タイトル	整数かけ算の難易に影響する一桁かけ算の難易に関する発達的検討と教授学習過程
著者	後藤，聡；GOTO，So
引用	北海学園大学学園論集(180)：25-39
発行日	2019-11-25

整数かけ算の難易に影響する一桁かけ算の難易に関する発達的検討と教授学習過程

後　藤　　　聡

Ⅰ　はじめに

かけ算を課題とした研究は20世紀前半に一桁×一桁（以下，一桁かけ算と記す。）から始まり，当初はWashburne & Vogel（1928）が一桁かけ算の難易の順位を示すなど，単純な分析結果の報告であった。その後，認知心理学が台頭し，モデルの設定やその検証を試みる研究が見られるようになった。Thomas（1963）はP × Q = Rの難しさをモデル化し，log（P + Q + R）に従うとした。Parkman（1972）は0 × 0，0 × 1，1 × 0，9 × 9以外の一桁かけ算P × Q = Rについて，回答時間（問題提示から回答までの時間）がPとQの最小値，PとQの最大値，PとQの差，PとQの和，P + Q + Rの自然対数値に関連するとしたモデルを想定し，検証を行った。

次第に，教育への貢献を意識した研究へと発展していった。後藤（1991）は学校での一桁かけ算の教育に寄与するため，小学生を対象として問題に解答させ，難易に影響している要因を検討した。後藤（1999a）は子どもに計算させた解答の誤答要因を分析し，後藤（2002）は，回答時間を用いて一桁かけ算における数の表象構造を探った。後藤（2015a，2016，2018）は，数そのもの性質，被乗数と乗数の組み合わせ方が学習者である子どもに与える影響について明らかにした。

一方，被乗数，乗数に二桁以上の整数が含まれるかけ算（以下，整数かけ算と記す。）についての研究は後になって発展した。Dansereau & Gregg（1966）が二〜四桁の問題の解答に要した時間を測定して認知的な分析を行い，続いてDansereau（1969）が情報処理モデルの視点から考察を加えている。上岡・江川（1993，1994）や天岩（1999）は子どもに計算させた解答の誤答分析を行い，それに基づいた指導方法の提案，手続きと意味理解の関連性の分析を行った。西谷（1993）は子どものかけ算筆算のストラテジー分析を行っている。星（1993）は学校教育における指導方法を提案し，高田（1991）は自ら企画した授業案の実践を加えて結果の分析にも及んでいる。

ところで，学習者である子どもが学校で取り組む学習課題についての研究価値の1つは，それが学習者にとってどのような意味を持つのかを明らかにすることであろう。その方法として，学習者が学習課題に取り組み，その結果から課題に対する学習者の内的な性質を探る場合，課題の方を厳密に統制する必要があると考える。結果がたまたま取り上げた問題に左右される可能性を排除しないと，一貫した有益な結果が得られないからである。その点，前記の整数かけ算に関す

る研究では分析のために用いた問題の選択基準が不明確である。

また，算数学習の指導においては，扱う教材をどの様に系列化し，学習者に提示していくかが学習効果に影響を与える一要因となる。既に，教材の系列化に関する理論がいくつか提出されている。Gagné & Briggs（1974）の学習階層性による教材分析，Ausubel（1968），Hartley & Davies（1976）の先行オーガナイザーを用いる方法，Suppesら（1968），Suppes & Morningstar（1972）の教材を構成している要因（彼らは構造変数とよんでいる）の難易度を予測し，それらの組み合わせから系列化を進めるという方法などである。系列化の観点からも学習課題の整備は必要となろう。

そこで，後藤（1993，1994，1995，1999b）は，二桁×一桁，三桁×一桁（以下，三桁かけ算と記す。）の整数かけ算の問題について，構成要素を基準として問題を類型化し，更に難易差を配慮してそれらを系列化した教材を作成した。更に，コンピュータを利用してその結果を活用するための教授学習支援システムの開発に至っている。

一方，後藤・河井（1990）は，学校教育におけるたし算の筆算の教授学習過程に寄与するため，三桁＋三桁の計算には一桁＋一桁（以下，一桁たし算と記す。）の難易が影響することを証明した。整数かけ算を解答する際のアルゴリズムでは，一桁かけ算とその結果を加算する一桁たし算の繰り返し，及び十進数位取り記数法で計算過程が構成されている。よって，一桁たし算の難易は整数かけ算にも影響する可能性がある。そこで，後藤（2017）は，後藤（1993）で類型化した結果を用い，三桁かけ算の反応時間（1問の解答に要した平均時間）と正答率（解答数に対する正答数の百分率）を指標として，一桁たし算の難易が三桁かけ算の難易に影響することを明らかにした。

本研究では，後藤（2017）の発展課題として，アルゴリズムに含まれるもう一つの演算である一桁かけ算の難易の影響を検討する。その難易が整数かけ算にどのように影響するか，後藤（1993）の結果を用いて三桁かけ算を材料とし，反応時間と正答率を指標として学年差を含めて発達的な視点を加えて解明する。

Ⅱ　整数かけ算の難易における一桁かけ算の難易の影響：一桁たし算に繰り上がりがない場合

1．目　的

後藤（1993，1994，1995，1999b）の難易構造において，一桁かけ算の難易が整数かけ算の難易に影響することを指摘しつつも，細かすぎて煩雑になるため難易を基準にした類型化の条件としては除外した。その点を受け継ぎ，計算過程に含まれる一桁かけ算の難易が三桁かけ算の難易にどのように影響するかについて明らかにする。まずは，解答の途中で登場する一桁たし算の繰り上がりがない場合に限定する。繰り上がりの有無を区別して検討することにしたのは，河井・後

