい。また，点 O によって線分 $\overline{AC}$ が 2 等分されているので，

$$\overline{OC} = \overline{AO}$$

となり，

$$\overline{OC} = \overline{AO} = \frac{a+c}{2}$$

である。したがって，$\triangle ABC$ における $\overline{AO}$ と $\overline{OC}$ は相加平均 $\mathfrak{m}_A$ を示す。

なお，一般に直角三角形の斜辺の中点 O は，その三角形に外接する円の中心（外心）であるから，線分 $\overline{AO}$ と $\overline{OB}$ はいずれもこの外接する円の半径（r）である[(13)]。したがって，

(13)　直径を線分 $\overline{UW}$ とする円（中心は点 O）が外接する $\triangle UVW$ において，頂点 V が（外接する円の）円周上にあるとする（図(注 13)）。このとき，$\triangle UVW$ が直角三角形であること（$\angle UVW = \angle \mathrm{R}$）の証明は以下のとおりである。

$\angle VUO = \theta$ とする。$\overline{UO}$ と $\overline{OV}$ は，ともに同一の円の半径である（すなわち，$\overline{UO} = \overline{OV}$ である）から，$\triangle UVO$ は 2 等辺三角形である。したがって，

$$\angle VUO = \angle UVO = \theta \tag{⑤}$$

よって，

$$\angle UOV = \pi - 2\theta$$

である。また，

$$\begin{aligned}\angle VOW &= \pi - \angle UOV \\ &= \pi - (\pi - 2\theta) \\ &= 2\theta\end{aligned}$$

$\triangle VOW$ の $\overline{OV}$ と $\overline{OW}$ はともに外接円の半径であるから（$\overline{OV} = \overline{OW}$），$\triangle OVW$ は二等辺三角形である。この三角形において

$$\angle VOW + \angle OVW + \angle OWV = \pi \tag{⑥}$$

である。すでに述べたように，

$$\overline{OV} = \overline{OW}$$

であり，$\triangle OVW$ の内角の和を示す⑥式は

$$\angle VOW + 2 \times \angle OVW = \pi \tag{⑥'}$$

よって

$$\begin{aligned}\angle OVW &= \frac{1}{2}(\pi - \angle VOW) \\ &= \frac{1}{2}(\pi - 2\theta) \\ &= \frac{\pi}{2} - \theta \end{aligned} \tag{⑦}$$

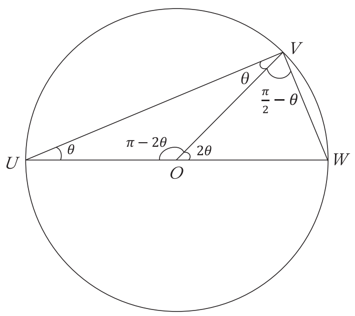
である。

⑤式と⑦式により，

$$\begin{aligned}\angle UVW &= \angle UVO + \angle OVW \\ &= \theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= \frac{\pi}{2} (= \angle \mathrm{R})\end{aligned}$$

以上から，$\triangle UVW$ は，$\angle UVW$ を直角とする直角三角形である。

q.e.d.



図(注 13)　円が外接する三角形（$\overline{UO} = \overline{OV} = \overline{OW}$）

$\triangle UVW$ は直角三角形である（$\angle UVW = \angle \mathrm{R}$）。中心角が円周角の 2 倍であることを想起すれば，

$\angle UVW = \angle \mathrm{R}$

は明らかである。

$$\overline{AO}=\overline{OB}=r$$

であり，

$$\overline{OB}=\frac{a+c}{2} \tag{30}$$

となり，相加平均 $\mathfrak{m}_A$ は線分 $\overline{OB}$ によっても示される[14]（図７）。

⑵　相乗平均

以下では，a と c の相乗平均 $\mathfrak{m}_G$ が $\triangle ABC$ における線分 $\overline{BM}$ で示されることを示す（図８）。そのために，$\triangle BMC$ において，

$$\begin{aligned}\angle CBM&=\pi-(\angle BMC+\angle MCB)\\&=\pi-\left\{\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right\}\\&\qquad((29)\text{式による})\\&=\alpha\end{aligned}$$

