タイトル	平均対数偏差の要因分解
著者	木村，和範；KIMURA，Kazunori
引用	季刊北海学園大学経済論集，66(4)：55-79
発行日	2019-03-31

《特別寄稿》

平均対数偏差の要因分解

木　村　和　範*

〈要旨〉

平均対数偏差の要因分解式および平均対数偏差の差の要因分解式には，少なくとも２種類がある。数理形式の整合性と分解された要因の実質的意味から，両者を比較検討した結果，以下の要因分解式の使用が推奨される。

単一時点における要因分解式

$$
\begin{cases}
\overbrace{MLD}^{\substack{\text{平均対数偏差}\\ \text{（全年齢階級）}}} = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot MLD_j}^{\substack{\text{級内変動}\\ \text{（全年齢階級）}}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j\,(MLD - MLD_j)}^{\substack{\text{級間変動}\\ \text{（全年齢階級）}}} \\
\overbrace{{}^{MLD}C_j}^{\substack{MLD\text{にたいする寄与分}\\ \text{（第}j\text{年齢階級）}}} = \overbrace{p_j \cdot MLD_j}^{\substack{\text{級内変動}\\ \text{（第}j\text{年齢階級）}}} + \overbrace{p_j\,(MLD - MLD_j)}^{\substack{\text{級間変動}\\ \text{（第}j\text{年齢階級）}}}
\end{cases}
$$

２時点間における差の要因分解式

$$
\begin{cases}
\overbrace{\Delta MLD}^{\substack{\text{平均対数偏差の差}\\ \text{（全年齢階級）}}} = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \bar{p}_j \cdot \Delta MLD_j}^{\substack{\text{級内変動}\\ \text{（全年齢階級）}}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \bar{p}_j\,(\Delta MLD - \Delta MLD_j)}^{\substack{\text{級間変動}\\ \text{（全年齢階級）}}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \overline{MLD} \cdot \Delta p_j}^{\substack{\text{人口動態効果}\\ \text{（全年齢階級）}}} \\
\overbrace{{}^{\Delta MLD}C_j}^{\substack{\Delta MLD\text{にたいする寄与分}\\ \text{（第}j\text{年齢階級）}}} = \overbrace{\bar{p}_j \cdot \Delta MLD_j}^{\substack{\text{級内変動}\\ \text{（第}j\text{年齢階級）}}} + \overbrace{\bar{p}_j\,(\Delta MLD - \Delta MLD_j)}^{\substack{\text{級間変動}\\ \text{（第}j\text{年齢階級）}}} + \overbrace{\overline{MLD} \cdot \Delta p_j}^{\substack{\text{人口動態効果}\\ \text{（第}j\text{年齢階級）}}}
\end{cases}
$$

〈Abstract〉

There are at least two kinds of formula for decomposing the mean logarithmic deviation（hereafter *MLD*）at a single time point and the difference（*ΔMLD*）between two *MLD*s at two different time points, respectively. From the viewpoint of both mathematical consistency and substantial meanings, the author recommends using the following formulae :

＊　本学名誉教授，本学経済学部客員教授

$$
\begin{cases}
\overbrace{MLD}^{\substack{\boldsymbol{MLD}\\(\text{whole age classes})}} = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot MLD_j}^{\substack{\text{intra}-\text{variation}\\(\text{whole age classes})}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \left(MLD - MLD_j\right)}^{\substack{\text{inter}-\text{variation}\\(\text{whole age classes})}} \\
\overbrace{{}^{MLD}C_j}^{\substack{\text{contribution to } \boldsymbol{MLD}\\(j^{\text{th}}\ \text{age class})}} = \overbrace{p_j \cdot MLD_j}^{\substack{\text{intra}-\text{variation}\\(j^{\text{th}}\ \text{age class})}} + \overbrace{p_j \left(MLD - MLD_j\right)}^{\substack{\text{inter}-\text{variation}\\(j^{\text{th}}\ \text{age class})}}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\overbrace{\Delta MLD}^{\substack{\boldsymbol{\Delta MLD}\\(\text{whole age classes})}} = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \bar{p}_j \cdot \Delta MLD_j}^{\substack{\text{intra}-\text{variation}\\(\text{whole age classes})}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \bar{p}_j \left(\Delta MLD - \Delta MLD_j\right)}^{\substack{\text{inter}-\text{variation}\\(\text{whole age classes})}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \overline{MLD} \cdot \Delta p_j}^{\substack{\text{effect of population ageing}\\(\text{whole age classes})}} \\
\overbrace{{}^{\Delta MLD}C_j}^{\substack{\text{contribution to } \boldsymbol{\Delta MLD}\\(j^{\text{th}}\ \text{age class})}} = \overbrace{\bar{p}_j \cdot \Delta MLD_j}^{\substack{\text{intra}-\text{variation}\\(j^{\text{th}}\ \text{age class})}} + \overbrace{\bar{p}_j \left(\Delta MLD - \Delta MLD_j\right)}^{\substack{\text{inter}-\text{variation}\\(j^{\text{th}}\ \text{age class})}} + \overbrace{\overline{MLD} \cdot \Delta p_j}^{\substack{\text{effect of population ageing}\\(j^{\text{th}}\ \text{age class})}}
\end{cases}
$$

〈叙述の順序〉

は じ め に

平均対数偏差（mean logarithmic deviation：*MLD*）は，対数分散（logarithmic variance：*LV*）と同様に，その統計量について 2 時点間の差分を分解すれば，①級内変動，②級間変動，③人口動態効果に要因分解される。第 3 の要因である人口動態効果は，「見かけ上」の格差を検出する計測指標としての機能を果たすと言われている。

人口動態効果の検出のために使用される平均対数偏差の要因分解式には，知りうる限り 2 種類ある。第 1 は，所得分布の研究に初めて導入されたムッカジーとショロックス[1]

(1)　Mookhergee, Dilip and Shorrocks, Anthony, “A Decomposition Analysis of the Trend in UK Income Inequality,” *The Economic Journal*, Vol. 92, 1982. ムッカジーとショロックスは，ジニ係数の要因分解では， 2 時点間における所得格差の変動に影響をあたえる人口動態効果（彼らのいわゆる「年齢効果（age effect)」）を検出するには難があるとして，平均対数偏差に着目した（木村和範『格差は「見かけ上」か：所得分布の統計解析』日本経済評論社，2013 年，第 1 章参照）。

なお，ムッカジーとショロックスの分解につい

の方式（および，それと同系統のジェンキンス[(2)]）による要因分解式である。第２は，それとは異なる要因分解式（別解）である[(3)]。本稿は，この２種類の要因分解式を比較し，それぞれの数理的特質にかんする検討を目的とする。

１．単一時点における平均対数偏差の分解

以下の数式で使用する文字の意味は，それぞれ次のとおりとする。

N：全年齢階級の世帯総数

m：世帯主の年齢で世帯をグループ分けしたときの，年齢階級の個数

k_j：第 j 年齢階級に落ちる世帯数 $\left(N=k_1+\cdots+k_j+\cdots+k_m=\sum_{j=1}^{m}k_j\right)$

$\dfrac{k_j}{N}\,(=p_j)$：第 j 年齢階級の世帯シェア

x_i：第 i 番目の世帯所得 $(i=1,2,\cdots,N)$

$\bar{x}\left(=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\right)$：全年齢階級の世帯所得の分布の相加平均（本稿では $\mathfrak{m}_A$ と書くこともある）

$\bar{x}_j\left(=\dfrac{1}{k_j}\sum_{i=1}^{k_j}x_i\right)$：第 j 年齢階級に落ちる世帯所得の分布の相加平均（本稿では $\mathfrak{m}_{A_j}$ と書くこともある）[(4)]

ては　①「不平等，格差の分析手法　対数標準偏差　シュロックス分解」（http://takamasa.at.webry.info/200805/article_1.html, accessed on Jan. 18, 2018）；②内閣府『平成 18 年　経済財政白書』（2006 年），352 頁以下；③①にもとづく木村和範「所得格差の変動にたいする人口動態効果の計測」『経済論集』（北海学園大学）第 66 巻第１号，2018 年［木村（2018 a）］，33 頁参照。

(2)　Jenkins, Stephen P., “Accounting for Inequality Trends: Decomposition Analysis for the UK, 1971-86,” *Economica*, Vol. 62, No. 245, 1995. これについては，四方理人「家族・就労の変化と所得格差」『ソシオネットワーク戦略ディスカッションペーパーシリーズ』（関西大学ソシオネットワーク戦略研究機構）第 22 号，2012 年，８頁以下も参照。

(3)　木村和範「人口構成の変化と所得分布」『経済論集』（北海学園大学）第 66 巻第２号，2018 年［以下，木村（2018 b）］，７頁以下。

(4)　$\bar{x}_j$を用いれば，$\bar{x}$は，以下のようにも表すことができる。

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{m}\frac{k_j}{N}\bar{x}_j$$

証明は以下のとおり。

$$\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\\&=\frac{1}{N}\Big\{\overbrace{(x_1+\cdots+x_{k_1})}^{\text{第1年齢階級}}+\cdots\\&\quad+\overbrace{(x_1+\cdots+x_{k_j})}^{\text{第 }j\text{ 年齢階級}}+\cdots\\&\quad+\overbrace{(x_1+\cdots+x_{k_m})}^{\text{第 }m\text{ 年齢階級}}\Big\}\end{aligned} \qquad ①$$

$$\bar{x}_j=\frac{1}{k_j}\sum_{i=1}^{k_j}x_i$$

より，

$$\begin{aligned}k_j\cdot\bar{x}_j&=\sum_{i=1}^{k_j}x_i\\&=x_1+\cdots+x_{k_j}\end{aligned}\qquad ②$$

②式を①式に代入すれば，次式を得る。

$$\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{1}{N}\Big\{\overbrace{k_1\cdot\bar{x}_1}^{\text{第1年齢階級}}+\cdots+\overbrace{k_j\cdot\bar{x}_j}^{\text{第 }j\text{ 年齢階級}}+\cdots+\overbrace{k_m\cdot\bar{x}_m}^{\text{第 }m\text{ 年齢階級}}\Big\}\\&=\overbrace{\frac{k_1}{N}\cdot\bar{x}_1}^{\text{第1年齢階級}}+\cdots+\overbrace{\frac{k_j}{N}\cdot\bar{x}_j}^{\text{第 }j\text{ 年齢階級}}+\cdots+\overbrace{\frac{k_m}{N}\cdot\bar{x}_m}^{\text{第 }m\text{ 年齢階級}}\\&=\sum_{i=1}^{m}\frac{k_j}{N}\bar{x}_j\end{aligned}\qquad ③$$

q. e. d.

ここに，第 j 年齢階級にかんする

$$\frac{k_j}{N}\bar{x}_j$$

は，総平均 $\bar{x}$ にたいする当該階級の寄与分である。

なお，

$$p_j=\frac{k_j}{N}$$

とおけば，③式は

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{m}p_j\cdot\bar{x}_j \qquad ④$$

と表すことができる。このとき，第 j 年齢階級の

$\mathfrak{m}_G\left(=\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N}x_i}\right)$：全年齢階級の世帯所得の分布の相乗平均

$\mathfrak{m}_{G_j}\left(=\sqrt[k_j]{\prod_{i=1}^{k_j}x_i}\right)$：第 j 年齢階級に落ちる世帯所得の分布の相乗平均

$MLD\left(=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\log\bar{x}-\log x_i)\right)$：全年齢階級の世帯所得の分布の平均対数偏差

$MLD_j\left(=\frac{1}{k_j}\sum_{i=1}^{k_j}(\log\bar{x}_j-\log x_i)\right)$：第 j 年齢階級の世帯所得の分布の平均対数偏差

$\log x_i$：第 i 番目の世帯所得 (x_i) にかんする対数変換値

$\overline{\log x}\left(=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log x_i\right)$：全年齢階級の世帯所得にかんする対数変換値 $(\log x_i)$ の分布の相加平均

$\overline{\log x_j}\left(=\frac{1}{k_j}\sum_{i=1}^{k_j}\log x_i\right)$：第$j$年齢階級に落ちる世帯所得（対数変換済み）の分布の相加平均(5)

(1)　要因分解式

全年齢階級の平均対数偏差を MLD，それにたいする年齢階級別寄与分（第 j 年齢階級の寄与分）を ${}^{MLD}C_j$ とおく。

ムッカジーとショロックスの方式による要因分解式は，以下のとおりである。

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\overbrace{MLD}^{\substack{\text{平均対数偏差}\\(\text{全年齢階級})}}=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot MLD_j}^{\substack{\text{級内変動}\\(\text{全年齢階級})}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j\,(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)}^{\substack{\text{級間変動}\\(\text{全年齢階級})}} &\quad(1\text{-}1)\\
&\overbrace{{}^{MLD}C_j}^{\substack{MLD\text{にたいする寄与分}\\(\text{第 }j\text{ 年齢階級})}}=\overbrace{p_j\cdot MLD_j}^{\substack{\text{級内変動}\\(\text{第 }j\text{ 年齢階級})}}+\overbrace{p_j\,(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)}^{\substack{\text{級間変動}\\(\text{第 }j\text{ 年齢階級})}} &\quad(1\text{-}2)
\end{aligned}
\right.
$$

他方で，ムッカジーとショロックスの方式とは別の仕方・様式によって導出される要因

寄与分は，

$p_j\cdot\bar{x}_j$

である。

(5)　$\overline{\log x_j}$ を用いれば，$\overline{\log x}$ は，以下のようにも表すことができる。

$$\overline{\log x}=\sum_{i=1}^{m}\frac{k_j}{N}\overline{\log x_j}$$

証明は以下のとおり。

$$
\begin{aligned}
\overline{\log x}&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log x_i\\
&=\frac{1}{N}\left\{\overbrace{(\log x_1+\cdots+\log x_{k_1})}^{\text{第 1 年齢階級}}+\cdots\right.\\
&\quad+\overbrace{(\log x_1+\cdots+\log x_{k_j})}^{\text{第 }j\text{ 年齢階級}}+\cdots\\
&\quad\left.+\overbrace{(\log x_1+\cdots+\log x_{k_m})}^{\text{第 }m\text{ 年齢階級}}\right\} \qquad ⑤
\end{aligned}
$$

ここに，

$$\overline{\log x_j}=\frac{1}{k_j}\sum_{i=1}^{k_j}\log x_i$$

であるから，次式を得る。

$$
\begin{aligned}
k_j\cdot\overline{\log x_j}&=\sum_{i=1}^{k_j}\log x_i\\
&=\log x_1+\cdots+\log x_{k_j} \qquad ⑥
\end{aligned}
$$

⑥式を⑤式に代入すれば，次式を得る。

$$
\begin{aligned}
&\overline{\log x}\\
&=\frac{1}{N}\left\{\overbrace{k_1\cdot\overline{\log x_1}}^{\text{第1年齢階級}}+\cdots+\overbrace{k_j\cdot\overline{\log x_j}}^{\text{第}j\text{年齢階級}}+\cdots+\overbrace{k_m\cdot\overline{\log x_m}}^{\text{第}m\text{年齢階級}}\right\}\\
&=\overbrace{\frac{k_1}{N}\cdot\overline{\log x_1}}^{\text{第1年齢階級}}+\cdots+\overbrace{\frac{k_j}{N}\cdot\overline{\log x_j}}^{\text{第}j\text{年齢階級}}+\cdots+\overbrace{\frac{k_m}{N}\cdot\overline{\log x_m}}^{\text{第}m\text{年齢階級}}\\
&=\sum_{i=1}^{m}\frac{k_j}{N}\cdot\overline{\log x_j} \qquad ⑦
\end{aligned}
$$

q. e. d.