藤（1987），後藤（2011）より，繰り上がりがない場合よりある方が難しく，性質の異なる問題を混在させないことにより，検討する要素以外の条件の厳格な統制を図るためである。

2．方 法

（1）対象

公立小学校3年生82名，4年生88名，5年生106名，6年生98名　計374名

（2）材料

一桁たし算に繰り上がりがない三桁かけ算問題の内，後藤（1993）で類型化したタイプ8の問題を使用した。後藤（1993）が類型の際に使用した条件では，一桁かけ算の繰り上がり2回あり，答が4桁になり，被乗数に0を含まない性質で統一された問題のタイプである。

一桁たし算の難易を区別するために，各問題に難易レベル別のポイントを付した後藤・河井（1990）の結果を使用する。その結果が表1である。難易レベルのポイントが1～8に区別されている。一桁かけ算については，難易の違いを示した後藤（1991）の結果を用いて，一桁たし算と同様の方法により難易レベルのポイントを定めた表2を使用する。難易レベルのポイントが1～7に区別されている。いずれもポイントが高いほど難しい問題である。

ここで検討するのは三桁かけ算の難易に影響する一桁かけ算の難易であるため，一桁たし算の

表1　反応時間による一桁たし算の難易レベルのポイント別問題

難易レベルポイント	問題						
1	0 + 4	0 + 2	0 + 9	4 + 0	0 + 5	9 + 0	0 + 3
	5 + 0	2 + 0					
2	0 + 6	8 + 0	0 + 8	7 + 0	1 + 1	3 + 0	0 + 1
	6 + 0	0 + 7	0 + 0	5 + 5	1 + 0	2 + 2	9 + 1
3	4 + 1	5 + 1	1 + 9	1 + 2	2 + 1	1 + 4	3 + 3
	1 + 8	1 + 5	1 + 3	3 + 1	2 + 3	1 + 6	8 + 1
	1 + 7	5 + 2	3 + 2	7 + 1	6 + 1	5 + 3	
4	2 + 5	4 + 4	8 + 2	5 + 4	4 + 5	2 + 8	7 + 3
	3 + 5						
5	9 + 2	3 + 7	4 + 2	2 + 4	9 + 3	6 + 4	2 + 9
	7 + 2	3 + 4	2 + 7	5 + 6	3 + 6	6 + 2	4 + 3
	2 + 6	4 + 6					
6	8 + 3	6 + 5	6 + 3	3 + 9	3 + 8	9 + 5	4 + 8
	5 + 9	9 + 4	4 + 9	8 + 4	9 + 6	7 + 5	5 + 8
7	5 + 7	7 + 4	6 + 6	8 + 5	4 + 7	9 + 9	6 + 9
	7 + 9	7 + 7	6 + 7	9 + 8	8 + 9		
8	8 + 7	7 + 6	9 + 7	8 + 8	7 + 8	6 + 8	8 + 6

表 2　反応時間による一桁かけ算の難易レベルのポイント別問題

難易レベルポイント	問題						
1	0 × 9	0 × 5	0 × 6	0 × 0	0 × 7	0 × 4	0 × 3
	0 × 2	0 × 8	0 × 1				
2	1 × 5	1 × 1	1 × 6	5 × 0	3 × 0	2 × 0	9 × 0
	4 × 0	1 × 8	8 × 0	7 × 0	1 × 0	1 × 9	6 × 0
	6 × 1	1 × 3	1 × 7				
3	3 × 1	8 × 1	4 × 1	5 × 1	2 × 2	2 × 1	1 × 4
	5 × 2	3 × 3	1 × 2	3 × 2	9 × 1	3 × 5	7 × 1
	2 × 5	5 × 4					
4	8 × 5	5 × 6	6 × 5	4 × 2	2 × 4	5 × 5	6 × 2
	5 × 3	3 × 4	4 × 5	3 × 6	5 × 8	8 × 2	9 × 2
	2 × 3	2 × 7	4 × 4				
5	9 × 9	7 × 2	4 × 3	6 × 3	2 × 6	6 × 6	5 × 9
	8 × 3	3 × 7	7 × 7	9 × 5	7 × 5	7 × 9	3 × 9
	8 × 8	2 × 9	3 × 8	6 × 4	9 × 6	6 × 9	
6	6 × 8	2 × 8	7 × 3	9 × 3	9 × 7	5 × 7	9 × 8
	4 × 9	6 × 7	8 × 9	7 × 6	8 × 6	8 × 7	9 × 4
	7 × 8	4 × 6	7 × 4	4 × 8			
7	8 × 4	4 × 7					

難易差が影響することを予防しなければならず，以下のように統制した。一桁かけ算の繰り上がりが 2 回ある三桁かけ算の計算過程には，1 と 10 の位の一桁かけ算で繰り上がった数を，10 と 100 の位で加算しなければならない。そこに一桁たし算の計算が 2 回登場する。その難易による影響を除去するため，全ての実験問題について，表 1 の結果を用いて，2 回行う一桁たし算の難易レベルポイントの合計を 5 か 6 に統一した。

その上で，一桁かけ算の難易が異なる三桁かけ算の実験問題を 3 種類用意した。表 2 の結果を用い，計算過程で 3 回生じる一桁かけ算の難易レベルポイントの合計がレベル低（ポイント 11・12），中（ポイント 14・15），高（ポイント 17・18）と異なる 3 種の三桁かけ算問題を抽出し，レベル低～高別に各 20 問で構成されている問題用紙を作成した。問題に含まれる数字はできるだけ均等になるように配慮した。各レベルの用紙とも，問題の提示順が異なる 5 種類の問題用紙を用意し，被験者によってランダムに使用し，計算の進行に伴う熟達効果ができるだけ均等になるように配慮した。