であることを確認しておく（図８）。

$\triangle AMB$ においては，

$$\begin{aligned}\tan\alpha&=\frac{\overline{BM}}{\overline{AM}}\\&=\frac{\overline{BM}}{a}\end{aligned} \tag{31}$$

であり，また，$\triangle BMC$ においては

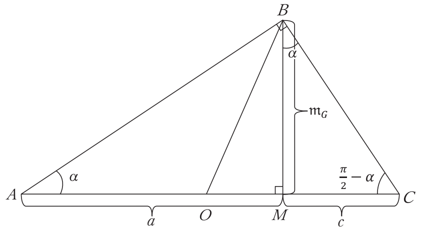


図８　$\triangle AMB \backsim \triangle BCM$（２角相当）
相乗平均 $\mathfrak{m}_G$：$\overline{BM}$

(14)　(28)式については，直角三角形 OBM に三平方の定理を適用すれば，確かめることができる（後述）。

$$\begin{aligned}\tan\alpha&=\frac{\overline{MC}}{\overline{BM}}\\&=\frac{c}{\overline{BM}}\end{aligned} \tag{32}$$

(31)式と(32)式より，

$$\frac{\overline{BM}}{a}=\frac{c}{\overline{BM}}$$

$$\therefore\quad \overline{BM}^2=ac$$

$$\overline{BM}=\sqrt{ac} \tag{33}$$

(33)式は線分 $\overline{BM}$ が a と c の相乗平均 $\mathfrak{m}_G$ であること示している（図８）[15]。

(15)　一般に直角三角形 XYZ において（$\angle XYZ=\angle \mathrm{R}$），頂点 Y から斜辺 $\overline{XZ}$ に下ろした垂線の足を点 P とし，$\overline{XP}=x$，$\overline{PZ}=y$，$\overline{YP}=h$ とすると，$\triangle XYZ$ の高さ h は x と y の相乗平均であり，

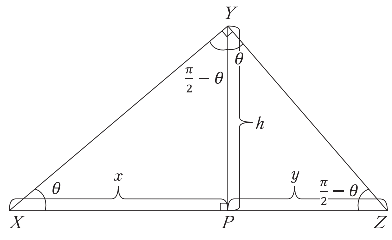
$$h=\sqrt{xy} \tag{⑧}$$

が成立する（図(注15)）。

⑧式については，本文で述べたように三角比（正接）を用い，

$$\left\{\begin{aligned}&\overbrace{\tan\theta=\frac{\overline{YP}}{\overline{XP}}=\frac{h}{x}}^{\triangle XYP}\\&\overbrace{\tan\theta=\frac{\overline{PZ}}{\overline{YP}}=\frac{y}{h}}^{\triangle YZP}\end{aligned}\right. \quad\rightarrow\quad h^2=xy$$

によって証明できるが，次のようにしても可能である。



図(注15)　直角三角形 XYZ の中の２つの直角三角形（$\triangle XYP$ と $\triangle YZP$）
高さ h は x と y の相乗平均（$h=\sqrt{xy}$）

＊　＊　＊

相加平均

$$\overline{OB}=\frac{a+c}{2}\ (=\mathfrak{m}_A) \qquad (30)\text{［再掲］}$$

を図示したとき（図７)，三平方の定理による(30)式の証明は後述することにした（脚注 14 参照)。ここで，そのことを証明する。そのためには，△OBM（直角三角形）における線分 $\overline{BM}$ の長さと線分 $\overline{OM}$ の長さが必要である。すでに，

$$\overline{BM}=\sqrt{ac} \qquad (33)\text{［再掲］}$$

を得ているので，線分 $\overline{OM}$ の長さをもとめればよい。

$$\begin{aligned}\overline{OM}&=\overline{OC}-\overline{MC}\\&=\frac{a+c}{2}-c\\&=\frac{a+c-2c}{2}\\&=\frac{a-c}{2} \qquad (34)\end{aligned}$$