ここに，第 j 年齢階級にかんする

$$\frac{k_j}{N}\cdot\overline{\log x_j}$$

は，総平均 $\overline{\log x}$ にたいする当該年齢階級の寄与分である。

なお，

$$p_j=\frac{k_j}{N}$$

とおけば，⑦式は

$$\overline{\log x}=\sum_{i=1}^{m}p_j\cdot\overline{\log x_j} \qquad ⑧$$

と表すことができる。このとき，第 j 年齢階級の寄与分は，

$p_j\cdot\overline{\log x_j}$

である。

分解式（別解）は，以下のとおりである。

$$\begin{cases} \overbrace{MLD}^{\substack{\text{平均対数偏差}\\ \text{(全年齢階級)}}} = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot MLD_j}^{\substack{\text{級内変動}\\ \text{(全年齢階級)}}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j (MLD - MLD_j)}^{\substack{\text{級間変動}\\ \text{(全年齢階級)}}} & (1\text{-}3)\\ \overbrace{{}^{MLD}C_j}^{\substack{MLD\text{にたいする寄与分}\\ \text{(第}j\text{年齢階級)}}} = \overbrace{p_j \cdot MLD_j}^{\substack{\text{級内変動}\\ \text{(第}j\text{年齢階級)}}} + \overbrace{p_j (MLD - MLD_j)}^{\substack{\text{級間変動}\\ \text{(第}j\text{年齢階級)}}} & (1\text{-}4) \end{cases}$$

⑵　要因分解式の比較（その１：級内変動）

①　全年齢階級

(1-1)式と(1-3)式を比較すると，全年齢階級の級内変動を計測する数式が同一であることが分かる。したがって，ムッカジーとショロックスの要因分解式による級内変動と別解の級内変動は，同一の値をあたえる。すなわち，

$$\overbrace{\sum_{i=1}^{m} p_j \cdot MLD_j}^{\text{(1-1)式による級内変動}} = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot MLD_j}^{\text{(1-3)式による級内変動}} \qquad (1\text{-}5)$$

②　年齢階級別

(1-2)式と(1-4)式を比較する。両方の要因分解式は同一の値の級内変動をあたえる。すなわち，

$$\overbrace{p_j \cdot MLD_j}^{\text{(1-2)式による級内変動}} = \overbrace{p_j \cdot MLD_j}^{\text{(1-4)式による級内変動}} \qquad (1\text{-}6)$$

⑶　要因分解式の比較（その２：級間変動）

①　全年齢階級

(1-1)式と(1-3)式を以下のように変形する。

$$\begin{cases} \overbrace{MLD}^{\substack{\text{平均対数偏差}\\ \text{(全年齢階級)}}} - \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot MLD_j}^{\substack{\text{級内変動}\\ \text{(全年齢階級)}}} = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j (\log \bar{x} - \log \bar{x}_j)}^{\substack{\text{級間変動}\\ \text{(全年齢階級)}}} & (1\text{-}1)' \\ \overbrace{MLD}^{\substack{\text{平均対数偏差}\\ \text{(全年齢階級)}}} - \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot MLD_j}^{\substack{\text{級内変動}\\ \text{(全年齢階級)}}} = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j (MLD - MLD_j)}^{\substack{\text{級間変動}\\ \text{(全年齢階級)}}} & (1\text{-}3)' \end{cases}$$

(1-1)′式の左辺と(1-3)′式の左辺は同一であるから，全年齢階級にかんする２つの級間変動は

$$\overbrace{\sum_{i=1}^{m} p_j (\log \bar{x} - \log \bar{x}_j)}^{\text{(1-1)式による級間変動}} = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j (MLD - MLD_j)}^{\text{(1-3)式による級間変動}} \qquad (1\text{-}7)$$

となり，いずれの要因分解式による級間変動も同一の値になる。

②　年齢階級別

ここでは，(1-2)式における年齢階級別級間変動

$$p_j (\log \bar{x} - \log \bar{x}_j) \qquad (1\text{-}8)$$

と(1-4)式における年齢階級別級間変動

$$p_j (MLD - MLD_j) \qquad (1\text{-}9)$$

が同一の値をあたえるかどうかを検討する。そのために，上に掲げた２つの年齢階級別級間変動の差 $({}^{MLD}_{Inter}\mathfrak{D}_j)$

$$\begin{aligned} &{}^{MLD}_{Inter}\mathfrak{D}_j \\ &= \overbrace{p_j (\log \bar{x} - \log \bar{x}_j)}^{\substack{\text{(1-2)式による年齢階級別級間変動}\\ \text{[(1-8)式]}}} - \overbrace{p_j (MLD - MLD_j)}^{\substack{\text{(1-4)式による年齢階級別級間変動}\\ \text{[(1-9)式]}}} \\ &= p_j \{(\log \bar{x} - \log \bar{x}_j) - (MLD - MLD_j)\} \qquad (1\text{-}10) \end{aligned}$$

を検討する。

すでに明らかなように[(6)]，全年齢階級の世帯所得分布の相加平均を $\mathfrak{m}_A$，相乗平均を $\mathfrak{m}_G$ とおけば，平均対数偏差(MLD)は，

$$MLD = \log \mathfrak{m}_A - \log \mathfrak{m}_G \qquad (1\text{-}11)$$

と定義できる。同様に，第 j 年齢階級の平均対数偏差(MLD_j)は，当該年齢階級に落ちる世帯所得の分布の相加平均を $\mathfrak{m}_{A_j}$，相乗平均を $\mathfrak{m}_{G_j}$ とおけば，

(6)　木村和範「平均対数偏差の数学的性質にかんする覚書」『経済論集』(北海学園大学) 第65巻第１・２合併号，2017年［木村 (2017)］，４頁。本稿における数値例にかんする計算（後述）では，(1-11)式と(1-12)式を変形した次式を用いる。

$$MLD = \log \frac{\mathfrak{m}_A}{\mathfrak{m}_G}, \quad MLD_j = \log \frac{\mathfrak{m}_{A_j}}{\mathfrak{m}_{G_j}}$$

$$MLD_j = \log \mathfrak{m}_{A_j} - \log \mathfrak{m}_{G_j} \qquad (1\text{-}12)$$

である。

(1-11)式と(1-12)式を，(1-10)式に代入して整理すると次式を得る。

$${}^{MLD}_{Inter}\mathfrak{D}_j$$

$$= \overbrace{p_j(\log \bar{x} - \log \bar{x}_j)}^{\substack{\text{(1-2)式による年齢階級別級間変動} \\ \text{［(1-8)式］}}} - \overbrace{p_j(MLD - MLD_j)}^{\substack{\text{(1-4)式による年齢階級別級間変動} \\ \text{［(1-9)式］}}}$$

$$= p_j\{(\log \bar{x} - \log \bar{x}_j) - (MLD - MLD_j)\} \qquad (1\text{-}10)\text{［再掲］}$$

$$= p_j[(\log \mathfrak{m}_A - \log \mathfrak{m}_{A_j})$$
$$- \{(\log \mathfrak{m}_A - \log \mathfrak{m}_G) - (\log \mathfrak{m}_{A_j} - \log \mathfrak{m}_{G_j})\}]$$
$$= p_j(\log \mathfrak{m}_G - \log \mathfrak{m}_{G_j}) \qquad (1\text{-}10)'$$

(1-10)′式において

$$p_j = 0 \quad \vee \quad \log \mathfrak{m}_G - \log \mathfrak{m}_{G_j} = 0$$

が成立するとき，

$${}^{MLD}_{Inter}\mathfrak{D}_j = 0$$

となり，次のようになる。

$$\overbrace{p_j(\log \bar{x} - \log \bar{x}_j)}^{\substack{\text{(1-2)式による年齢階級別級間変動} \\ \text{［(1-8)式］}}} = \overbrace{p_j(MLD - MLD_j)}^{\substack{\text{(1-4)式による年齢階級別級間変動} \\ \text{［(1-9)式］}}} \qquad (1\text{-}13)$$

他方で，

$$p_j \neq 0 \quad \wedge \quad \log \mathfrak{m}_G - \log \mathfrak{m}_{G_j} \neq 0$$

が成立するとき，

$$\overbrace{p_j(\log \bar{x} - \log \bar{x}_j)}^{\substack{\text{(1-2)式による年齢階級別級間変動} \\ \text{［(1-8)式］}}} \neq \overbrace{p_j(MLD - MLD_j)}^{\substack{\text{(1-4)式による年齢階級別級間変動} \\ \text{［(1-9)式］}}} \qquad (1\text{-}14)$$

となる。

以下では，(1-13)式の成立条件について考察する。最初に，$p_j=0$ を取り上げる。p_j は，年齢階級別世帯シェアである。$p_j=0$ は第 j 年齢階級の世帯シェアがゼロであることを意味する。このとき，次式が成立する。

$$\overbrace{p_j(\log \bar{x} - \log \bar{x}_j)}^{\substack{\text{(1-2)式による年齢階級別級間変動} \\ \text{［(1-8)式］}}} = \overbrace{p_j(MLD - MLD_j)}^{\substack{\text{(1-4)式による年齢階級別級間変動} \\ \text{［(1-9)式］}}} \qquad (1\text{-}13)\text{［再掲］}$$

次に，(1-13)式の第 2 の成立条件

$$\log \mathfrak{m}_G - \log \mathfrak{m}_{G_j} = 0 \qquad (1\text{-}15)$$

を取り上げる。(1-15)式を次のように変形する。

$$\log \frac{\mathfrak{m}_G}{\mathfrak{m}_{G_j}} = 0$$
$$\frac{\mathfrak{m}_G}{\mathfrak{m}_{G_j}} = 1$$
$$\mathfrak{m}_G = \mathfrak{m}_{G_j} \qquad (1\text{-}16)$$

(1-16) 式は，全年齢階級の世帯所得（$x_i, i=1, 2, \cdots, N$）の分布の相乗平均（$\mathfrak{m}_G$）が，第 j 年齢階級に落ちる世帯所得（$x_{j_i}, i=1, 2, \cdots, k_j$）の分布の相乗平均（$\mathfrak{m}_{G_j}$）と相等しいことを意味する。2 つの相乗平均がこのような関係にある統計系列は，以下のようになる。

$$\begin{cases} \overbrace{x_1 = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = x_N}^{\text{全年齢階級(相乗平均：}\mathfrak{m}_G\text{)}} = X \\ \overbrace{x_{j_1} = \cdots\cdots = x_{j_{k_j}}}^{\text{第 } j \text{ 年齢階級(相乗平均：}\mathfrak{m}_{G_j}\text{)}} = X \end{cases}$$

すなわち，統計系列を構成するすべての項の値が相等しい場合が，これである。ここでは

$$p_j = 0 \quad \vee \quad \log \mathfrak{m}_G - \log \mathfrak{m}_{G_j} = 0$$

が現実に満たされるかどうかはおく。そして，上式が満たされていれば，

$$\overbrace{p_j(\log \bar{x} - \log \bar{x}_j)}^{\substack{\text{(1-2)式による年齢階級別級間変動} \\ \text{［(1-8)式］}}} = \overbrace{p_j(MLD - MLD_j)}^{\substack{\text{(1-4)式による年齢階級別級間変動} \\ \text{［(1-9)式］}}} \qquad (1\text{-}13)\text{［再掲］}$$

が成立し，そうでなければ，

$$\overbrace{p_j(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)}^{\substack{\text{(1-2)式による年齢階級別級間変動}\\ \text{[(1-8)式]}}}\ \neq\ \overbrace{p_j(MLD-MLD_j)}^{\substack{\text{(1-4)式による年齢階級別級間変動}\\ \text{[(1-9)式]}}}$$