（3）手続き

実験の進行は学級担任によって管理され，次の手順で行った。

①担任の判断により，学力差がないように配慮して学級内の被験者を 3 集団に分けた。

② 3 集団には，（2）で示したそれぞれ異なった難易レベル（低・中・高）の三桁かけ算の問題用

紙を配布した。即ち，同一集団内の被験者には同一レベルの問題用紙を配布した。
③被験者には配布された問題用紙の全20問を解答するように指示した。
④担任の合図により全被験者が一斉に解答を始めた。
⑤全問題の解答を終了した時点で被験者に挙手をさせた。
⑥担任は解答開始から被験者が挙手をするまでの時間を測定して告知し，本人にそれを記入させた。
⑦全被験者の解答が終了した時点で実験を終了した。

3．結　果

計算不能であった3年生2名，4年生1名を除外し，371名を分析の対象とした。各学年，一桁かけ算の難易レベル別に反応時間と正答率の平均値を示したものが表3である。更に両者を別個に図1・2に示した。

反応時間，正答率別に学年，難易レベルを2要因とした分散分析を行った。

反応時間について4（学年：3～6年生）×3（レベル：低・中・高）の分散分析を行ったところ，学年の主効果（$F(3,359) = 22.341$，$p < .01$），レベルの主効果（$F(2,359) = 40.385$，$p < .01$），交互作用（$F(6,359) = 3.075$，$p < .01$）が有意であった。交互作用が有意であったので学年におけるレベルの単純主効果を検定したところ，全学年とも1％水準で有意であった。そこで多重比較を行ったところ，3年生は低と中が5％，高が1％，4・5年生は低と中・高が1％，6年生は低・中と高が1％水準で有意であった。これらより，3～5年生ではレベル低より中・高が，6年生ではレベル低・中より高が反応時間は大きいことが示された。レベルにおける学年の単純主効果を検定したところ，低と中が1％，高が5％水準で有意であった。そこで多重比較を行ったところ，低では3年生と5・6年生が1％，4年生と6年生が5％，中では3～5年生と6年生が1％水準，高では3年生と6年生が1％，4年生と6年生が5％水準で有意であった。これらより，レベル低では5・6年生より3年生，6年生より4年生が，中では6年生より3～5年生が，高では6年生より3・4年生が反応時間は大きいことが示された。

正答率について4（学年：3～6年生）×3（レベル：低・中・高）の分散分析を行ったところ，学年の主効果（$F(3,359) = 3.592$，$p < .05$），レベルの主効果（$F(2,359) = 26.969$，$p < .01$）が有意であった。学年の主効果が有意であったので多重比較を行ったところ，3年生と4・5年生が1％，6年生が5％水準で有意であった。これより，4～6年生より3年生の正答率は低いことが示された。レベルの主効果が有意であったので多重比較を行ったところ，全てのレベル間が1％水準で有意であった。これより，レベル低，中，高の順に正答率は低くなっていくことが示された。

表3　反応時間（RT（sec））・正答率（CR（%））の平均値（繰り上がりなし）

一桁かけ算の難易レベル	3年生		4年生		5年生		6年生	
	RT	CR	RT	CR	RT	CR	RT	CR
低	12.9	78.4	10.3	81.0	8.8	77.9	8.8	76.8
中	15.9	71.4	15.6	76.9	13.8	76.3	8.5	75.4
高	17.3	65.3	15.7	69.2	15.6	73.0	13.2	71.8