直角三角形 OBM においては，次式が成立する（三平方の定理)。

$$\begin{aligned}\overline{OB}^2&=\overline{OM}^2+\overline{BM}^2\\&=\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+\left(\sqrt{ac}\right)^2\\&\qquad\text{((34)式と(33)式による)}\\&=\frac{a^2-2ac+c^2+4ac}{4}\\&=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \overline{OB}=\frac{a+c}{2}\ (=\mathfrak{m}_A) \qquad (30)\text{［再掲］}$$

q.e.d.

(3)　調和平均

△ABC のなかに作られた△OBM（直角三角形）に着目する（図９)。

△OBM の頂点 M から斜辺 $\overline{OB}$ に垂線を引き，その足を点 N とする。このとき，調和平均 $\mathfrak{m}_H$ が線分 $\overline{BN}$ で表されることを以下で示す。

２つの直角三角形（△OBM と△MBN）においては

$$\begin{cases}\angle BMO=\angle BNM=\angle \mathrm{R}\\ \angle OBM=\angle MBN=\beta\end{cases}$$

であるから（２角相当)，

$$\triangle OBM \backsim \triangle MBN$$

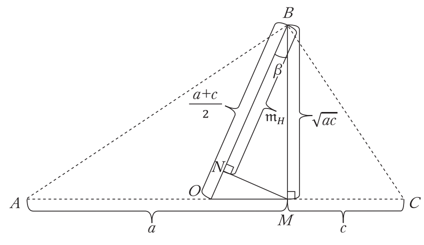


図９　２つの直角三角形（△OBM と△MBN)

$\overline{OB}=\frac{a+c}{2}=\mathfrak{m}_A$
$\overline{BM}=\sqrt{ac}=\mathfrak{m}_G$
$\overline{BN}=\mathfrak{m}_H$
$\angle OMB=\angle MNB=\angle \mathrm{R}$
$\angle OBM=\angle MBN=\beta$

△XYP における ∠$YXP(=\theta)$ および ∠$XPY(=\angle \mathrm{R})$ が，それぞれ△YZP における ∠$ZYP(=\theta)$ および ∠$YPZ(=\angle \mathrm{R})$ と相等しく，そのゆえに△XYP と△YZP は相似の関係にある（２角相当)。したがって，２つの三角形については

$\overline{XP}:\overline{YP}=\overline{YP}:\overline{PZ}$

$x:h=h:y$

が成立する。上式から

$h=\sqrt{xy}$　　⑧［再掲］

を誘導することができる。(“Triangles: Similar Right Triangles, Geometric Mean,” https://www.youtube.com/watch?v=QluMKpTtzLQ&t=79s, accessed on Jan. 1, 2020.）なお，“Using the geometric mean to determine the missing parts of a triangle,” https://www.youtube.com/watch?v=4TVeYKgLmN8&t=300s, accessed on Jan. 1, 2020 も参照。

である。

したがって，

$$\overbrace{\overline{OB}:\overline{BM}}^{\triangle OBM}=\overbrace{\overline{BM}:\overline{BN}}^{\triangle MBN}$$

$$\therefore\quad \overline{BN}=\frac{\overline{BM}^2}{\overline{OB}} \tag{35}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{ac}\right)^2}{\dfrac{a+c}{2}}$$

$$=\frac{2ac}{a+c}$$

これは，a と c の調和平均

$$\frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}}{2}}$$

に等しいから，$\mathfrak{m}_H$ は線分 $\overline{BN}$ によって示される[(16)]。

＊　＊　＊

以上，要するに，直角三角形 ABC によって２数（a，c）にかんする相加平均 $\mathfrak{m}_A$，相乗平均 $\mathfrak{m}_G$，調和平均 $\mathfrak{m}_H$ を図示することが可能である（図10）。