(1-14)［再掲］

であること，すなわち，(1-2)式による年齢階級別級間変動と(1-4)式による年齢階級別級間変動が，つねに同一の値をあたえるとは限らないことを指摘するに留める。

③　小括

本節における以下の２組の数式の比較結果を要約する。

$$\begin{cases}\overbrace{MLD}^{\substack{\text{平均対数偏差}\\ \text{(全年齢階級)}}}=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot MLD_j}^{\substack{\text{級内変動}\\ \text{(全年齢階級)}}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)}^{\substack{\text{級間変動}\\ \text{(全年齢階級)}}} & \text{(1-1)［再掲］}\\ \overbrace{{}^{MLD}C_j}^{\substack{MLD\text{にたいする寄与分}\\ \text{(第}j\text{年齢階級)}}}=\overbrace{p_j\cdot MLD_j}^{\substack{\text{級内変動}\\ \text{(第}j\text{年齢階級)}}}+\overbrace{p_j(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)}^{\substack{\text{級間変動}\\ \text{(第}j\text{年齢階級)}}} & \text{(1-2)［再掲］}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\overbrace{MLD}^{\substack{\text{平均対数偏差}\\ \text{(全年齢階級)}}}=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot MLD_j}^{\substack{\text{級内変動}\\ \text{(全年齢階級)}}}+\overbrace{\left\{\sum_{j=1}^{m}p_j(MLD-MLD_j)\right\}}^{\substack{\text{級間変動}\\ \text{(全年齢階級)}}} & \text{(1-3)［再掲］}\\ \overbrace{{}^{MLD}C_j}^{\substack{MLD\text{にたいする寄与分}\\ \text{(第}j\text{年齢階級)}}}=\overbrace{p_j\cdot MLD_j}^{\substack{\text{級内変動}\\ \text{(第}j\text{年齢階級)}}}+\overbrace{p_j(MLD-MLD_j)}^{\substack{\text{級間変動}\\ \text{(第}j\text{年齢階級)}}} & \text{(1-4)［再掲］}\end{cases}$$

１）全年齢階級の級内変動について，両方の要因分解式（(1-1)式と(1-3)式）は，同一の値（$\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot MLD_j$）をあたえる。

２）年齢階級別の級内変動について，両方の要因分解式（(1-2)式と(1-4)式）は同一の値（$p_j\cdot MLD_j$）をあたえる。

３）全年齢階級の級間変動について，両方の要因分解式（(1-1)式と(1-3)式）は，同一の値をあたえる。すなわち，

$$\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)}^{\substack{\text{(1-1)式による級間変動}\\ \text{(全年齢階級)}}}=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j(MLD-MLD_j)}^{\substack{\text{(1-3)式による級間変動}\\ \text{(全年齢階級)}}}$$

(1-7)［再掲］

４）２つの年齢階級別級間変動

$p_j(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)$ と $p_j(MLD-MLD_j)$

については，

$$\begin{cases}\overbrace{p_j(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)}^{\substack{\text{(1-2)式による年齢階級別級間変動}\\ \text{[(1-8)式]}}}=\overbrace{p_j(MLD-MLD_j)}^{\substack{\text{(1-4)式による年齢階級別級間変動}\\ \text{[(1-9)式]}}} & \text{(1-13)［再掲］}\\ \overbrace{p_j(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)}^{\substack{\text{(1-2)式による年齢階級別級間変動}\\ \text{[(1-8)式]}}}\neq\overbrace{p_j(MLD-MLD_j)}^{\substack{\text{(1-4)式による年齢階級別級間変動}\\ \text{[(1-9)式]}}} & \text{(1-14)［再掲］}\end{cases}$$

の２つの可能性があり，両方の要因分解式がつねに同一の値をあたえるとは限らない。

④　数理形式上の比較

$$\overbrace{\sum_{i=1}^{m}p_j(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)}^{\text{(1-1)式による級間変動}}=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j(MLD-MLD_j)}^{\text{(1-3)式による級間変動}}$$

(1-7)［再掲］

が示すように，全年齢階級の級間変動は，(1-1)式と(1-3)式では，同一の値があたえられることを改めて確認する。

他方で，年齢階級別級間変動を比較すると，(1-2)式における級間変動

$$p_j(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)\qquad\text{(1-8)［再掲］}$$

には，前項末尾で述べたように，

$$\begin{cases}\overbrace{p_j(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)}^{\substack{\text{(1-2)式による年齢階級別級間変動}\\ \text{[(1-8)式]}}}=\overbrace{p_j(MLD-MLD_j)}^{\substack{\text{(1-4)式による年齢階級別級間変動}\\ \text{[(1-9)式]}}} & \text{(1-13)［再掲］}\\ \overbrace{p_j(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)}^{\substack{\text{(1-2)式による年齢階級別級間変動}\\ \text{[(1-8)式]}}}\neq\overbrace{p_j(MLD-MLD_j)}^{\substack{\text{(1-4)式による年齢階級別級間変動}\\ \text{[(1-9)式]}}} & \text{(1-14)［再掲］}\end{cases}$$

の２つの可能性が存在するために，(1-8)式は(1-4)式における級間変動

$$p_j(MLD-MLD_j)\qquad\text{(1-9)［再掲］}$$

とは必ずしも同一の値にならない。このことを再確認し，以下では，(1-8)式と(1-9)式が

あたえる２つの年齢階級別級間変動の測度について，その数理形式上の差異を比較検討する。

この目的のために，始めに，級内変動と級間変動の形式上の差異を取り上げる。(1-1)式と(1-2)式における級内変動

$$\overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot MLD_j}^{\substack{\text{級内変動(全年齢階級)}\\ \text{[(1-1)式]}}}\ ,\qquad \overbrace{p_j \cdot MLD_j}^{\substack{\text{級内変動(第}\,j\,\text{年齢階級)}\\ \text{[(1-2)式]}}}$$

では，年齢階級別世帯シェア（p_j）が被乗数（ウェイト）となり，年齢階級別平均対数偏差（MLD_j）が乗数となっている。

p_j が被乗数（ウェイト）になっていることは，(1-3)式と(1-4)式における級内変動

$$\overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot MLD_j}^{\substack{\text{級内変動(全年齢階級)}\\ \text{[(1-3)式]}}}\ ,\qquad \overbrace{p_j \cdot MLD_j}^{\substack{\text{級内変動(第}\,j\,\text{年齢階級)}\\ \text{[(1-4)式]}}}$$

についても同様である。級内変動については，全年齢階級にかんする(1-1)式と(1-3)式は同一であり，また，年齢階級別寄与分にかんする(1-2)式と(1-4)式も同一である。ムッカジーとショロックスの方式による要因分解式と別解には，異なるところがない。

ところが，級間変動では，(1-1)式および(1-2)式と(1-3)式および(1-4)式とでは，その内容が異なっている。(1-1)式と(1-2)式によれば，級間変動は，

$$\begin{cases} \text{全年齢階級：} \sum_{j=1}^{m} p_j (\log \bar{x} - \log \bar{x}_j) \\ \text{年齢階級別：} p_j (\log \bar{x} - \log \bar{x}_j) \end{cases}$$

で計測される。そこでは，年齢階級別世帯シェア（p_j）が，級内変動と同様に，被乗数（ウェイト）となり，計測指標を構成している。被乗数（ウェイト）にかんしては，(1-3)式および(1-4)式でも，級間変動は

$$\begin{cases} \text{全年齢階級：} \sum_{j=1}^{m} p_j (MLD - MLD_j) \\ \text{年齢階級別：} p_j (MLD - MLD_j) \end{cases}$$

であり，同様である。しかし，ムッカジーとショロックスの方式による(1-1)式と(1-2)式においては乗数には平均対数偏差が使われず，全年齢階級の相加平均（対数変換済み）と年齢階級別の相加平均（対数変換済み）との差分($\log \bar{x} - \log \bar{x}_j$)が使用されている。乗数として($MLD - MLD_j$)を用いる(1-3)式および(1-4)式（別解）との違いは，ここにある。

確かに，対数変換済みの相加平均の差分($\log \bar{x} - \log \bar{x}_j$)は，全年齢階級と第 j 年齢階級の乖離を反映している。そのために，全体と部分の乖離，すなわち級間変動を相加平均によって計測することが可能である。その限りでは，($\log \bar{x} - \log \bar{x}_j$)を乗数とする(1-1)式と(1-2)式は，それとして見れば，問題がないのかもしれない。しかし，平均対数偏差とその年齢階級別寄与分（$MLD, {}^{MLD}C_j$）を構成する級間変動の計測において，相加平均の使用が許容されるのは，それ以外には級間変動を計測できない場合に限られるのではないか。級間変動が，級内変動と同様に平均対数偏差によって計測されるのであれば，級内変動の計測指標との形式的整合性から見て，平均対数偏差を採用するのが望ましい。

以上により，級内変動を平均対数偏差(MLD_j)によって計測し，級間変動を相加平均の差($\log \bar{x} - \log \bar{x}_j$)によって計測する

$$\begin{cases} MLD = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot MLD_j}^{\text{級内変動}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j (\log \bar{x} - \log \bar{x}_j)}^{\text{級間変動}} & \text{(1-1)[再掲]} \\ {}^{MLD}C_j = \overbrace{p_j \cdot MLD_j}^{\text{第}\,j\,\text{階級の級内変動}} + \overbrace{p_j (\log \bar{x} - \log \bar{x}_j)}^{\text{第}\,j\,\text{階級の級間変動}} & \text{(1-2)[再掲]} \end{cases}$$

よりも，級内変動と級間変動の両方の計測に平均対数偏差を用い，それぞれ

MLD_j と $MLD - MLD_j$

を乗数とする

$$\begin{cases} \overbrace{MLD}^{\text{平均対数偏差（全年齢階級）}} = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot MLD_j}^{\text{級内変動（全年齢階級）}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j (MLD - MLD_j)}^{\text{級間変動（全年齢階級）}} & \text{(1-3)［再掲］} \\ \overbrace{{}^{MLD}C_j}^{MLD\text{にたいする寄与分（第}j\text{年齢階級）}} = \overbrace{p_j \cdot MLD_j}^{\text{級内変動（第}j\text{年齢階級）}} + \overbrace{p_j (MLD - MLD_j)}^{\text{級間変動（第}j\text{年齢階級）}} & \text{(1-4)［再掲］} \end{cases}$$

が推奨される。(1-3)式および(1-4)式は，級内変動の計測と級間変動の計測における数理形式上の整合性を担保しているからである。そして，級内変動と級間変動への平均対数偏差の要因分解を平均対数偏差によって統一的に行うことは，要因分解の実質的意味をより明確にするからでもある。

すでに述べたように，単一時点における平均対数偏差の要因分解式は少なくとも２種類，存在する。このことに応じて，平均対数偏差の差にかんする要因分解式も２種類が誘導される。その場合にも，２種類の分解式にたいする判断が問われる。上述の指摘は，そのときの論点とも重なる。その検討は，次節で取り上げる（2⑷要因分解式の比較（その３：人口動態効果）③人口動態効果の比較 参照）。

2．２時点間の平均対数偏差の差にかんする分解

本節で新たに使用する文字の意味は，それぞれ次のとおりである。

0：基準時点（文字の左上に記入し，たとえば，${}^{0}N$ は基準時点における全年齢階級の世帯総数を示す。また，${}^{0}x_i$ は，基準時点における第 i 番目の世帯所得を示す。）

t：比較時点（文字の左上に記入し，たとえば，${}^{t}N$ は比較時点における全年齢階級の世帯総数を示す。また，${}^{t}x_i$ は，基準時点における第 i 番目の世帯所得を示す。）

$\overline{p}_j\left(=\frac{1}{2}({}^{t}p_j+{}^{0}p_j)\right)$：２時点（比較時点と基準時点，以下同じ）における年齢階級別世帯シェアの相加平均

$\Delta p_j\,(={}^{t}p_j-{}^{0}p_j)$：年齢階級別世帯シェアの２時点間変化

$\Delta MLD\,(={}^{t}MLD-{}^{0}MLD)$：全年齢階級の所得分布の平均対数偏差の２時点間変化

$\Delta MLD_j\,(={}^{t}MLD_j-{}^{0}MLD_j)$：第 j 年齢階級の所得分布の平均対数偏差の２時点間変化

$\overline{MLD}\left(=\frac{1}{2}({}^{t}MLD+{}^{0}MLD)\right)$：２時点における平均対数偏差（全年齢階級）の相加平均

$\overline{MLD}_j\left(=\frac{1}{2}({}^{t}MLD_j+{}^{0}MLD_j)\right)$：２時点における平均対数偏差（第 j 年齢階級）の相加平均

$\Delta\log\overline{x}\,(=\log{}^{t}\overline{x}-\log{}^{0}\overline{x})$：全年齢階級の所得分布の相加平均（対数変換済み）の２時点間変化

ただし，

$${}^{t}\overline{x}=\frac{1}{{}^{t}N}\sum_{i=1}^{{}^{t}N}{}^{t}x_i,\ {}^{0}\overline{x}=\frac{1}{{}^{0}N}\sum_{i=1}^{{}^{0}N}{}^{0}x_i$$

$\Delta\log\overline{x}_j\,(=\log{}^{t}\overline{x}_j-\log{}^{0}\overline{x}_j)$：第 j 年齢階級の所得分布の相加平均（対数変換済み）の２時点間変化

ただし，

$${}^{t}\overline{x}_j=\frac{1}{{}^{t}k_j}\sum_{i=1}^{{}^{t}k_j}{}^{t}x_i,\ {}^{0}\overline{x}_j=\frac{1}{{}^{0}k_j}\sum_{i=1}^{{}^{0}k_j}{}^{0}x_i$$

$\overline{\log\overline{x}}\left(=\frac{1}{2}(\log{}^{t}\overline{x}+\log{}^{0}\overline{x})\right)$：２時点における全年齢階級の所得分布の相加平均（対数変換済み）の相加平均

$\overline{\log\overline{x}_j}\left(=\frac{1}{2}(\log{}^{t}\overline{x}_j+\log{}^{0}\overline{x}_j)\right)$：２時点における第 j 年齢階級の所得分布の相加平均（対数変換済み）の相加平均

⑴　要因分解式

ムッカジーとショロックスの方式による要

因分解式は以下のとおりである。

$$\left\{\begin{array}{ll}
\overbrace{\Delta MLD}^{MLD\text{の2時点間変化(全年齢階級)}} & \\
=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}} & \\
\quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\,(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} & \\
\quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}} & (2\text{-}1)\\
\overbrace{{}^{\Delta MLD}C_j}^{\Delta MLD\text{にたいする寄与分(第}j\text{年齢階級)}} & \\
=\overbrace{\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動(第}j\text{年齢階級)}} & \\
\quad+\overbrace{\bar{p}_j\,(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)}^{\text{級間変動(第}j\text{年齢階級)}} & \\
\quad+\overbrace{\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(第}j\text{年齢階級)}} & (2\text{-}2)
\end{array}\right.$$