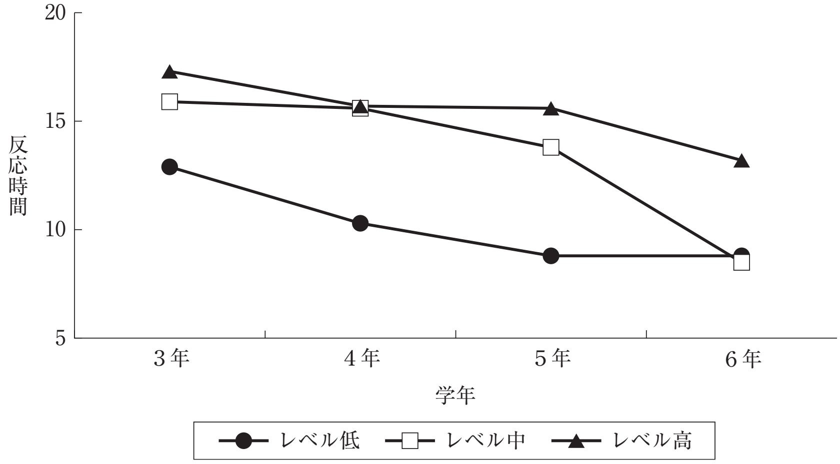

図1　学年・一桁かけ算難易レベルの違い別の反応時間（sec）（繰り上がりなし）

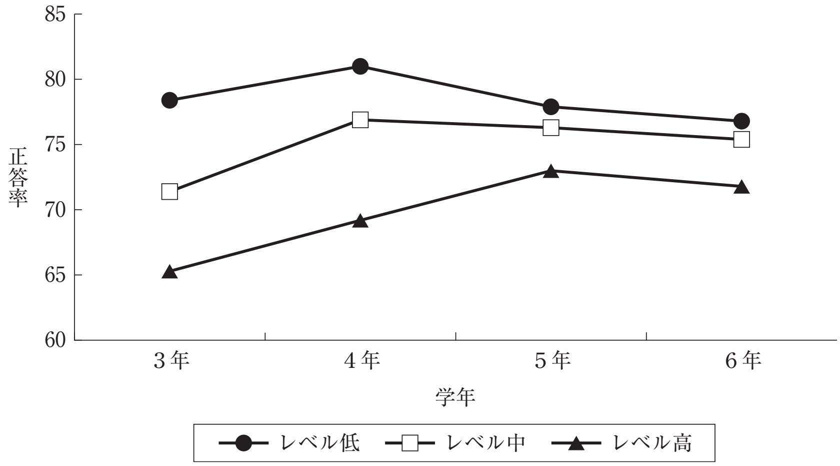

図2　学年・一桁かけ算難易レベルの違い別の正答率（%）（繰り上がりなし）

4．考　察

反応時間については，一般的にその値が大きいほど計算の処理速度が遅いため難しい問題とみなされる。学年別のレベル間の多重比較において，３～５年生では，一桁かけ算のレベル中・高

が低と比較して，６年生ではレベル高が低・中と比較して反応時間は大きかったため，一桁かけ算が難しいと三桁かけ算も難しくなることが示された。後藤（1991，2002）で明らかにされた一桁かけ算の難易差の存在は，一桁たし算に繰り上がりがない三桁かけ算においても３～６年生で影響していることが証明された。

３～５年生の反応時間はレベル中と高の間で差がなく，低は両者より小さかった。６年生ではレベル低と中の間で差がなく，高は両者より大きかった。これは，全学年に共通してレベル低の問題は計算に要する時間が最も小さくて易しい，高の問題は最も大きくて難しいことを表している。また，３～５年生ではレベル中と高に時間差はないが，６年生になると変化し，中が低と同程度の時間で解答できるように発達的に変化したことを示していると言える。

一方，各レベル別の学年間の多重比較では，レベル低は隣の学年間では差がないものの，３年生と５・６年生，４年生と６年生で差があり，学年進行に伴って次第に変化して反応時間は小さくなり，易しくなっていくことが窺われる。レベル中と高は３～５年生まで変化を見せず，６年生になって発達し，３～５年生よりも易しくなったことが理解できる。レベル低では５年生の反応時間が６年生と差はないが，それよりもレベルが高くなると，５年生は６年生よりも反応時間が大きかったため，５年生はレベルの高低で発達の様相が異なると言えよう。

正答率については，値が低いほど間違いが多いため難しい問題とみなされる。レベル間の多重比較の結果，学年に関係なくレベル低，中，高の順に正答率は低くなり，難しくなっていく。一桁かけ算の難しさが三桁かけ算の正確さにも影響し，難しい一桁かけ算を含む三桁かけ算ほど難しく，正答率を低下させたと思われる。また，学年間の多重比較では，レベルに関係なく３年生から４年生にかけて正答率が高まっており，その後の学年では停滞していることが示された。４年生で計算の正確さが発達し，その後天井効果が起こっていると推測できる。

Ⅲ　整数かけ算の難易における一桁かけ算の難易の影響：一桁たし算に繰り上がりがある場合

１．目　的

計算過程に含まれる一桁かけ算の難易が三桁かけ算の難易にどのように影響するか，ここでは一桁のたし算に繰り上がりがある場合について明らかにする。繰り上がりの有無を区別して検討することにした理由は前記の通りである。

２．方　法

（１）対象

公立小学校３年生 109 名，４年生 92 名，５年生 129 名，６年生 105 名　計 435 名

（２）材料

一桁たし算に繰り上がりがある三桁かけ算問題の内，後藤（1993）で類型化したタイプ16の問題を使用した。後藤（1993）が類型の際に使用した条件では，一桁かけ算の繰り上がり２回あり，答が４桁になり，被乗数に０を含まず，一桁たし算の繰り上がりが１回ある性質で統一された問題のタイプである。

Ⅱと同様，一桁たし算の難易差が三桁かけ算の難易に影響することを予防するため，以下のように統制した。一桁かけ算の繰り上がりが２回ある三桁かけ算の計算過程には，１と10の位の一桁かけ算で繰り上がった数を，10と100の位で加算しなければならない。そこに一桁たし算の計算が２回登場する。更に，選択したタイプ16の問題には一桁たし算に１回の繰り上がりがあり，繰り上がった１を次の位に加算しなければならない。合計３回の一桁たし算の難易差による影響を除去するため，全ての実験問題について，表１の結果を用いて，一桁たし算３回の難易レベルポイントの合計を９～11に統一した。

その上で，一桁かけ算の難易が異なる三桁かけ算の実験問題を３種類用意した。表２の結果を用い，計算過程で３回生じる一桁かけ算の難易レベルポイントの合計がレベル低（ポイント13・14），中（ポイント16），高（ポイント18・19）と異なる３種の三桁かけ算問題を抽出し，レベル低～高別に各20問で構成されている問題用紙を作成した。問題に含まれる数字はできるだけ均等になるように配慮した。各レベルの用紙とも，問題の提示順が異なる５種類の問題用紙を用意し，被験者によってランダムに使用し，計算の進行に伴う熟達効果ができるだけ均等になるように配慮した。

（３）手続き

Ⅱと同様である。

３．結　果

計算不能であった３年生２名，４年生２名，５年生１名を除外し，430名を分析の対象とした。各学年，一桁かけ算の難易レベル別に反応時間と正答率の平均値を示したものが表４である。更に両者を別個に図３・４に示した。

