タイトル	所得分布の要因分解にかんする一般式とその応用
著者	木村，和範；KIMURA，Kazunori
引用	北海学園大学学園論集(178)：1-30
発行日	2019-03-25

所得分布の要因分解にかんする一般式とその応用

木　　村　　和　　範*

〈要旨〉

所得分布の統計解析に使用される統計量から８つ（平均対数偏差，相加平均，標準偏差，分散，対数分散，変動係数，ジニ係数，平均差）を選び，その要因分解にかんする一般式を誘導し，それぞれの統計量の要因分解式が，この一般式の系であることを明らかにした。

これらの要因分解式を簡単な仮設的な数値例に適用し，多指標的な統計解析の可能性を示唆した。

〈Abstract〉

The author develops the generalized formulae for the decomposition of such statistics as mean logarithmic deviation, arithmetic mean, standard deviation, variance, logarithmic variance, coefficient of variation, Gini's coefficient and mean difference.

He applies the formulae to a set of hypothetical data in order to decompose the statistics above-mentioned, suggesting the possibility of statistical analysis of income distribution aided by multi-indices.

〈叙述の順序〉

はじめに

＊本学名誉教授，本学経済学部客員教授

［献辞］

2019年3月31日をもって停年退職なさる野嵜久和経済学部教授（大学院経済学研究科兼担教授）は，2003年4月に，「国際事情」を主要担当科目として本学に赴任された。赴任に先だって，経済学部長として面談し，民間企業における研究部門で研鑽を積んだ先生の学識の幅広さと深さを改めて知り，またそのお人柄にも触れ，数多くの応募者のなかから先生を選考した教授会の見識が正鵠を射ていることに誇らしさを覚えたことを思い出す。

赴任後，先生は，短くない海外での実務経験を授業に生かして，学士課程，修士課程，博士（後期）課程における教育に意を用いられた。アメリカの中東政策，国際金融，貿易などの分野で先端を切るべく研究に専念なさり，教育と研究の両面に亘って経済学部／経済学研究科はもとより本学の期待に応えられた。トランプ政権下で再燃しつつある貿易問題を考えるとき，先生の研究業績は多くを示唆するであろう。

2005年，先生は，交流協定校であるレスブリッジ大学（カナダ）に交換教授として冬学期の講義のために赴かれた。受講生の評判もすこぶる良好で，講義を通じて彼我の友好関係のさらなる基盤強化に尽力された。加えて，教授会ならびに各種委員会におけるさわやかなご発言と誠実な校務遂行により，前身である北海短期大学の創立から数えて，2020年には創基70年を迎える本学の進化発展に多大の貢献を果たされた。

先生のご退職にあたり，今後のご壮健とご多幸を祈念するとともに，これまでのご厚誼に深甚の感謝の意を添えて，本稿を捧げる。

はじめに

平均対数偏差，相加平均，標準偏差，分散，対数分散の５つの統計量について，単一時点におけるそれぞれの要因分解式，ならびに２時点における統計量の差の要因分解式が誘導された[(1)]。本稿では，それらの５つの統計量に加え，新たに要因分解式が誘導された変動係数，ジニ係数，平均差の３つの統計量[(2)]にも共通する要因分解にかんする一般式を提示する。その後，上述した全部で８つの統計量について，同一の仮設的な数値による計算例を示す。

１．一般式とその系

(1) 一般式

以下で使用する文字の意味は次のとおりである。

N：全年齢階級の世帯総数

0：基準時点（文字の左上に記入し，たとえば，${}^0N$ は基準時点における全年齢階級の世帯総数を示す）

t：比較時点（文字の左上に記入し，たとえば，${}^tN$ は比較時点における全年齢階級の世帯総数を示す）

m：世帯総数を年齢階級別にグループ分けしたときの，階級総数

k_j：第 j 年齢階級の世帯数

$$\left(N=k_1+\cdots+k_j+\cdots+k_m=\sum_{j=1}^{m}k_j\right)$$

$p_j\left(=\dfrac{k_j}{N}\right)$：第 j 年齢階級の世帯シェア

$$\left(\sum_{j=1}^{m}p_j=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m}k_j=1\right)$$