他方で，ムッカジーとショロックスの方式とは異なる仕方・様式による要因分解式（別解）は以下のとおりである。

$$\left\{\begin{array}{ll}
\overbrace{\Delta MLD}^{MLD\text{の2時点間変化(全年齢階級)}} & \\
=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}} & \\
\quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\,(\Delta MLD-\Delta MLD_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} & \\
\quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{MLD}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}} & (2\text{-}3)\\
\overbrace{{}^{\Delta MLD}C_j}^{\Delta MLD\text{にたいする寄与分(第}j\text{年齢階級)}} & \\
=\overbrace{\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動(第}j\text{年齢階級)}} & \\
\quad+\overbrace{\bar{p}_j\,(\Delta MLD-\Delta MLD_j)}^{\text{級間変動(第}j\text{年齢階級)}} & \\
\quad+\overbrace{\overline{MLD}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(第}j\text{年齢階級)}} & (2\text{-}4)
\end{array}\right.$$

⑵　要因分解式の比較（その 1 ：級内変動）

①　全年齢階級

全年齢階級にかんして(2-1)式があたえる級内変動と(2-3)式があたえる級内変動は，

$$\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{(2-1)式による級内変動}}=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{(2-3)式による級内変動}}\qquad(2\text{-}5)$$

となり，同一である。

②　年齢階級別

(2-2)式と(2-4)式があたえる年齢階級別の級内変動は，

$$\overbrace{\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{(2-2)式による級内変動}}=\overbrace{\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{(2-4)式による級内変動}}\qquad(2\text{-}6)$$

である。どの分解式でも同一の値があたえられる。

⑶　要因分解式の比較（その 2 ：級間変動）

錯綜を回避するために，先に年齢階級別を取り上げる。

①　年齢階級別

(2-2)式による級間変動は

$$\bar{p}_j\,(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)\qquad(2\text{-}7)$$

である。他方で，(2-4)式による級間変動は

$$\bar{p}_j\,(\Delta MLD-\Delta MLD_j)\qquad(2\text{-}8)$$

である。(2-7)式の値と(2-8)式の値を比較するには，その差（${}^{\Delta MLD}_{Inter}\mathfrak{D}_j$）をとればよい。すなわち，

$$\begin{aligned}
&{}^{\Delta MLD}_{Inter}\mathfrak{D}_j\\
&=\overbrace{\bar{p}_j\,(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)}^{\text{(2-2)式による級間変動[(2-7)式]}}-\overbrace{\bar{p}_j\,(\Delta MLD-\Delta MLD_j)}^{\text{(2-4)式による級間変動[(2-8)式]}}\\
&\hspace{20em}(2\text{-}9)\\
&=\bar{p}_j\,\{(\log{}^t\bar{x}-\log{}^0\bar{x})-(\log{}^t\bar{x}_j-\log{}^0\bar{x}_j)\}\\
&\quad-\bar{p}_j\,\{({}^tMLD-{}^0MLD)-({}^tMLD_j-{}^0MLD_j)\}\\
&=\bar{p}_j\,\{(\log{}^t\bar{x}-\log{}^0\bar{x})-(\log{}^t\bar{x}_j-\log{}^0\bar{x}_j)\}\\
&\quad-\bar{p}_j\,[\{(\log{}^t\mathfrak{m}_A-\log{}^t\mathfrak{m}_G)-(\log{}^0\mathfrak{m}_A-\log{}^0\mathfrak{m}_G)\}
\end{aligned}$$

$$-\{(\log {}^t\mathfrak{m}_{A_j}-\log {}^t\mathfrak{m}_{G_j})-(\log {}^0\mathfrak{m}_{A_j}-\log {}^0\mathfrak{m}_{G_j})\}]$$

$\because$

$$\begin{cases} MLD=\log \mathfrak{m}_A-\log \mathfrak{m}_G & \text{(1-11)［再掲］} \\ MLD_j=\log \mathfrak{m}_{A_j}-\log \mathfrak{m}_{G_j} & \text{(1-12)［再掲］} \end{cases}$$

したがって

$$\begin{cases} {}^tMLD=\log {}^t\mathfrak{m}_A-\log {}^t\mathfrak{m}_G & \text{(1-11)}' \\ {}^0MLD=\log {}^0\mathfrak{m}_A-\log {}^0\mathfrak{m}_G & \text{(1-12)}' \end{cases}$$

$$\begin{cases} {}^tMLD_j=\log {}^t\mathfrak{m}_{A_j}-\log {}^t\mathfrak{m}_{G_j} & \text{(1-11)}'' \\ {}^0MLD_j=\log {}^0\mathfrak{m}_{A_j}-\log {}^0\mathfrak{m}_{G_j} & \text{(1-12)}'' \end{cases}$$

$$=\bar{p}_j\{(\log {}^t\mathfrak{m}_A-\log {}^0\mathfrak{m}_A)-(\log {}^t\mathfrak{m}_{A_j}-\log {}^0\mathfrak{m}_{A_j})\}$$
$$-\bar{p}_j[\{(\log {}^t\mathfrak{m}_A-\log {}^t\mathfrak{m}_G)-(\log {}^0\mathfrak{m}_A-\log {}^0\mathfrak{m}_G)\}$$
$$-\{(\log {}^t\mathfrak{m}_{A_j}-\log {}^t\mathfrak{m}_{G_j})-(\log {}^0\mathfrak{m}_{A_j}-\log {}^0\mathfrak{m}_{G_j})\}]$$

$\because$

$$\begin{cases} \mathfrak{m}_A=\bar{x} \\ \mathfrak{m}_{A_j}=\bar{x}_j \end{cases}$$

したがって

$$\begin{cases} {}^t\mathfrak{m}_A={}^t\bar{x} \\ {}^0\mathfrak{m}_A={}^0\bar{x}, \end{cases} \quad \begin{cases} {}^t\mathfrak{m}_{A_j}={}^t\bar{x}_j \\ {}^0\mathfrak{m}_{A_j}={}^0\bar{x}_j \end{cases}$$

$$=\bar{p}_j\{(\log {}^t\mathfrak{m}_G-\log {}^0\mathfrak{m}_G)-(\log {}^t\mathfrak{m}_{G_j}-\log {}^0\mathfrak{m}_{G_j})\} \tag{2-10}$$

以上要するに，２つの要因分解式（(2-2)式と(2-4)式）がそれぞれあたえる年齢階級別級間変動の差は，以下のようになる。

$${}^{\Delta MLD}_{Inter}\mathfrak{D}_j$$
$$=\overbrace{\bar{p}_j(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)}^{\text{(2-2)式による級間変動［(2-7)式］}}-\overbrace{\bar{p}_j(\Delta MLD-\Delta MLD_j)}^{\text{(2-4)式による級間変動［(2-8)式］}} \tag*{(2-9)［再掲］}$$
$$=\bar{p}_j\{(\log {}^t\mathfrak{m}_G-\log {}^0\mathfrak{m}_G)-(\log {}^t\mathfrak{m}_{G_j}-\log {}^0\mathfrak{m}_{G_j})\} \tag*{(2-10)［再掲］}$$

この(2-10)式において，

$${}^{\Delta MLD}_{Inter}\mathfrak{D}_j=\bar{p}_j\{(\log {}^t\mathfrak{m}_G-\log {}^0\mathfrak{m}_G)-(\log {}^t\mathfrak{m}_{G_j}-\log {}^0\mathfrak{m}_{G_j})\}$$
$$=0 \tag{2-11}$$

となるとき，

$$\overbrace{\bar{p}_j(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)}^{\text{(2-2)式による級間変動［(2-7)式］}}=\overbrace{\bar{p}_j(\Delta MLD-\Delta MLD_j)}^{\text{(2-4)式による級間変動［(2-8)式］}} \tag{2-12}$$

である。(2-12)式は，(2-11)式において

$$\begin{cases} \bar{p}_j=0 & \text{(2-13)} \\ (\log {}^t\mathfrak{m}_G-\log {}^0\mathfrak{m}_G)-(\log {}^t\mathfrak{m}_{G_j}-\log {}^0\mathfrak{m}_{G_j})=0 & \text{(2-14)} \end{cases}$$

のいずれか一方が満たされるときに成立する。

最初に，(2-12)式が成立するための第１の条件（(2-13)式）を規定する$\bar{p}_j$について考察する。$\bar{p}_j$は，

$$\bar{p}_j=\frac{1}{2}({}^tp_j+{}^0p_j) \tag{2-15}$$

である。２時点における年齢階級別世帯シェア(${}^tp_j$と${}^0p_j$)はいずれも非負，より厳密には，

$$\begin{cases} 0\leqq {}^tp_j<1 \\ 0\leqq {}^0p_j<1 \end{cases}$$

である。このために，(2-15)式において

$$\bar{p}_j=0 \tag*{(2-13)［再掲］}$$

となるのは，

$${}^tp_j=0 \quad \wedge \quad {}^0p_j=0$$

のときである。この場合には，

$$\overbrace{\bar{p}_j(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)}^{\text{(2-2)式による級間変動［(2-7)式］}}=\overbrace{\bar{p}_j(\Delta MLD-\Delta MLD_j)}^{\text{(2-4)式による級間変動［(2-8)式］}} \tag*{(2-12)［再掲］}$$

が成立する。

次に，

$${}^{\Delta MLD}_{Inter}\mathfrak{D}_j=\bar{p}_j\{(\log {}^t\mathfrak{m}_G-\log {}^0\mathfrak{m}_G)-(\log {}^t\mathfrak{m}_{G_j}-\log {}^0\mathfrak{m}_{G_j})\}$$
$$=0 \tag*{(2-11)［再掲］}$$

となり，(2-12)式が成立するための第２の条件，すなわち

$$(\log {}^t\mathfrak{m}_G-\log {}^0\mathfrak{m}_G)-(\log {}^t\mathfrak{m}_{G_j}-\log {}^0\mathfrak{m}_{G_j})=0 \tag*{(2-14)［再掲］}$$

を考察する。

(2-14)式は

$$\log \frac{{}^{t}\mathfrak{m}_G}{{}^{0}\mathfrak{m}_G} - \log \frac{{}^{t}\mathfrak{m}_{Gj}}{{}^{0}\mathfrak{m}_{Gj}} = 0 \qquad (2\text{-}14)'$$

と変形できる。したがって，(2-14)式の成立条件は，

$$\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_G}{{}^{0}\mathfrak{m}_G} = \frac{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}}{{}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}} = K$$

である(7)。K の値については，次の 3 とおりがある。

$$\begin{cases} 0 < K < 1 \\ K = 1 \\ K > 0 \end{cases}$$

たとえば，$K=1$ は，比較時点と基準時点における全年齢階級の所得分布の 2 つの相乗平均（${}^{t}\mathfrak{m}_G, {}^{0}\mathfrak{m}_G$）が相等しく，しかも，比較時点と基準時点における第 j 年齢階級の所得分布の 2 つの相乗平均（${}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}, {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}$）が相等しいことを意味する。このときには，

$${}^{\Delta MLD}_{Inter}\mathfrak{D}_j = \bar{p}_j \{(\log {}^{t}\mathfrak{m}_G - \log {}^{0}\mathfrak{m}_G) - (\log {}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} - \log {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j})\}$$
$$= 0 \qquad (2\text{-}11)[再掲]$$

となって，

$$\overbrace{\bar{p}_j(\Delta \log \bar{x} - \Delta \log \bar{x}_j)}^{\text{(2-2)式による級間変動[(2-7)式]}} = \overbrace{\bar{p}_j(\Delta MLD - \Delta MLD_j)}^{\text{(2-4)式による級間変動[(2-8)式]}}$$
$$(2\text{-}12)[再掲]$$

が成立する。

しかし，全年齢階級の所得分布の相乗平均と第 j 年齢階級の所得分布の相乗平均が，比較時点と基準時点において

$$\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_G}{{}^{0}\mathfrak{m}_G} \neq \frac{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}}{{}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}$$

となる場合には，次のようになる。

$$\overbrace{\bar{p}_j(\Delta \log \bar{x} - \Delta \log \bar{x}_j)}^{\text{(2-2)式による級間変動[(2-7)式]}} \neq \overbrace{\bar{p}_j(\Delta MLD - \Delta MLD_j)}^{\text{(2-4)式による級間変動[(2-8)式]}}$$
$$(2\text{-}16)$$

(2-12)式の成立条件（(2-13)式と(2-14)式）はどのようなものか，あるいはそれが現実に満たされるかどうかは，ここでは検討しない。(2-2)式の級間変動（(2-7)式）と(2-4)式の級間変動（(2-8)式）が，つねに一致するとは限らないことを指摘できれば十分である。

②　全年齢階級

$$\overbrace{\sum_{j=1}^{m} \bar{p}_j(\Delta \log \bar{x} - \Delta \log \bar{x}_j)}^{\text{(2-1)式による級間変動}} = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \bar{p}_j(\Delta MLD - \Delta MLD_j)}^{\text{(2-3)式による級間変動}}$$
$$(2\text{-}17)$$

が成立するかどうかを検討する。上で述べたように，第 j 年齢階級にかんする級間変動の乖離は以下のようになる。

---

(7)　(2-12)式が成立するための第 2 の条件（(2-14)式）は

$$(\log {}^{t}\mathfrak{m}_G - \log {}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}) - (\log {}^{0}\mathfrak{m}_G - \log {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}) = 0 \qquad ⑨$$

と同値であり，⑨式は，

$${}^{t}\mathfrak{m}_G = {}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \quad \wedge \quad {}^{0}\mathfrak{m}_G = {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j} \qquad ⑩$$

のときに成立する。また，⑨式を

$$\log \frac{{}^{t}\mathfrak{m}_G}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}} - \log \frac{{}^{0}\mathfrak{m}_G}{{}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}} = 0 \qquad ⑪$$