反応時間，正答率別に学年，難易レベルを２要因とした分散分析を行った。

反応時間について４（学年：３～６年生）×３（レベル：低・中・高）の分散分析を行ったところ，学年の主効果（$F(3,418) = 29.310$，$p < .01$），レベルの主効果（$F(2,418) = 18.187$，$p < .01$），交互作用（$F(6,418) = 3.570$，$p < .01$）が有意であった。交互作用が有意であったので学年におけるレベルの単純主効果を検定したところ，３・６年生が１％，５年生が５％水準で有意であった。そこで多重比較を行ったところ，３年生は低と中・高が１％，５年生は低・中と高が５％，６年生は低・中と高が１％水準で有意であった。これらより，３年生ではレベル低より中・高が，５・６年生ではレベル低・中より高が反応時間は大きいことが示された。レベル

表４　反応時間（RT（sec））・正答率（CR（%））の平均値（繰り上がりあり）

一桁かけ算の難易レベル	３年生		４年生		５年生		６年生	
	RT	CR	RT	CR	RT	CR	RT	CR
低	16.9	88.8	14.4	92.0	13.7	92.0	11.2	92.7
中	26.0	85.1	17.4	89.7	12.5	89.9	12.4	87.0
高	23.5	81.9	17.0	87.7	15.7	86.6	17.6	84.0

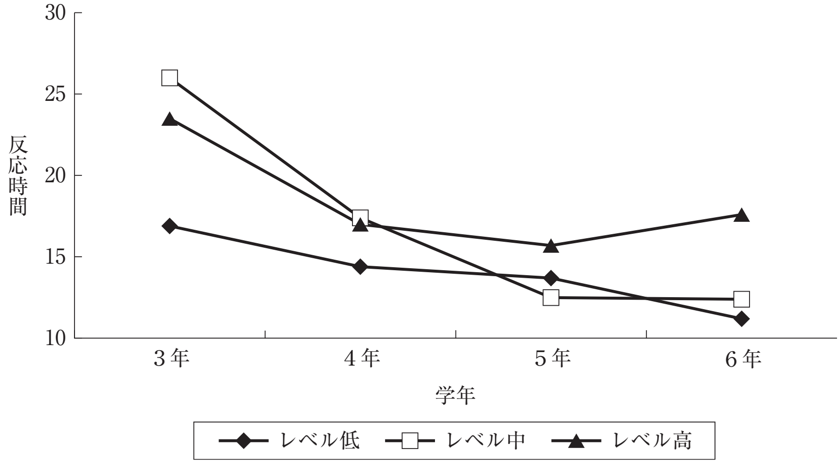

図３　学年・一桁かけ算難易レベルの違い別の反応時間（sec）（繰り上がりあり）

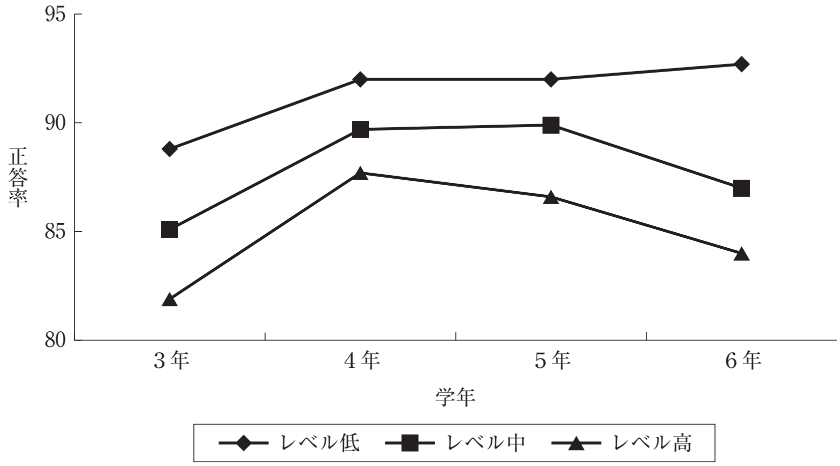

図４　学年・一桁かけ算難易レベルの違い別の正答率（%）（繰り上がりあり）

における学年の単純主効果を検定したところ，全てのレベルが１%水準で有意であった。そこで多重比較を行ったところ，低では３年生と５・６年生が１%，４年生と６年生が５%，中では３年生と４〜６年生，４年生と５・６年生が１%，高では３年生と４〜６年生が１%水準で有意で

あった。これらより，レベル低では5・6年生より3年生，6年生より4年生が，中では4～6年生より3年生，5・6年生より4年生が，高では4～6年生より3年生が反応時間は大きいことが示された。

正答率について4（学年：3～6年生）×3（レベル：低・中・高）の分散分析を行ったところ，学年の主効果（$F(3,418) = 2.716$, $p < .05$），レベルの主効果（$F(2,418) = 10.059$, $p < .01$）が有意であった。学年の主効果が有意であったので多重比較を行ったところ，3年生と4・5年生が5％水準で有意であった。これより，4・5年生より3年生の正答率は低いことが示された。レベルの主効果が有意であったので多重比較を行ったところ，低と高が1％，低と中，中と高が5％水準で有意であった。これらより，レベル低，中，高の順に正答率は低くなっていくことが示された。

4．考 察

反応時間と正答率に関する難易の考え方はⅡと同様である。

反応時間については，学年別のレベル間の多重比較において，3年生では一桁かけ算のレベル中・高が低と比較して，5・6年生ではレベル高が低・中と比較して反応時間は大きかったため，一桁かけ算が難しいと三桁かけ算の問題は難しくなることが示された。後藤（1991，2002）で明らかにされた一桁かけ算の難易差の存在は，一桁たし算に繰り上がりがある三桁かけ算においても3・5・6年生で影響していることが証明された。