$\overline{p}_j\left(=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{{}^tk_j}{{}^tN}+\dfrac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\right)$：２時点の世帯シェア（第 j 年齢階級）にかんする相加平均

$$\left(\overline{p}_j=\frac{1}{2}({}^tp_j+{}^0p_j)\right)$$

$\Delta p_j\left(={}^tp_j-{}^0p_j\right)$：２時点における世帯シェア（第 j 年齢階級）の差

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\Delta p_j=\sum_{j=1}^{m}{}^tp_j-\sum_{j=1}^{m}{}^0p_j=1-1=0\right)$$

x_i：第 i 番目の世帯所得 $(i=1,2,\cdots,N)$

$Stat$：統計量（全年齢階級）（本稿で取扱う統計量は，所得分布の平均対数偏差，相加平均，標準偏差，分散，対数分散，変動係数，ジニ係数，平均差の８つである）

${}^0Stat$：基準時点における統計量（全年齢階級）

${}^tStat$：比較時点における統計量（全年齢階級）

$\overline{Stat}\left(=\dfrac{1}{2}({}^tStat+{}^0Stat)\right)$：２時点における統計量の相加平均（全年齢階級）

$\Delta Stat\left(={}^tStat-{}^0Stat\right)$：２時点における統計量の差（全年齢階級）

$Stat_j$：第 j 年齢階級の統計量（$Stat$（全年齢階級）と同様に，所得分布の平

(1) ①木村和範「所得格差の変動にたいする人口動態効果の計測」『経済論集』（北海学園大学経済学部）第 66 巻第 1 号，2018 年 6 月［木村（2018a）］；②同「人口構成の変化と所得分布」同第 66 巻第 2 号，2018 年 9 月［木村（2018b）］

(2) これらの３つの統計量の要因分解については，木村和範「変動係数，ジニ係数，平均差の要因分解」『経済論集』（同上）第 66 巻　第 3 号，2018 年 12 月［木村（2018c）］

均対数偏差，相加平均，標準偏差，分散，対数分散，変動係数，ジニ係数，平均差の８つである）

$^0Stat_j$：基準時点における第 j 年齢階級の統計量

$^tStat_j$：比較時点における第 j 年齢階級の統計量

$\overline{Stat}_j\left(=\frac{1}{2}({}^tStat_j+{}^0Stat_j)\right)$：２時点における統計量の相加平均（第 j 年齢階級）

$\Delta Stat_j\,(={}^tStat_j-{}^0Stat_j)$：２時点における統計量の差（第 j 年齢階級）

$^{Stat}C_j$　：$Stat$（全年齢階級）にたいする第 j 年齢階級の寄与分

$^{\Delta Stat}C_j$：$\Delta Stat$（全年齢階級）にたいする第 j 年齢階級の寄与分

① 単一時点における統計量の要因分解

全年齢階級にかんする統計量の要因分解式は，以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&Stat\\
&=Stat\times\frac{1}{N}\times N\\
&=Stat\times\frac{1}{N}\times\sum_{j=1}^{m}k_j\\
&=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}\times Stat}^{\text{全年齢階級}}\\
&=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot Stat}^{\text{全年齢階級}}\\
&=\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot Stat+\overbrace{\left(\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot Stat_j-\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot Stat_j\right)}^{\text{ゼロを加算}}\\
&=\overbrace{\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot Stat_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{\left(\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot Stat-\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot Stat_j\right)}^{\text{級間変動}}}^{\text{全年齢階級}}\\
&=\overbrace{\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot Stat_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j\,(Stat-Stat_j)}^{\text{級間変動}}}^{\text{全年齢階級}}\qquad(1\text{-}1)
\end{aligned}
$$

(1-1)式が示すように全年齢階級にかんする統計量の要因分解式は，年齢階級別の寄与分の総和であるから，第 j 年齢階級の寄与分 ($^{Stat}C_j$) は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
{}^{Stat}C_j&=\overbrace{p_j\cdot Stat}^{\text{第 }j\text{ 年齢階級}}\\
&=\overbrace{\overbrace{p_j\cdot Stat_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{p_j\,(Stat-Stat_j)}^{\text{級間変動}}}^{\text{第 }j\text{ 年齢階級}}\qquad(1\text{-}2)
\end{aligned}
$$