と変形すれば，

$$\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_G}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}} = \frac{{}^{0}\mathfrak{m}_G}{{}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}} = K' \qquad ⑫$$

となり，⑫式が成立するとき，⑨式が成立する。このように，(2-12)式の成立条件は，本文で述べた以外（$0<K'<1$，$K'=1$，$K'>0$）にも存在する。その意味で，本文で掲げた条件は(2-12)式の十分条件である。

この箇所における叙述の趣旨は，(2-12)式が成立するには，所定の条件を満たしていなければならず，そうでない場合には(2-12)式は成立しないこと（すなわち，つねに(2-12)式が成立しているわけではないこと），換言すれば，所定の条件を満たしていない限り，(2-12)式が成立しないことである。(2-12)式が成立するための十分条件を 1 つ取り上げ，その一例だけを掲げた理由はそこにある。

$$
\begin{aligned}
&{}^{\Delta MLD}_{Inter}\mathfrak{D}_j\\
&=\overbrace{\bar{p}_j(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)}^{\text{(2-2)式による級間変動[(2-7)式]}}-\overbrace{\bar{p}_j(\Delta MLD-\Delta MLD_j)}^{\text{(2-4)式による級間変動[(2-8)式]}} \qquad \text{(2-9)[再掲]}\\
&=\bar{p}_j\{(\log{}^t\mathfrak{m}_G-\log{}^0\mathfrak{m}_G)-(\log{}^t\mathfrak{m}_{G_j}-\log{}^0\mathfrak{m}_{G_j})\} \qquad \text{(2-10)[再掲]}
\end{aligned}
$$

ムッカジーとショロックスの方式による要因分解式と別解があたえる全年齢階級にかんする２つの級間変動の乖離，すなわち

$$
\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)}^{\text{(2-1)式による級間変動}}-\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j(\Delta MLD-\Delta MLD_j)}^{\text{(2-3)式による級間変動}} \qquad \text{(2-18)}
$$

は，年齢階級別級間変動の乖離（${}^{\Delta MLD}_{Inter}\mathfrak{D}_j$）の総和であるから，(2-18)式は(2-10)式により以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m}{}^{\Delta MLD}_{Inter}\mathfrak{D}_j\\
&=\sum_{j=1}^{m}\left[\overbrace{\bar{p}_j\{(\log{}^t\mathfrak{m}_G-\log{}^0\mathfrak{m}_G)-(\log{}^t\mathfrak{m}_{G_j}-\log{}^0\mathfrak{m}_{G_j})\}}^{\text{(2-10)式}}\right]\\
&=\overbrace{\bar{p}_1\{(\log{}^t\mathfrak{m}_G-\log{}^0\mathfrak{m}_G)-(\log{}^t\mathfrak{m}_{G_1}-\log{}^0\mathfrak{m}_{G_1})\}}^{\text{第 1 年齢階級}}+\cdots\\
&\quad+\overbrace{\bar{p}_j\{(\log{}^t\mathfrak{m}_G-\log{}^0\mathfrak{m}_G)-(\log{}^t\mathfrak{m}_{G_j}-\log{}^t\mathfrak{m}_{G_j})\}}^{\text{第 }j\text{ 年齢階級}}+\cdots\\
&\quad+\overbrace{\bar{p}_m\{(\log{}^t\mathfrak{m}_G-\log{}^0\mathfrak{m}_G)-(\log{}^t\mathfrak{m}_{G_m}-\log{}^0\mathfrak{m}_{G_m})\}}^{\text{第 }m\text{ 年齢階級}}\\
&=(\bar{p}_1+\cdots+\bar{p}_j+\cdots+\bar{p}_m)(\log{}^t\mathfrak{m}_G-\log{}^0\mathfrak{m}_G)\\
&\quad-\{\bar{p}_1(\log{}^t\mathfrak{m}_{G_1}-\log{}^0\mathfrak{m}_{G_1})+\cdots\\
&\qquad+\bar{p}_j(\log{}^t\mathfrak{m}_{G_j}-\log{}^0\mathfrak{m}_{G_j})+\cdots\\
&\qquad+\bar{p}_m(\log{}^t\mathfrak{m}_{G_m}-\log{}^0\mathfrak{m}_{G_m})\} \qquad \text{(2-19)}
\end{aligned}
$$

この(2-19)式の値がゼロになる条件は，数学的には，

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\bar{p}_1=\cdots=\bar{p}_j=\cdots=\bar{p}_m=0 & \text{(2-20)}\\
\quad\log{}^t\mathfrak{m}_G-\log{}^0\mathfrak{m}_G & \\
=\log{}^t\mathfrak{m}_{G_1}-\log{}^0\mathfrak{m}_{G_1}=\cdots & \\
=\log{}^t\mathfrak{m}_{G_j}-\log{}^0\mathfrak{m}_{G_j}=\cdots & \\
=\log{}^t\mathfrak{m}_{G_m}-\log{}^0\mathfrak{m}_{G_m} & \\
=0 & \text{(2-21)}
\end{array}
\right.
$$

の２式のいずれかが満たされていることである。

第１の条件（(2-20)式）は，すべての年齢階級について２時点における世帯シェアの相加平均がゼロであることを意味する。これは，すべての年齢階級別世帯シェア（p_j）が，基準時点と比較時点のいずれにおいても，一般に

$$p_j=0$$

となることと同義であり，世帯分布の実態には照応しない。したがって，(2-20)式は(2-19)式の成立条件から排除することができる。

残る第２の条件（(2-21)式）は，対数の差と商の関係により，以下のようになる。すなわち，

$$
\log\frac{{}^t\mathfrak{m}_G}{{}^0\mathfrak{m}_G}=\log\frac{{}^t\mathfrak{m}_{G_1}}{{}^0\mathfrak{m}_{G_1}}=\cdots=\log\frac{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}}{{}^0\mathfrak{m}_{G_j}}=\cdots=\log\frac{{}^t\mathfrak{m}_{G_m}}{{}^0\mathfrak{m}_{G_m}}=0 \qquad \text{(2-21)}'
$$

真数が１のとき，対数はゼロになる。よって，(2-21)′式は次のようになる。

$$
\frac{{}^t\mathfrak{m}_G}{{}^0\mathfrak{m}_G}=\frac{{}^t\mathfrak{m}_{G_1}}{{}^0\mathfrak{m}_{G_1}}=\cdots=\frac{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}}{{}^0\mathfrak{m}_{G_j}}=\cdots=\frac{{}^t\mathfrak{m}_{G_m}}{{}^0\mathfrak{m}_{G_m}}=1 \qquad \text{(2-21)}''
$$

したがって，

$$\begin{cases} {}^{t}\mathfrak{m}_{G}={}^{0}\mathfrak{m}_{G} \\ {}^{t}\mathfrak{m}_{G_1}={}^{0}\mathfrak{m}_{G_1} \\ \quad\vdots \\ {}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}={}^{0}\mathfrak{m}_{G_j} \\ \quad\vdots \\ {}^{t}\mathfrak{m}_{G_m}={}^{0}\mathfrak{m}_{G_m} \end{cases} \qquad (2\text{-}21)'''$$

(2-21)‴式は，①比較時点と基準時点のいずれにおいても，全年齢階級の所得分布の相乗平均が相等しいだけでなく，②すべての年齢階級について，比較時点と基準時点の両方で，その所得分布の相乗平均が相等しいことを意味している。これは，相乗平均で所得分布を計測すれば，全年齢階級についても，すべての年齢階級についても，基準時点と比較時点では変化がなかったことを含意する。

以上，(2-1)式の級間変動と(2-3)式の級間変動が相等しくなる 2 つの数学的条件

$$\begin{cases} \bar{p}_1=\cdots=\bar{p}_j=\cdots=\bar{p}_m=0 & (2\text{-}20)[\text{再掲}] \\ \quad\log {}^{t}\mathfrak{m}_G-\log {}^{0}\mathfrak{m}_G & \\ =\log {}^{t}\mathfrak{m}_{G_1}-\log {}^{0}\mathfrak{m}_{G_1}=\cdots & \\ =\log {}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}-\log {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}=\cdots & \\ =\log {}^{t}\mathfrak{m}_{G_m}-\log {}^{0}\mathfrak{m}_{G_m} & \\ =0 & (2\text{-}21)[\text{再掲}] \end{cases}$$

を検討した。(2-20)式は除外されるとしても，現実には，(2-21)式が満たされるとき，

$$\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j(\varDelta\log\bar{x}-\varDelta\log\bar{x}_j)}^{(2\text{-}1)\text{式による級間変動}}=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j(\varDelta MLD-\varDelta MLD_j)}^{(2\text{-}3)\text{式による級間変動}} \qquad (2\text{-}17)[\text{再掲}]$$

が成立する。

(2-21)式が満たされない場合には

$$\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j(\varDelta\log\bar{x}-\varDelta\log\bar{x}_j)}^{(2\text{-}1)\text{式による級間変動}}\neq\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j(\varDelta MLD-\varDelta MLD_j)}^{(2\text{-}3)\text{式による級間変動}} \qquad (2\text{-}22)$$

となる。

ここでは，(2-17)式の第 2 の成立条件((2-21)式）が現実に満たされるかどうかはともかくとして，数学的には(2-1)式の級間変動（ムッカジーとショロックスの方式）と(2-3)式の級間変動（別解）が，つねに同一の値をあたえるとは限らないことを指摘しておく。

(4) 要因分解式の比較（その 3 ：人口動態効果)

2 種類の要因分解式があたえる人口動態効果を比較するために，ムッカジーとショロックスの方式によって誘導された(2-1)式と(2-2)式を次のように変形する。以下の 4 式では，紙幅の関係で $\varDelta MLD$（MLD の 2 時点間変化（全年齢階級)）と ${}^{\varDelta MLD}C_j$（$\varDelta MLD$ にたいする寄与分（第 j 年齢階級)）にたいする注記を省略する。

$$\begin{cases} \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\{\overline{MLD}_j+(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j})\}\varDelta p_j}^{\substack{\text{人口動態効果(全年齢階級)}\\ \text{((2-1)式右辺第 3 項)}}} \\ =\overbrace{\Bigl(\varDelta MLD-\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\cdot\varDelta MLD_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}}\Bigr)}^{\text{第 1 項}}-\overbrace{\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j(\varDelta\log\bar{x}-\varDelta\log\bar{x}_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}}}^{\text{第 2 項}} \qquad (2\text{-}23) \\ \overbrace{\{\overline{MLD}_j+(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j})\}\varDelta p_j}^{\substack{\text{人口動態効果(第 } j \text{ 年齢階級)}\\ \text{((2-2)式右辺第 3 項)}}} \\ =\overbrace{\Bigl({}^{\varDelta MLD}C_j-\overbrace{\bar{p}_j\cdot\varDelta MLD_j}^{\text{級内変動(第 } j \text{ 年齢階級)}}\Bigr)}^{\text{第 1 項}}-\overbrace{\overbrace{\bar{p}_j(\varDelta\log\bar{x}-\varDelta\log\bar{x}_j)}^{\text{級間変動(第 } j \text{ 年齢階級)}}}^{\text{第 2 項}} \qquad (2\text{-}24) \end{cases}$$

また，別解として誘導された(2-3)式と(2-4)式を以下のように変形する。

$$\left\{\begin{aligned}
&\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{MLD}\cdot\Delta p_j}^{\substack{\text{人口動態効果（全年齢階級）}\\ \text{（(2-3)式右辺第3項）}}}\\
&=\overbrace{\left(\Delta MLD-\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動（全年齢階級）}}\right)}^{\text{第1項}}-\overbrace{\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\,(\Delta MLD-\Delta MLD_j)}^{\text{級間変動（全年齢階級）}}}^{\text{第2項}} \qquad (2\text{-}25)\\
&\overbrace{\overline{MLD}\cdot\Delta p_j}^{\substack{\text{人口動態効果（第}j\text{年齢階級）}\\ \text{（(2-4)式右辺第3項）}}}\\
&=\overbrace{\left({}^{\Delta MLD}C_j-\overbrace{\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動（第}j\text{年齢階級）}}\right)}^{\text{第1項}}-\overbrace{\overbrace{\bar{p}_j\,(\Delta MLD-\Delta MLD_j)}^{\text{級間変動（第}j\text{年齢階級）}}}^{\text{第2項}} \qquad (2\text{-}26)
\end{aligned}\right.$$

①　全年齢階級

本節⑵要因分解式の比較（その１：級内変動）の①全年齢階級で述べたように，(2-23)式右辺第１項を構成する全年齢階級の級内変動と(2-25)式右辺第１項を構成する全年齢階級の級内変動は，同一の値をあたえる（(2-5)式参照）。しかし，本節⑶要因分解式の比較（その２：級間変動）の②全年齢階級で述べたように，全年齢階級にかんする２つの級間変動（(2-23)式右辺第２項の値と(2-25)式右辺第２項）は，所定の条件のもとでのみ，同一の値となるが，つねに同一の値になるとは限らない（(2-17)式と(2-22)式参照）。したがって，人口動態効果（全年齢階級）にかんしては(2-23)式左辺

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j \qquad (2\text{-}27)$$

と(2-25)式左辺

$$\sum_{j=1}^{m}\overline{MLD}\cdot\Delta p_j \qquad (2\text{-}28)$$

については，(2-23)式右辺第２項と(2-25)式右辺第２項の級間変動の大小関係に応じて数学的には，

$$\left\{\begin{aligned}
&\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{\text{(2-23)式左辺の人口動態効果［(2-27)式］}}\\
&=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{MLD}\cdot\Delta p_j}^{\text{(2-25)式左辺の人口動態効果［(2-28)式］}} \qquad (2\text{-}29)\\
&\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{\text{(2-23)式左辺の人口動態効果［(2-27)式］}}\\
&\neq\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{MLD}\cdot\Delta p_j}^{\text{(2-25)式左辺の人口動態効果［(2-28)式］}} \qquad (2\text{-}30)
\end{aligned}\right.$$