3年生の反応時間はレベル中と高の間で差がなく，低は両者より小さかった。5・6年生ではレベル低と中の間で差がなく，高は両者より大きかった。これは，それらの学年に共通してレベル低の問題は計算に要する時間が最も小さくて易しい，高の問題は最も大きくて難しいことを表している。しかし，レベル中の問題は，3年生では高との時間差はないが，5・6年生になると低と同程度の時間で解答できるように発達的に変化したことを示していると考えられる。前記の結果では4年生だけ例外的にレベル間に差がなかった。3年生から5年生にかけてレベル中の反応時間が高との差なしから低との差なしへと移行した際の中間として，4年生では中が低・高との差を生じさせなかったと推測することは可能であるが，それにしてもレベル低と高との間にも差がなかったことを説明する根拠は見いだせなかった。

一方，各レベル別の学年間の多重比較では，レベル低は隣の学年間では差がないものの，3年生と5・6年生，4年生と6年生で差があり，学年進行に伴って次第に変化し，反応時間は小さくなり，易しくなっていくことが窺われる。レベル中は3年生，4年生，5・6年生の間で差があり，学年進行に伴って次第に反応時間が小さくなり，易しくなっていくことが理解できる。レベル高は3年生と4～6年生の間で反応時間に差があり，4年生になると3年生よりも易しくなり，その後の学年では天井効果を示していると言えよう。変化の様子は異なるが，どのレベルにおいても，学年が高くなるにつれて計算の処理速度が速くなり，次第に発達していくと解釈できる。

正答率については，レベル間の多重比較の結果，学年に関係なくレベル低，中，高の問題順に正答率は低くなり，難しくなっていく。一桁かけ算の難しさが整数かけ算の正確さにも影響し，難しい一桁かけ算を含む三桁かけ算ほど難しく，正答率を低下させたと推測できる。また，学年間の多重比較では，レベルに関係なく３年生より４・５年生の方が正答率は高く，易しくなっているため，発達の様子が窺える。６年生については他のどの学年とも差はなかったが，本研究からその根拠を見出すことはできなかった。

Ⅳ　総合的考察

以上の結果を総括すると次の通りである。反応時間と正答率とでは難易の様相が異なった。一桁たし算の繰り上がりの有無の違いによっても難易の詳細は異なったが，全体としての大まかな傾向は同一であった。

反応時間については学年と一桁かけ算の難易レベルに相互作用があり，各々に三桁かけ算の難易の違いが示された。学年別の難易レベルの比較では，３年生ではレベル低よりも中・高の方が反応時間は大きくて難しく，学年が上がるとレベル低と中に差がなくなり，レベル低・中より高の方が反応時間は大きく発達的に変化した。また，難易レベル別の学年比較の結果は次の通りであった。レベル低では，一桁たし算の繰り上がりの有無に共通で５・６年生より３・４年生の反応時間が大きく，難しいものになっていた。レベル中・高では，繰り上がりの有無の違いにより様子が異なった。繰り上がりがない場合は，レベル中・高ともに６年生のみが反応時間は小さく他の学年よりも易しくなっていた。繰り上がりがある場合は，レベル中では３年生，４年生，５・６年生の順に反応時間は小さく，次第に易しくなっていくが，高では４年生に発達的変化が見られて５・６年生と差がなくなり，３年生だけが反応時間は大きく，他の学年よりも難しいものになっていた。

正答率については学年と一桁かけ算の難易レベルに相互作用がなかった。学年間の比較では，繰り上がりがない場合は４～６年生の正答率が３年生より高く，ある場合は４・５年生が３年生より高く，易しく変化した様子が見られた。レベル間の比較では，一桁たし算の繰り上がりの有無に共通でレベル低，中，高の順に正答率が低くなり，難しくなっていった。

以上のように，難易の詳細は異なったが，指標が反応時間，正答率の何れにしても，全体傾向としては，三桁かけ算を例に，一桁かけ算の難易が整数かけ算の難易に影響していることが示された。更に，一桁かけ算が難しいと整数かけ算も難しくなることが明らかになった。

特に２位数以上の整数かけ算を初めて学習する３年生では，一桁たし算の繰り上がりの有無に共通して，レベル低の反応時間が他と比較して小さく，易しくなっている。また，３年生を含めて学年に関係なく一桁かけ算のレベルがより低いほど正答率が高く，易しくなっている。以上の結果を学校でのかけ算学習に教授者が活用することは，学習者の学習の促進という意味で有益で

あると考える。

Ⅴ　整数かけ算の教授学習過程における一桁かけ算の扱いについての提案

文部科学省（2018a）による小学校学習指導要領（平成29年告示），第2章各教科，第3節算数，第2各学年の目標及び内容，第3学年，2内容，A数と計算，アでは，子どもに身に付けさせる内容として「（ア）2位数や3位数に1位数や2位数をかける乗法の計算が，乗法九九などの基本的な計算を基にしてできることを理解すること。また，その筆算の仕方について理解すること。（イ）乗法の計算が確実にでき，それを適切に用いること。」と示されている。更に，文部科学省（2018b）による小学校学習指導要領（平成29年告示）解説算数編では，（ア）について「乗数が1位数の計算の場合，数のまとまりに着目して計算する。例えば，23×4の計算は，23を20＋3とみて，20×4と3×4という基本的な計算を基にしてできることを理解できるようにする。これは，筆算の仕方に結び付く考えである。3位数に1位数をかける計算の指導に当たっても同様である。（後略）」，（イ）の適切に用いることについて「（前略）乗法が用いられる場面を判断し，適切に用いることができる（後略）」と解説している。