⑷　３つの平均の大小関係

（相加平均）＞（相乗平均）＞（調和平均）

は，図10からも明らかである。すなわち，

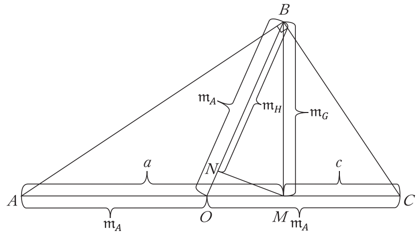


図10　直角三角形 ABC と３つの平均

$\mathfrak{m}_A=\overline{AO}=\overline{OB}=\overline{OC}$

$\mathfrak{m}_G=\overline{BM}$

$\mathfrak{m}_H=\overline{BN}$

$$\overline{OB}>\overline{BM}>\overline{BN}$$

これは，３つの平均の大小関係を示し，

$$\mathfrak{m}_A>\mathfrak{m}_G>\mathfrak{m}_H$$

を意味している。

なお，線分 $\overline{MC}(=a)$ の長さが線分 $\overline{AM}(=c)$ の長さに近づくにつれて，点 M は点 O に近づき，究極的に点 M が点 O に一致するときには，相乗平均は相加平均と一致し，

$$\overline{BM}\ (=\mathfrak{m}_G)\to\overline{OB}\ (=\mathfrak{m}_A)$$

となる。他方で点 M が点 O に近づくときには，点 N は点 O に近づき，調和平均は相加平均と一致し，

$$\overline{BN}\ (=\mathfrak{m}_H)\to\overline{OB}\ (=\mathfrak{m}_A)$$

となる。すなわち，

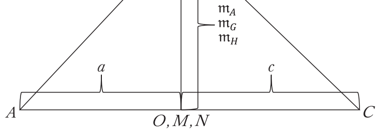


図11　$a=c$ のときの３つの平均

c が a と同じ大きさのとき，点 O，M，N が一致し，

$\overline{OB}(=\mathfrak{m}_A)=\overline{BM}\ (=\mathfrak{m}_G)=\overline{BN}(=\mathfrak{m}_H)$

となる。

---

(16)　(35)式は三角比（余弦）を用いても誘導することができる（図９参照）。

$$\begin{cases}\triangle OBM\text{ において}:\cos\beta=\dfrac{\overline{BM}}{\overline{OB}}\\[2ex]\triangle MBN\text{ において}:\cos\beta=\dfrac{\overline{BN}}{\overline{BM}}\end{cases}$$

より，

$$\overline{BN}=\frac{\overline{BM}^2}{\overline{OB}} \qquad \text{(35)［再掲］}$$

$$(a \to c) \Leftrightarrow (\mathfrak{m}_G \to \mathfrak{m}_A), (\mathfrak{m}_H \to \mathfrak{m}_A)$$

である（図 11)。よって

$$\mathfrak{m}_A = \mathfrak{m}_G = \mathfrak{m}_H$$

の成立条件は

$$a = c$$

である。

む す び

相乗平均が本来は幾何平均と言われる根拠としては，この平均が，図形によって幾何学的にその数理的意味を説明できるからと言われることがある。本稿ではこの見解を検討した。そして，相乗平均だけが幾何学的な説明と親和的であるとは言いがたく，少なくとも正の 2 数にかんする相加平均，相乗平均，調和平均のいずれの平均についても，幾何学的な説明が可能であることを述べた。もって，相加平均がなぜ「算術」平均と言われるのか，また相乗平均がなぜ「幾何」平均と言われるのかについて考察するための手がかりとしたい。

(2020 年 1 月 10 日提出)