という２とおりの可能性がある。したがって，２つの要因分解式による人口動態効果が，つねに同一の値になるとは限らない。

②　年齢階級別

(2-24)式左辺の

$$\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j \qquad (2\text{-}31)$$

と(2-26)式左辺の

$$\overline{MLD}\cdot\Delta p_j \qquad (2\text{-}32)$$

の大小を比較する。そのために，以下では(2-31)式と(2-32)式の差（${}^{\Delta MLD}_{Classis}\mathfrak{D}_j$）をとる。

$$\begin{aligned}
&{}^{\Delta MLD}_{Classis}\mathfrak{D}_j\\
&=\overbrace{\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{\text{(2-24)式左辺の人口動態効果［(2-31)式］}}\\
&\quad-\overbrace{\overline{MLD}\cdot\Delta p_j}^{\text{(2-26)式左辺の人口動態効果［(2-32)式］}}\\
&=\left[\frac{1}{2}({}^{t}MLD_j+{}^{0}MLD_j)\right.\\
&\quad\left.+\left\{\frac{1}{2}(\log{}^{t}\bar{x}+\log{}^{0}\bar{x})-\frac{1}{2}(\log{}^{t}\bar{x}_j+\log{}^{0}\bar{x}_j)\right\}\right]\Delta p_j\\
&\quad-\frac{1}{2}({}^{t}MLD+{}^{0}MLD)\Delta p_j\\
&=\frac{1}{2}\Delta p_j\left\{(\log{}^{t}\mathfrak{m}_{A_j}-\log{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j})+(\log{}^{0}\mathfrak{m}_{A_j}-\log{}^{0}\mathfrak{m}_{G_j})\right\}\\
&\quad+\frac{1}{2}\Delta p_j\left\{(\log{}^{t}\mathfrak{m}_{A}+\log{}^{0}\mathfrak{m}_{A})-(\log{}^{t}\mathfrak{m}_{A_j}+\log{}^{0}\mathfrak{m}_{A_j})\right\}\\
&\quad-\frac{1}{2}\Delta p_j\left\{(\log{}^{t}\mathfrak{m}_{A}-\log{}^{t}\mathfrak{m}_{G})+(\log{}^{0}\mathfrak{m}_{A}-\log{}^{0}\mathfrak{m}_{G})\right\}
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\Delta p_j\left\{\left(\log {}^t\mathfrak{m}_G-\log {}^t\mathfrak{m}_{G_j}\right)+\left(\log {}^0\mathfrak{m}_G-\log {}^0\mathfrak{m}_{G_j}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\Delta p_j\left(\log\frac{{}^t\mathfrak{m}_G}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}}+\log\frac{{}^0\mathfrak{m}_G}{{}^0\mathfrak{m}_{G_j}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\Delta p_j\cdot\log\left(\frac{{}^t\mathfrak{m}_G}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}}\cdot\frac{{}^0\mathfrak{m}_G}{{}^0\mathfrak{m}_{G_j}}\right) \qquad (2\text{–}33)$$

ここで，

$$\begin{cases}\Delta p_j=0 \\ \log\left(\dfrac{{}^t\mathfrak{m}_G}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}}\cdot\dfrac{{}^0\mathfrak{m}_G}{{}^0\mathfrak{m}_{G_j}}\right)=0\end{cases} \qquad (2\text{–}34)$$

のいずれか一方が成立するとき，(2–33)式の値はゼロとなる。すなわち，

$${}^{\Delta MLD}_{Classis}\mathfrak{D}_j=\frac{1}{2}\Delta p_j\cdot\log\left(\frac{{}^t\mathfrak{m}_G}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}}\cdot\frac{{}^0\mathfrak{m}_G}{{}^0\mathfrak{m}_{G_j}}\right)=0$$

である。このとき，(2–33)式により，上式は次式と同値になる。

$$\overbrace{\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{\text{(2–24)式左辺の人口動態効果[(2–31)式]}}$$

$$=\overbrace{\overline{\overline{MLD}}\cdot\Delta p_j}^{\text{(2–26)式左辺の人口動態効果[(2–32)式]}} \qquad (2\text{–}35)$$

対数関数の性質により，(2–34)式は以下のように書き直すことができる。

$$\begin{cases}\Delta p_j=0 & (2\text{–}36)\\ \dfrac{{}^t\mathfrak{m}_G}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}}\cdot\dfrac{{}^0\mathfrak{m}_G}{{}^0\mathfrak{m}_{G_j}}=1 & (2\text{–}37)\end{cases}$$

この(2–36)式と(2–37)式のいずれか一方が成立するとき，(2–35)式が成立し，２つの要因分解式があたえる人口動態効果（年齢階級別）の値は一致する。以下では，この２つの条件を順に取り上げる。

最初に，(2–35)式が成立するための一方の条件，すなわち(2–36)式を取り上げる。これは，２時点間における年齢階級別世帯シェアに変化がない場合（${}^tp_j-{}^0p_j=0$）である。このとき，(2–31)式の値と(2–32)式の値がともに相等しくゼロとなり，(2–35)式が成立する。このことは，(2–31)式と(2–32)式のいずれもが，年齢階級別世帯シェア（p_j）に変化がない場合には，人口動態効果としてゼロの値を返すことを意味している。逆に言えば，人口動態効果は，$\Delta p_j\neq0$ となる Δp_j の影響を計測している。ここに，人口動態効果の本質的特徴がある。

次に，(2–35)式が成立するための他方の条件，すなわち(2–37)式を取り上げる。これは，２時点における全年齢階級の所得分布の相乗平均（$\mathfrak{m}_G$）と第 j 年齢階級の所得分布の相乗平均（$\mathfrak{m}_{G_j}$）の比率が逆数の関係になっている場合である[(8)]。以上，(2–35)式の成立条件（(2–36)式と(2–37)式）について述べた。

以下では，逆に(2–35)式が成立しない場合，すなわち，(2–36)式または(2–37)式が成立しない場合を取り上げる。この場合を別の仕方で表現すれば，次のようになる。

$$\left(\begin{gathered}\Delta p_j\neq0,\\ 0<\frac{{}^t\mathfrak{m}_G}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}}\cdot\frac{{}^0\mathfrak{m}_G}{{}^0\mathfrak{m}_{G_j}}<1\end{gathered}\right)\ \vee\ \left(\begin{gathered}\Delta p_j\neq0,\\ \frac{{}^t\mathfrak{m}_G}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}}\cdot\frac{{}^0\mathfrak{m}_G}{{}^0\mathfrak{m}_{G_j}}>1\end{gathered}\right)$$

のとき，(2–33)式の値

$$\frac{1}{2}\Delta p_j\cdot\log\left(\frac{{}^t\mathfrak{m}_G}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}}\cdot\frac{{}^0\mathfrak{m}_G}{{}^0\mathfrak{m}_{G_j}}\right)$$

は非ゼロとなり，(2–35)式は成立しない。すなわち，

---

(8)　このような逆数関係が維持されるとき，２つの比率$\left(\dfrac{{}^t\mathfrak{m}_G}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}}\text{ と }\dfrac{{}^0\mathfrak{m}_G}{{}^0\mathfrak{m}_{G_j}}\right)$の値には，次の３とおりがある。

$$\begin{cases}0<\dfrac{{}^t\mathfrak{m}_G}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}}<1,\ \dfrac{{}^0\mathfrak{m}_G}{{}^0\mathfrak{m}_{G_j}}>1\\ \dfrac{{}^t\mathfrak{m}_G}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}}=1,\ \dfrac{{}^0\mathfrak{m}_G}{{}^0\mathfrak{m}_{G_j}}=1\\ \dfrac{{}^t\mathfrak{m}_G}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}}>1,\ 0<\dfrac{{}^0\mathfrak{m}_G}{{}^0\mathfrak{m}_{G_j}}<1\end{cases}$$

$$
{}^{\Delta MLD}_{Classis}\mathfrak{D}_j=\frac{1}{2}\Delta p_j\cdot\log\left(\frac{{}^t\mathfrak{m}_G}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}}\cdot\frac{{}^0\mathfrak{m}_G}{{}^0\mathfrak{m}_{G_j}}\right)\neq 0
$$

となり，

$$
\overbrace{\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{\text{(2-24)式左辺の人口動態効果[(2-31)式]}}
\neq \overbrace{\overline{\overline{MLD}}\cdot\Delta p_j}^{\text{(2-26)式左辺の人口動態効果[(2-32)式]}} \qquad (2\text{-}38)
$$

である。

以上，本項①全年齢階級 と②年齢階級別においては，２種類の要因分解式があたえる人口動態効果の値は，全年齢階級と第 j 年齢階級のいずれについても，同一の値になるとは限らないことを述べた。

③　人口動態効果の比較

ムッカジーとショロックス以来の伝統的な要因分解式および別解として誘導された要因分解式は，いずれもその誘導にかんしては優劣を付けがたい。この問題は，所得分布の統計解析に資するべく誘導された要因分解式の数学的整合性と実質的意味に照らして判断されるべきであろう。

数理形式に着目して，要因分解式を比較するために，２種類の分解式を再掲する。

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\overbrace{\Delta MLD}^{MLD\text{の2時点間変化(全年齢階級)}}\\
&=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}}\\
&\quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\left(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j\right)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}}\\
&\quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}} \qquad (2\text{-}1)[\text{再掲}]\\
&\overbrace{{}^{\Delta MLD}C_j}^{\Delta MLD\text{にたいする寄与分(第}j\text{年齢階級)}}\\
&=\overbrace{\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動(第}j\text{年齢階級)}}\\
&\quad+\overbrace{\bar{p}_j\left(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j\right)}^{\text{級間変動(第}j\text{年齢階級)}}\\
&\quad+\overbrace{\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(第}j\text{年齢階級)}} \qquad (2\text{-}2)[\text{再掲}]
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\overbrace{\Delta MLD}^{MLD\text{の2時点間変化(全年齢階級)}}\\
&=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}}\\
&\quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\left(\Delta MLD-\Delta MLD_j\right)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}}\\
&\quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{\overline{MLD}}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}} \qquad (2\text{-}3)[\text{再掲}]\\
&\overbrace{{}^{\Delta MLD}C_j}^{\Delta MLD\text{にたいする寄与分(第}j\text{年齢階級)}}\\
&=\overbrace{\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動(第}j\text{年齢階級)}}\\
&\quad+\overbrace{\bar{p}_j\left(\Delta MLD-\Delta MLD_j\right)}^{\text{級間変動(第}j\text{年齢階級)}}\\
&\quad+\overbrace{\overline{\overline{MLD}}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(第}j\text{年齢階級)}} \qquad (2\text{-}4)[\text{再掲}]
\end{aligned}
\right.
$$

予備的考察として，級内変動と級間変動について，その形式と内容を対比する。(2-1)式と(2-2)式においては，級内変動の計測のために年齢階級別平均対数偏差の差分(ΔMLD_j)が使われている。他方で，級間変

動は，(2-1)式と(2-2)式では，平均対数偏差ではなくて，全年齢階級の相加平均（対数変換済み）の変化と年齢階級別の相加平均（対数変換済み）の変化の差分$(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)$によって計測されている。全年齢階級と第$j$年齢階級の乖離の程度を反映する級間変動は，相加平均によって計測可能である。このために，級間変動の計測のために平均対数偏差を用いない(2-1)式と(2-2)式は，それとして問題はないのかもしれない。しかし，2時点における平均対数偏差の差分および年齢階級別寄与分の差分（ΔMLD，${}^{\Delta MLD}C_j$）を構成する級間変動の計測において，相加平均の使用が許容されるのは，それ以外には級間変動を計測できない場合に限られる。計測対象の級間変動が，級内変動と同様に平均対数偏差によって計測されるのであれば，級内変動の計測指標との整合性から見て，平均対数偏差を採用するのが望ましい。このことから，(2-1)式および(2-2)式よりも，級間変動の計測に（$\Delta MLD-\Delta MLD_j$）を用いる(2-3)式および(2-4)式の使用が推奨される。

次に，(2-1)式および(2-2)式における級内変動と級間変動，そして(2-3)式および(2-4)式における級内変動と級間変動を総合的に検討する。これらを以下でまとめて見ると，いずれにおいても，年齢階級に固有の（したがって，年齢階級ごとに定数と見なしうる）$\bar{p}_j$（2時点における年齢階級別世帯シェアの相加平均）がウェイトとなっていることが分かる。しかも，そのウェイトは単一である。

$$\begin{cases}\text{(2-1)式と(2-3)式における級内変動}：\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j\\ \text{(2-2)式と(2-4)式における級内変動}：\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{(2-1)式における級間変動}：\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)\\ \text{(2-3)式における級間変動}：\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j(\Delta MLD-\Delta MLD_j)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{(2-2)式における級間変動}：\bar{p}_j(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)\\ \text{(2-4)式における級間変動}：\bar{p}_j(\Delta MLD-\Delta MLD_j)\end{cases}$$

ところが，(2-1)式と(2-2)式における人口動態効果は，

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j & \text{(2-27)〔再掲〕}\\ \left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j & \text{(2-31)〔再掲〕}\end{cases}$$

であり，世帯シェアの変動（Δp_j）のウェイトが

$$\overline{MLD}_j \text{ と } \overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}$$

の2つの和からなっている。一方のウェイト$\left(\overline{MLD}_j\right)$は，年齢階級ごとに時点間で固定された級内変動を反映している。他方のウェイト$\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)$は，年齢階級ごとに時点間で固定された級間変動を反映している。このように，(2-1)式と(2-2)式における人口動態効果（(2-27)式と(2-31)式）においては，世帯シェアの変化（Δp_j）にたいするウェイトが2種類の変動を反映する数値から構成されている。この混在は，(2-1)式と(2-2)式によって人口動態効果が計測されるかどうかという問題を提起する。

これにたいして，(2-3)式と(2-4)式における人口動態効果は，

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}\overline{MLD}\cdot\Delta p_j & \text{(2-28)〔再掲〕}\\ \overline{MLD}\cdot\Delta p_j & \text{(2-32)〔再掲〕}\end{cases}$$