以上から，3年生では一桁かけ算が学習内容として求められているのではないことが読み取れる。それを基にして被乗数が2位数や3位数の計算を行うことを「理解すること」，十進位取り記数法が基盤になっている数のまとまりに着目した筆算の方法を「理解すること」，その「計算が確実」にでき，適切に用いられる「場面を判断して用いること」が学習内容として示されていることになる。

よって，整数かけ算の教授学習過程で一桁かけ算の難易を均等に扱うことは必須ではなく，その内容の達成を少しでも容易にするために，むしろ一桁かけ算の難易を配慮することは妥当な手立ての1つになりうると考える。学習内容の「筆算」の「方法を理解」し，「計算が確実」にできるようになるためには，前記の結果が示すように難しい一桁かけ算を含む問題を使用することはその妨げになることがありえるため，特に理解が安定していない学習の初期には，一桁かけ算の易しい問題を使用する方が学習者にとって学習内容の理解を容易にする可能性があると考える。

ではどのように配慮するか。手がかりとしてオペラント条件付けのシェイピングを応用したプログラム学習の考え方が参考になる。鈴木（2000）によれば，その基本原理の一つであるスモールステップの原理とは，最終目標に向かって一歩一歩段階を追って進めていくことである。この考え方に一桁かけ算の難易を適用させ，後藤（2011，2015b）がたし算やひき算の問題の系列化で示した考え方に従い，一桁かけ算が易しい問題から難しい問題へと展開するように整数かけ算問題を系列化することを提案する。その際の参考になるのが，前記の表2，後藤（1991，1999）である。それらを活用した系列化の原則を以下に示す。

１．各位で行う一桁かけ算の難易レベルのポイントへの配慮

前記の通り，難易レベルのポイントが低い一桁かけ算で構成されている整数かけ算がおおむね反応時間は小さく，正答率は高く易しいことが明らかになった。従って，整数かけ算を学習する際には，表２を活用して，各位で計算する一桁かけ算のポイントの合計を算出し，その結果が低い問題を含む整数かけ算から始めて，徐々に高い問題へと展開していくのが易しい問題から難しい問題へ系列化する原則に適合する。

２．各位で行う一桁かけ算の反応時間に影響する被乗数，乗数への配慮

後藤（1991）は３・４年生を対象として一桁かけ算の全問について解答させ，各被乗数ごとに区別して回答時間の平均値が小さいもの，即ち計算が易しい数から順に並べたところ，０，１，３，２，５，６，４，９，８，７であった。乗数について同様に行ったところ，０，１，２，５，３，６，４，９，８，７の順であった。一桁かけ算の回答時間が小さく，計算を易しくさせる被乗数や乗数を含む整数かけ算から始め，徐々に難しくさせる数を導入するのが易しい問題から難しい問題へ系列化する原則に適合する。

３．各位で行う一桁かけ算の誤答に影響する被乗数への配慮

後藤（1991）は前記の方法で対象から得た回答内容について，その正誤を判定して誤答数についても示している。小学校におけるかけ算九九の学習は１～９の段に区別して別個に行われる。それに０を加えて被乗数ごとに分類し，誤答数を少ない方から並べると，１，０，５，２，３，９，６，４，７・８であった。これまでも述べたように，正答率，裏返せば誤答率は計算の難易に影響する。従って，誤答率の低い（正答率の高い）一桁かけ算で構成された整数かけ算の問題から高い（正答率の低い）問題へ展開するのが易しい問題から難しい問題へ系列化する原則に適合する。

４．各位で行う一桁かけ算の難易に特に影響する４，７，８への配慮

回答時間の大小と誤答率に影響する数の順位には若干の相違はあったが，共通して難しさの上位に位置するのは４，７，８であった。整数かけ算問題の系列においては，それらの数が含まれる問題を後部に付置させた方が易しい問題から難しい問題へ系列化する原則に適合する。７は何れにおいても難しさの最上位に位置する数であったため，特にできるだけ扱いを控えるのが望ましいと考える。

それらの数の扱いの難しさは一桁かけ算の難易レベルでも示されている。表２において，被乗数，乗数がそれらの数で構成された６種の一桁かけ算の難易レベルは，ポイント６，７の上位の２レベルに位置しているからである。

また，それらは誤答要因の分析結果からも難しさが示唆される。後藤（1999）は前記の方法で

対象から得た解答について，誤答の内容を質的に分析して性質の異なる誤答要因を分類し，誤答全体に対する各要因の比率を算出して学年別に整理している。

３年生で最も比率の高かった要因は被乗数，乗数の混乱であり，誤答全体の35.8%であった。それは，５×３＝18で被乗数を６，３×８＝18で乗数を６と間違えているように，被乗数か乗数の何れか，または両方を他の数と混乱している誤答である。その数の内，約63%は４，７，８の何れかが被乗数か乗数であったことからも，これらの数の扱いが難しいこと示していると言えよう。次に高かったのが言語的混乱で誤答全体の23.3%であった。これは，我が国のかけ算九九の学習が言語による記憶を特徴としていることに関係しており，言語の想起で解答されるゆえに生じる誤りである。後藤（1999）では，これが７を共通として４，または８との組み合わせで生じており，７（しち）と４（し）では（し）が，７（しち）と８（はち）では（ち）が発音で共通しているために混乱して各々を入れ替えて解答していると分析している。例えば，７×９の７を４と混乱して36と解答しているのがその例である。この点からも，４，８との組み合わせで共通している数である７については特に扱いを控える方が妥当と言えよう。その次に多かった要因は「分からない」と回答したもので誤答全体の21.2%であったが，その数に対して，被乗数や乗数が４，７，８の何れかであった問題数は約86%であり，高い比率であった。

４年生になると被乗数，乗数の混乱の比率が低下して18.2%であり発達的に変化したと思えるが，言語的混乱は29.9%と最も高く，相変わらず４，７，８の難しさは顕在していた。

以上，小学校において整数かけ算を学習する３年生にとっては，その解答過程で登場する一桁かけ算の計算を難しくさせる数である４，７，８，特に７を含む整数かけ算問題の導入に配慮の必要性が示唆された。それらの数を含む問題はできるだけ問題系列の後部に付置させ，一桁かけ算を易しくさせる数で構成された整数かけ算問題から導入し，徐々に難しくさせる数を含めていくことが，学習内容の理解の促進にとって望ましいと考える。

引用文献

天岩静子（1999）．ゼロを含む多桁かけ算の理解に関する一考察 ── 小学校４年生の誤答にもとづく分析 ──　信州大学教育学部紀要，98，75-86.

Ausubel, D. P. (1968). Educational Psychology: A cognitive view. Holt, New York.

Dansereau, D. F. & Gregg, L. W. (1966). An information processing analysis of mental multiplication. Psychonomic Science, 6, 71-72.

Dansereau, D. F. (1969). An information processing model of mental multiplication. Abstracts International, 30(4-b), 1916.

Gagné, R. M., & Briggs, L. J. (1974). Principles of instructional design. New York: Holt.

後藤聡・河井芳文 (1990). 整数たし算の難易の構造化に関する研究　日本教育工学雑誌, 14 (2), 89-96.

後藤聡（1991）．かけ算九九の難易に影響を及ぼす要因の分析　天使女子短期大学紀要，12，29-40.

後藤聡（1993）．整数かけ算問題の難易の構造化とコンピュータ利用－Ⅲ×Ⅰ－　日本教育工学会研究報告集，JET93-６，49-56.

後藤聡（1994）．整数かけ算問題の類型化と構造化－Ⅱ×Ⅰ－　天使女子短期大学紀要，15，99-103.

後藤聡（1995）．整数かけ算問題の難易構造と指導の適性化－Ⅱ×Ⅰ－　天使女子短期大学紀要，16，11-17.
後藤聡（1999a）．かけ算九九誤答要因の分析　日本科学教育学会第23回年会論文集，395-396.
後藤聡（1999b）．かけ算の類型化と学習のためのデータバンキング化　日本教育工学雑誌，23（Suppl.），105-110.
後藤聡（2002）．かけ算九九の数の表象構造　天使大学紀要，２，25-33.
後藤聡（2011）．難易を基準にした１桁たし算の教育課程　天使大学紀要，11，11-20.
後藤聡（2015a）．かけ算九九の同数効果 ── 被乗数ごとの検討 ──　日本教育心理学会第57回総会論文集，138.
後藤聡（2015b）．問題の難易を基準にした一桁ひき算の教授学習過程 ── 繰り下がりがない問題 ── 北海学園大学学園論集，166，17-32.
後藤聡（2016）．かけ算九九の同数効果 ── 発達差を含めた乗数ごとの検討 ──　日本教育工学会第32回総会論文集，453-454.
後藤聡（2017）．整数かけ算の難易に影響する一桁たし算の難易に関する発達的研究　北海学園大学学園論集，172，１-13.
後藤聡（2018）．０，１を含む一桁かけ算の反応時間に関する発達的研究　日本発達心理学会第29回大会論文集，325.
Hartley, J. & Davies, I. K. (1976). Preinstructional strategies: The role of pretests, behavioral objectives, overviews and advance organizers. Review of Educational Research, 46, 239-265,
星範雄（1993）．２年，３年の（十何）×（何）の掛け算 ── 基礎的な計算を活用して数理的な処理のよさをつかませる乗法指導 ──　日本数学教育学会誌，75，86-89.
河井芳文・後藤聡（1987）．児童における一桁たし算の難易の構造について　東京学芸大学紀要第１部門教育科学，38，99-107.
文部科学省（2018a）．小学校学習指導要領（平成29年告示）　東洋館出版社.
文部科学省（2018b）．小学校学習指導要領解説算数編　東洋館出版社.
西谷さやか（1993）．乗法計算のStrategyの分析　日本教育心理学会第35回総会発表論文集，446.
Parkman, J. M. (1972). Temporal aspects of simple multiplication and comparison. Journal of Experimental Psychology, 95(2), 437-444.
Suppes, P., Jerman, M., & Brian, D. (1968). Computer-assisted instruction: The Stanford's 1965-66 arithmetic program. New York: Academic Press.
Suppes, P., & Morningstar, M. (1972). Computer-assisted instruction at Stanford, 1966-68: Data, models, and evaluation of the arithmetic programs. New York: Academic Press.
鈴木眞雄（2000）．発達と学習の個人差　多鹿秀継・鈴木眞雄（編著）発達と学習の心理学　福村出版182.
高田彰（1991）．整数の乗法の意味学習に関する研究　山梨大学教育学部研究報告，42，79-83.
Thomas, H. B. G. (1963). Communication hypothesis of calculation. Quarterly Journal of Experimental Psychology, 15, 173-191.
上岡学・江川玟成（1993）．乗法の誤答分析とそれに基づく指導方法：小学校３，４年生を対象として　日本教育心理学会第35回総会発表論文集，447.
上岡学・江川玟成（1994）．乗法の誤答分析とそれに基づく指導方法：小学校４年生を対象として（追跡的研究）日本教育心理学会第36回総会発表論文集，165.
Washburn, C. & Vogel, M. (1928). Are any number combinations inherently difficult ? Journal of Educational Research, 17(4), 235-255.