であたえられ，世帯シェアの変化（Δp_j）にたいするウェイトは，単一の$\overline{MLD}$（2時点における2つの平均対数偏差の相加平均）である。このことによって，人口動態効果は，2時点における平均対数偏差を固定して，世帯シェアの変化が果たす影響を計測していることが明確になる。しかも，人口動態効果のウェイトが2時点における平均対数偏差(${}^{t}MLD$と${}^{0}MLD$)の相加平均（$\overline{MLD}$）のみということは，級内変動および級間変動におけるウェイトが単一であることと整合する。(2-28)式と(2-32)式には，

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log \bar{x}}-\overline{\log \bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j & (2\text{-}27)\,[再掲]\\ \left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log \bar{x}}-\overline{\log \bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j & (2\text{-}31)\,[再掲]\end{cases}$$

には見ることができない数理形式上の整合性が担保されている。このために，人口動態効果の計測算式としては，(2-28)式と(2-32)式を推奨したい。

ここで，これまでの考察を要約しておく。人口動態効果として(2-28)式と(2-32)式を内包する要因分解式，すなわち，

$$\begin{cases}\overbrace{\Delta MLD}^{MLD\text{の2時点間変化(全年齢階級)}}\\ =\overbrace{\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}}\\ \quad+\overbrace{\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\,(\Delta MLD-\Delta MLD_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}}\\ \quad+\overbrace{\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\overline{MLD}\cdot\Delta p_j}^{\substack{\text{人口動態効果(全年齢階級)}\\ [(2\text{-}28)\text{式}]}} & (2\text{-}3)\,[再掲]\\ \overbrace{{}^{\Delta MLD}C_j}^{\Delta MLD\text{にたいする寄与分(第}j\text{年齢階級)}}\\ =\overbrace{\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動(第}j\text{階級)}}\\ \quad+\overbrace{\bar{p}_j\,(\Delta MLD-\Delta MLD_j)}^{\text{級間変動(第}j\text{階級)}}\\ \quad+\overbrace{\overline{MLD}\cdot\Delta p_j}^{\substack{\text{人口動態効果(第}j\text{階級)}\\ [(2\text{-}32)\text{式}]}} & (2\text{-}4)\,[再掲]\end{cases}$$

によって測定される3つの要因（級内変動，級間変動，人口動態効果）には，次のような3つの特徴がある。

1）級内変動にあっては，年齢階級別世帯シェアの相加平均（$\bar{p}_j$）のみがウェイト（被乗数）となり，年齢階級別平均対数偏差の変動（ΔMLD_j）が乗数となっている。

2）級間変動にあっては，年齢階級別世帯シェアの相加平均（$\bar{p}_j$）のみがウェイト（被乗数）となり，全年齢階級の平均対数偏差の2時点間変化と年齢階級別平均対数偏差の2時点間変化との乖離($\Delta MLD-\Delta MLD_j$)が乗数となっている。

3）人口動態効果にあっては，2時点における全年齢階級の平均対数偏差の相加平均（$\overline{MLD}$）のみがウェイト（被乗数）となり，年齢階級別世帯シェアの変化（Δp_j）が乗数となっている。

これらの特徴のために，(2-3)式と(2-4)式の要因分解式の方が，

$$\begin{cases}\overbrace{\Delta MLD}^{MLD\text{の2時点間変化(全年齢階級)}}\\ =\overbrace{\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}}\\ \quad+\overbrace{\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\,(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}}\\ \quad+\overbrace{\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log \bar{x}}-\overline{\log \bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}} & (2\text{-}1)\,[再掲]\\ \overbrace{{}^{\Delta MLD}C_j}^{\Delta MLD\text{にたいする寄与分(第}j\text{年齢階級)}}\\ =\overbrace{\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動(第}j\text{年齢階級)}}\\ \quad+\overbrace{\bar{p}_j\,(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)}^{\text{級間変動(第}j\text{年齢階級)}}\\ \quad+\overbrace{\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log \bar{x}}-\overline{\log \bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(第}j\text{年齢階級)}} & (2\text{-}2)\,[再掲]\end{cases}$$

に較べて，内容的にも形式的にも分かりやすい。以上，数理形式に着目して，(2-1)式および(2-2)式と(2-3)式および(2-4)式を比較した。

以下では論点を変え，全年齢階級の人口動態効果にかんする比較をさらに検討する。すでに述べたように，所定の条件が満たされるかどうかによって次の2とおりの可能性がある。

$$\begin{cases} \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{(2\text{-}23)\text{式左辺の人口動態効果}[(2\text{-}27)\text{式}]} \\ =\quad \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{MLD}\cdot\Delta p_j}^{(2\text{-}25)\text{式左辺の人口動態効果}[(2\text{-}28)\text{式}]} \qquad (2\text{-}29)[\text{再掲}] \\ \\ \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{(2\text{-}23)\text{式左辺の人口動態効果}[(2\text{-}27)\text{式}]} \\ \neq\quad \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{MLD}\cdot\Delta p_j}^{(2\text{-}25)\text{式左辺の人口動態効果}[(2\text{-}28)\text{式}]} \qquad (2\text{-}30)[\text{再掲}] \end{cases}$$

ここで，別解があたえる上式右辺の人口動態効果は，

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m}\overline{MLD}\cdot\Delta p_j && (2\text{-}28)[\text{再掲}] \\ &=\overline{MLD}\sum_{j=1}^{m}\Delta p_j \\ &=\overline{MLD}\times 0 \\ &=0 && (2\text{-}39) \end{aligned}$$

となり，全年齢階級の人口動態効果が，つねにゼロになることを想起する[9]。

(2-39)式を(2-29)式と(2-30)式の右辺に代入すれば，

$$\begin{cases} \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{(2\text{-}23)\text{式左辺の人口動態効果}}=0 \qquad (2\text{-}29)' \\ \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{(2\text{-}23)\text{式左辺の人口動態効果}}\neq 0 \qquad (2\text{-}30)' \end{cases}$$

となる。このように，(2-23)式左辺が示す全年齢階級の人口動態効果は，つねにゼロなるとは限らない。

ここで，このことを改めて考察するために，以下で 2 時点間の全年齢階級の世帯シェアの変化を取り上げる。

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m}\Delta p_j \\ &=\sum_{j=1}^{m}({}^tp_j-{}^0p_j) \\ &=\sum_{j=1}^{m}{}^tp_j-\sum_{j=1}^{m}{}^0p_j \\ &=\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^0k_j}{{}^0N} \\ &=\left(\frac{{}^tk_1}{{}^tN}+\cdots+\frac{{}^tk_m}{{}^tN}\right)-\left(\frac{{}^0k_1}{{}^0N}+\cdots+\frac{{}^0k_m}{{}^0N}\right) \\ &=\frac{1}{{}^tN}({}^tk_1+\cdots+{}^tk_m)-\frac{1}{{}^0N}({}^0k_1+\cdots+{}^0k_m) \\ &=\frac{1}{{}^tN}\cdot{}^tN-\frac{1}{{}^0N}\cdot{}^0N \\ &=1-1 \\ &=0 && (2\text{-}40) \end{aligned}$$

(2-40)式は，年齢階級別世帯シェアの変化(Δp_j)が，年齢階級によっては，

${}^tp_j={}^0p_j$，すなわち $\Delta p_j=0$

あるいは

${}^tp_j\neq{}^0p_j$，すなわち $\Delta p_j\neq 0$

となることがあろうとも，全年齢階級については 2 時点を通して世帯シェアには変化がないことを示している。全年齢階級について世

(9)　このことは，木村（2018 b：13 頁）で述べた。

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m}\overline{MLD}\cdot\Delta p_j && (2\text{-}32)[\text{再掲}] \\ &=\overline{MLD}\cdot\sum_{j=1}^{m}\Delta p_j \\ &=\overline{MLD}\cdot\sum_{j=1}^{m}({}^tp_j-{}^0p_j) \\ &=\overline{MLD}\left(\sum_{j=1}^{m}{}^tp_j-\sum_{j=1}^{m}{}^0p_j\right) \\ &=\overline{MLD}\,\{({}^tp_1+{}^tp_2+\cdots+{}^tp_m)-({}^0p_1+{}^0p_2+\cdots+{}^0p_m)\} \\ &=\overline{MLD}\left\{\left(\frac{{}^tk_1}{{}^tN}+\frac{{}^tk_2}{{}^tN}+\cdots+\frac{{}^tk_m}{{}^tN}\right)-\left(\frac{{}^0k_1}{{}^0N}+\frac{{}^0k_2}{{}^0N}+\cdots+\frac{{}^0k_m}{{}^0N}\right)\right\} \\ &=\overline{MLD}\left\{\frac{1}{{}^tN}({}^tk_1+{}^tk_2+\cdots+{}^tk_m)-\frac{1}{{}^0N}({}^0k_1+{}^0k_2+\cdots+{}^0k_m)\right\} \\ &=\overline{MLD}\left(\frac{1}{{}^tN}\cdot{}^tN-\frac{1}{{}^0N}\cdot{}^0N\right) \\ &\qquad\because \\ &\qquad\begin{cases} {}^tN={}^tk_1+{}^tk_2+\cdots+{}^tk_m \\ {}^0N={}^0k_1+{}^0k_2+\cdots+{}^0k_m \end{cases} \\ &=\overline{MLD}\times(1-1) \\ &=0 \end{aligned}$$

帯シェアの変化がない（ゼロである）とすれば，全年齢階級にかんする人口動態効果はゼロになるはずである。このことは，年齢階級別世帯シェアが2時点間で変化がない場合（$\Delta p_j=0$）には，いずれの要因分解式においても当該年齢階級の人口動態効果が

$$\begin{cases}\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log \overline{x}}-\overline{\log \overline{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \overline{MLD}\cdot\Delta p_j=0\end{cases}$$

となることと矛盾しない。

以上のことを勘案すれば，全年齢階級の人口動態効果の計測指標としては，つねにゼロをあたえるとは限らない

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log \overline{x}}-\overline{\log \overline{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j \qquad (2\text{-}27)\text{〔再掲〕}$$

よりも，その値がつねにゼロとなる

$$\sum_{j=1}^{m}\overline{MLD}\cdot\Delta p_j \qquad (2\text{-}28)\text{〔再掲〕}$$

のほうが，人口動態効果の実体をよりよく反映している。なお，現実には ${}^{t}MLD\neq0$，${}^{0}MLD\neq0$ であり，$\overline{MLD}\neq0$ である。このために，ここでは $\overline{MLD}=0$ は考慮する必要がない。

以上の比較検討により，平均対数偏差の差の要因分解式としては，次式の使用が推奨される。

$$\begin{cases}\overbrace{\Delta MLD}^{MLD\text{の2時点間変化(全年齢階級)}} \\ =\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}} \\ \quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j\left(\Delta MLD-\Delta MLD_j\right)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} \\ \quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{MLD}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}} \qquad (2\text{-}3)\text{〔再掲〕} \\ \\ \overbrace{{}^{\Delta MLD}C_j}^{\Delta MLD\text{にたいする寄与分(第}j\text{年齢階級)}} \\ =\overbrace{\overline{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動(第}j\text{年齢階級)}} \\ \quad+\overbrace{\overline{p}_j\left(\Delta MLD-\Delta MLD_j\right)}^{\text{級間変動(第}j\text{年齢階級)}} \\ \quad+\overbrace{\overline{MLD}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(第}j\text{年齢階級)}} \qquad (2\text{-}4)\text{〔再掲〕}\end{cases}$$

3．計　算　例

本節では，同一の仮設的数値例を，ムッカジーとショロックスの方式による要因分解式（(2-1)式および(2-2)式）とその別解として誘導した要因分解式（(2-3)式および(2-4)式）に適用する。その数値例では，いずれの時点においても，世帯所得（単位は100万円）が3つの年齢階級にグループ分けされているが，項の総数と階級別の項の個数は時点ごとに異なっている。なお，所得額の変換には，常用対数を用いた。

以下では，ムッカジーとショロックスの方式による要因分解式の組を第1式と総称し，別解として誘導した要因分解式の組を第2式と総称する。なお，平均対数偏差の計算には，

$$\begin{cases}MLD=\log \mathfrak{m}_A-\log \mathfrak{m}_G & (1\text{-}11)\text{〔再掲〕} \\ MLD_j=\log \mathfrak{m}_{A_j}-\log \mathfrak{m}_{G_j} & (1\text{-}12)\text{〔再掲〕}\end{cases}$$

$$\begin{cases}{}^{t}MLD=\log {}^{t}\mathfrak{m}_A-\log {}^{t}\mathfrak{m}_G & (1\text{-}11)'\text{〔再掲〕} \\ {}^{0}MLD=\log {}^{0}\mathfrak{m}_A-\log {}^{0}\mathfrak{m}_G & (1\text{-}12)'\text{〔再掲〕}\end{cases}$$

$$\begin{cases} {}^tMLD_j = \log {}^t\mathfrak{m}_{A_j} - \log {}^t\mathfrak{m}_{G_j} & (1\text{-}11)''\text{[再掲]} \\ {}^0MLD_j = \log {}^0\mathfrak{m}_{A_j} - \log {}^0\mathfrak{m}_{G_j} & (1\text{-}12)''\text{[再掲]} \end{cases}$$

ではなく，上式を対数の差と商の公式によって変換した

$$\begin{cases} MLD = \log\dfrac{\mathfrak{m}_A}{\mathfrak{m}_G},\ MLD_j = \log\dfrac{\mathfrak{m}_{A_j}}{\mathfrak{m}_{G_j}} \\ {}^tMLD = \log\dfrac{{}^t\mathfrak{m}_A}{{}^t\mathfrak{m}_G},\ {}^0MLD = \log\dfrac{{}^0\mathfrak{m}_A}{{}^0\mathfrak{m}_G} \\ {}^tMLD_j = \log\dfrac{{}^t\mathfrak{m}_{A_j}}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}},\ {}^0MLD_j = \log\dfrac{{}^0\mathfrak{m}_{A_j}}{{}^0\mathfrak{m}_{G_j}} \end{cases}$$

を用いる。

⑴　単一時点

基準時点にかんする表 1 (a) と比較時点にかんする表 1 (b) により，第 1 式（ムッカジーとショロックスの方式による要因分解式）と第 2 式（別解による要因分解式）については，次のことが確認できる。

1 ）全年齢階級にかんする級内変動と級間変動の 2 要因の総和と 2 要因に分解する前の平均対数偏差の値（MLD）は一致する（表 1 (a) (b) における強調部分参照)。

2 ）全年齢階級にかんする級内変動は一致する。

3 ）全年齢階級にかんする級間変動は一致する。

4 ）年齢階級別の級内変動は一致する。

5 ）年齢階級別の級間変動は一致しない。

以上の 5 項は， 2 種類の要因分解式にかんして，前項で比較検討した結果と一致する。

⑵　 2 時点間

表 2 には，基準時点の値から比較時点の値を減じて得た差分の要因分解にかんする計算結果を表章した。表 2 からは，第 1 式（ムッカジーとショロックスの方式による要因分解式）と第 2 式（別解による要因分解式）については，以下のことが確認できる。

1 ）全年齢階級にかんする級内変動，級間

表 1 (a)　基準時点の数値例

			世帯所得（原系列の単位：百万円）							
			世帯番号	全世帯	世帯番号	第 1 年齢階級	世帯番号	第 2 年齢階級	世帯番号	第 3 年齢階級
			1	2	4	1	1	2	2	8
			2	8	8	3	3	7	6	3
			3	7	10	2	5	7		
			4	1			7	9		
			5	7			9	5		
			6	3						
			7	9						
			8	3						
			9	5						
			10	2						
	世帯シェア（${}^0p_j$）	①	[1.0000]		0.3000		0.5000		0.2000	
	相加平均（${}^0\bar{x}, {}^0\bar{x}_j$）		4.7000		2.0000		6.0000		5.5000	
	相加平均の対数（$\log {}^0\bar{x}, \log {}^0\bar{x}_j$）		0.6721		0.3010		0.7782		0.7404	
	相乗平均（${}^0\mathfrak{m}_G, {}^0\mathfrak{m}_{G_j}$）		3.8043		1.8171		5.3566		4.8990	
	平均対数偏差（${}^0MLD, {}^0MLD_j$）	②	*0.0918*		0.0416		0.0493		0.0503	
	$\log {}^0\bar{x} - \log {}^0\bar{x}_j$	③			0.3711		−0.1061		−0.0683	
	${}^0MLD - {}^0MLD_j$	④			0.0502		0.0426		0.0416	
第 1 式	級内変動	①×②*	0.0472		0.0125		0.0246		0.0101	
	級間変動	①×③*	0.0446		0.1113		−0.0530		−0.0137	
	合　　計		*0.0918*		0.1238		−0.0284		−0.0036	
第 2 式	級内変動	①×②*	0.0472		0.0125		0.0246		0.0101	
	級間変動	①×④*	0.0446		0.0151		0.0213		0.0083	
	合　　計		*0.0918*		0.0275		0.0459		0.0184	

*年齢階級別の計算式（全世帯（全年齢階級）の数値は，年齢階級別の数値の合計）

表 1 (b)　比較時点の数値例

			世帯所得（原系列の単位：百万円）							
			世帯番号	全世帯	世帯番号	第1年齢階級	世帯番号	第2年齢階級	世帯番号	第3年齢階級
			1	2	3	1	2	3	1	2
			2	3	8	3	4	7	5	6
			3	1			6	8	12	5
			4	7			7	1		
			5	6			9	6		
			6	8			10	8		
			7	1			11	6		
			8	3						
			9	6						
			10	8						
			11	6						
			12	5						
	世帯シェア（$^t p_j$）	①	[1.0000]		0.1667		0.5833		0.2500	
	相加平均（$^t\bar{x}, {}^t\bar{x}_j$）		4.6667		2.0000		5.5714		4.3333	
	相加平均の対数（$\log {}^t\bar{x}, \log {}^t\bar{x}_j$）		0.6690		0.3010		0.7460		0.6368	
	相乗平均（$^t\mathfrak{m}_G, {}^t\mathfrak{m}_{G_j}$）		3.7873		1.7321		4.6692		3.9149	
	平均対数偏差（$^tMLD, {}^tMLD_j$）	②	***0.0907***		0.0625		0.0767		0.0441	
	$\log {}^t\bar{x} - \log {}^t\bar{x}_j$	③			0.3680		−0.0770		0.0322	
	$^tMLD - {}^tMLD_j$	④			0.0282		0.0140		0.0466	
第１式	級内変動	①×②*	0.0662		0.0104		0.0448		0.0110	
	級間変動	①×③*	0.0245		0.0613		−0.0449		0.0080	
	合　　計		***0.0907***		0.0717		−0.0001		0.0191	
第２式	級内変動	①×②*	0.0662		0.0104		0.0448		0.0110	
	級間変動	①×④*	0.0245		0.0047		0.0081		0.0116	
	合　　計		***0.0907***		0.0151		0.0529		0.0227	

＊年齢階級別の計算式（全世帯（全年齢階級）の数値は，年齢階級別の数値の合計）

表２　２時点間の差の要因分解にかんする計算表

			全世帯	第１年齢階級	第２年齢階級	第３年齢階級
	$\bar{p}_j\left(=\frac{1}{2}({}^tp_j+{}^0p_j)\right)$	①	[1.0000]	0.2333	0.5417	0.2250
	$\Delta MLD_j\,(={}^tMLD_j-{}^0MLD_j)$	②		0.0208	0.0275	−0.0062
	$\Delta\log\bar{x}\,(=\log{}^t\bar{x}-\log{}^0\bar{x})$		−0.0031			
	$\Delta\log\bar{x}_j\,(=\log{}^t\bar{x}_j-\log{}^0\bar{x}_j)$			0.0000	−0.0322	−0.1035
	$\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j$	③		−0.0031	0.0291	0.1004
	$\overline{MLD}_j\left(=\frac{1}{2}({}^tMLD_j+{}^0MLD_j)\right)$	④		0.0521	0.0630	0.0472
	$\overline{\log\bar{x}}\left(=\frac{1}{2}(\log{}^t\bar{x}+\log{}^0\bar{x})\right)$		0.6706			
	$\overline{\log\bar{x}_j}\left(=\frac{1}{2}(\log{}^t\bar{x}_j+\log{}^0\bar{x}_j)\right)$			0.3010	0.7621	0.6886
	$\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}$	⑤		0.3695	−0.0915	−0.0180
	$\Delta MLD\,(={}^tMLD-{}^0MLD)$	⑥	***−0.0011***			
	$\overline{MLD}\left(=\frac{1}{2}({}^tMLD+{}^0MLD)\right)$	⑦	0.0912			
	$\Delta p_j\,(={}^tp_j-{}^0p_j)$	⑧		−0.1333	0.0833	0.0500
第１式	級　内　変　動	①×②*	0.0183	0.0049	0.0149	−0.0014
	級　間　変　動	①×③*	0.0376	−0.0007	0.0158	0.0226
	人口動態効果	(④＋⑤)×⑧*	−0.0571	−0.0562	−0.0024	0.0015
	合　　　計		***−0.0011***	−0.0521	0.0283	0.0227
第２式	級　内　変　動	①×②*	0.0183	0.0049	0.0149	−0.0014
	級　間　変　動	①×(⑥−②)*	−0.0195	−0.0051	−0.0155	0.0011
	人口動態効果	⑦×⑧*	0.0000	−0.0122	0.0076	0.0046
	合　　　計		***−0.0011***	−0.0124	0.0070	0.0043

＊年齢階級別の計算式（全世帯（全年齢階級）の数値は，年齢階級別の数値の合計）。なお，$\bar{p}_j$ と Δp_j 以外は，原系列の対数変換値にもとづく。

変動，人口動態効果の 3 要因の総和と 3 要因に分解する前の平均対数偏差の変化（ΔMLD）は，いずれも −0.0011 となって，一致する（表 2 における強調部分参照)。

2）全年齢階級にかんする級内変動は一致する。

3）全年齢階級にかんする級間変動は一致しない。

4）全年齢階級にかんする人口動態効果は一致しない（第 1 式では −0.0571，第 2 式ではゼロ)。

5）年齢階級別級内変動は一致する。

6）年齢階級別級間変動は一致しない。

7）年齢階級別人口動態効果は一致しない。表 2 において強調した Δp_j の数値および第 1 式と第 2 式による人口動態効果の数値に着目する。それによれば，世帯シェアが減少した年齢階級（Δp_j が負の階級）は第 1 年齢階級だけであり（$\Delta p_1 = -0.1333$)，その他の 2 階級では $\Delta p_j > 0$ である（$\Delta p_2 = 0.0833$，$\Delta p_3 = 0.0500$)。第 1 式では，第 2 年齢階級の Δp_j が正であるにもかかわらず，当該年齢階級の人口動態効果は負となり（−0.0024)，拡差を縮小させる方向に作用している。$\Delta p_j > 0$ となる年齢階級は，拡差を拡大させるはずであるにもかかわらず，第 1 式ではそうならない年齢階級がある。これにたいして，第 2 式では，年齢階級別の世帯シェアと人口動態効果の符号が一致し，両者の変動間に矛盾するところがない。

以上の 7 項は，2 種類の要因分解式にかんして，前項で比較検討した結果と一致する。

む す び

平均対数偏差の要因分解式は，少なくとも 2 とおりある。このために，2 時点間における平均対数偏差の差にかんする要因分解式も 2 とおりある。

本稿では，数理形式上の整合性と所得分析指標の実質的意味を検討して，平均対数偏差の要因分解式としては，次式の使用が望ましいことを述べた。

$$
\begin{cases}
\overbrace{MLD}^{\text{平均対数偏差（全年齢階級）}} = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot MLD_j}^{\text{級内変動（全年齢階級）}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j (MLD - MLD_j)}^{\text{級間変動（全年齢階級）}} & \text{(1-3)［再掲］} \\
\overbrace{{}^{MLD}C_j}^{MLD\text{にたいする寄与分（第}j\text{年齢階級）}} = \overbrace{p_j \cdot MLD_j}^{\text{級内変動（第}j\text{階級）}} + \overbrace{p_j (MLD - MLD_j)}^{\text{級間変動（第}j\text{階級）}} & \text{(1-4)［再掲］}
\end{cases}
$$

また，平均対数偏差の差の要因分解式としては，次式の使用が望ましいことを述べた。

$$
\begin{cases}
\overbrace{\Delta MLD}^{MLD\text{の 2 時点間変化（全年齢階級）}} \\
= \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \bar{p}_j \cdot \Delta MLD_j}^{\text{級内変動（全年齢階級）}} \\
\quad + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \bar{p}_j (\Delta MLD - \Delta MLD_j)}^{\text{級間変動（全年齢階級）}} \\
\quad + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \overline{MLD} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果（全年齢階級）}} & \text{(2-3)［再掲］} \\
\overbrace{{}^{\Delta MLD}C_j}^{\Delta MLD\text{にたいする寄与分（第}j\text{年齢階級）}} \\
= \overbrace{\bar{p}_j \cdot \Delta MLD_j}^{\text{級内変動（第}j\text{年齢階級）}} \\
\quad + \overbrace{\bar{p}_j (\Delta MLD - \Delta MLD_j)}^{\text{級間変動（第}j\text{年齢階級）}} \\
\quad + \overbrace{\overline{MLD} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果（第}j\text{年齢階級）}} & \text{(2-4)［再掲］}
\end{cases}
$$

所得分布の統計解析に平均対数偏差を用いるとき，どの要因分解式を使用するかによって，計算結果が異なる。簡単な計算例はそのことを具体的に示す。採用した分解式によって，計算結果が異なれば，当然ながら，それにもとづく社会科学的な分析が異なる。この

ことは，人口動態効果とは何か，それによって計測される格差の拡大は「見かけ上」なのか，あるいは格差は実質的に拡大・縮小するのかという問題を，改めて提起する。それとともに，格差を計測するとされる平均対数偏差の有効性にかんする検討をも提起する。これらのイシューの考察は今後の課題とする。

なお，「見かけ上」の格差拡大の検出には，対数分散が使用されることもある。対数分散はディートンとパックソン(10)が「永久所得仮説（permanent income hypothesis：PIH）」を実証するために採用した統計量である。ここに，PIH とは，どのコーホートにかんしても消費と所得の不平等が加齢とともに拡大するという仮説である。大竹文雄と齋藤誠が，ディートン他に示唆を受けて，所得格差の研究に対数分散を用いたことは，つとに明らかである(11)。

本稿は，考察の対象を平均対数偏差に限定したために，対数分散についての検討は今後の課題として残された。

（2018 年 10 月 1 日提出）

（10）　Deaton, Angus and Paxson, Christina, “Intertemporal Choice and Inequality,” *Journal of Political Economy*, Vol.102, No.3, 1994, p.437。Deaton and Paxson（1994: p.438）によれば，この仮説は，コーホート内消費分散の経時的な増大に着目したイーデンによって提唱された（Eden, Benjamin, “Stochastic Dominance in Human Capital,” *Journal of Political Economy*, Vol.88, No.1, 1980）。

（11）　Ohtake, Fumio and Saito, Makoto, “Population Aging and Consumption Inequality in Japan,” *Review of Income and Wealth*, Ser.44, No.3, 1998, p.362. なお，以下も参照：①大竹文雄・齋藤誠「所得不平等化の背景とその政策的含意：年齢階層内効果，年齢階層間効果，人口高齢化効果」『季刊　社会保障研究』第 35 巻第 1 号，1999 年；②大竹文雄『日本の不平等　格差社会の幻想と未来』日本経済新聞社，2005 年；③大竹文雄・小原美紀「所得格差」内閣府経済社会総合研究所企画・監修，樋口美雄編集『労働市場と所得分配』慶應義塾大学出版会，2010 年，第 8 章など。