② ２時点における統計量の差の要因分解

(1-1)式により，比較時点(t)と基準時点(0)における全年齢階級にかんする統計量は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
{}^tStat&=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^tp_j\cdot{}^tStat}^{\text{全年齢階級(比較時点)}}\\
&=\overbrace{\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^tp_j\cdot Stat_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^tp_j\,({}^tStat-{}^tStat_j)}^{\text{級間変動}}}^{\text{全年齢階級(比較時点)}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^0Stat&=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^0p_j\cdot{}^0Stat}^{\text{全年齢階級(基準時点)}}\\
&=\overbrace{\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^0p_j\cdot{}^0Stat_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^0p_j\,({}^0Stat-{}^0Stat_j)}^{\text{級間変動}}}^{\text{全年齢階級(基準時点)}}
\end{aligned}
$$

したがって，２時点における統計量（全年齢階級）の差（$\Delta Stat$）は，以下のとおりである。

$$
\begin{aligned}
&\Delta Stat\\
&=\overbrace{{}^tStat}^{\text{比較時点(全年齢階級)}}-\overbrace{{}^0Stat}^{\text{基準時点(全年齢階級)}}
\end{aligned}
$$

$$= \overbrace{\sum_{j=1}^{m} {}^{t}p_j \cdot {}^{t}Stat}^{\text{比較時点(全年齢階級)}} - \overbrace{\sum_{j=1}^{m} {}^{0}p_j \cdot {}^{0}Stat}^{\text{基準時点(全年齢階級)}}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} ({}^{t}p_j \cdot {}^{t}Stat - {}^{0}p_j \cdot {}^{0}Stat)$$

$$= \overbrace{\left\{ \overbrace{\sum_{j=1}^{m} {}^{t}p_j \cdot {}^{t}Stat_j}^{\text{級内変動}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} {}^{t}p_j \, ({}^{t}Stat - {}^{t}Stat_j)}^{\text{級間変動}} \right\}}^{\text{比較時点(全年齢階級)[(1-1)式による]}}$$

$$- \overbrace{\left\{ \overbrace{\sum_{j=1}^{m} {}^{0}p_j \cdot {}^{0}Stat_j}^{\text{級内変動}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} {}^{0}p_j \, ({}^{0}Stat - {}^{0}Stat_j)}^{\text{級間変動}} \right\}}^{\text{基準時点(全年齢階級)[(1-1)式による]}}$$

$$= \overbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} {}^{t}p_j \cdot {}^{t}Stat_j - \sum_{j=1}^{m} {}^{0}p_j \cdot {}^{0}Stat_j \right)}^{\text{級内変動の差(全年齢階級)}}$$

$$+ \overbrace{\left\{ \sum_{j=1}^{m} {}^{t}p_j \, ({}^{t}Stat - {}^{t}Stat_j) - \sum_{j=1}^{m} {}^{0}p_j \, ({}^{0}Stat - {}^{0}Stat_j) \right\}}^{\text{級間変動の差(全年齢階級)}} \tag{1-3}$$

全年齢階級にかんする統計量の差の要因分解式（(1-3)式）から，第 j 年齢階級の寄与分 $({}^{\Delta Stat}C_j)$ を抽出すると，次式を得る。

$${}^{\Delta Stat}C_j$$

$$= {}^{t}p_j \cdot {}^{t}Stat - {}^{0}p_j \cdot {}^{0}Stat \tag{1-4}$$

$$= \overbrace{({}^{t}p_j \cdot {}^{t}Stat_j - {}^{0}p_j \cdot {}^{0}Stat_j)}^{\text{第 1 項(第 } j \text{ 年齢階級にかんする級内変動の差)}}$$

$$+ \overbrace{\{ {}^{t}p_j \, ({}^{t}Stat - {}^{t}Stat_j) - {}^{0}p_j \, ({}^{0}Stat - {}^{0}Stat_j) \}}^{\text{第 2 項(第 } j \text{ 年齢階級にかんする級間変動の差)}} \tag{1-4$'$}$$

ここで，恒等式

$$a_1b_1 - a_2b_2$$

$$\equiv \frac{1}{2}(a_1 + a_2)(b_1 - b_2) + \frac{1}{2}(a_1 - a_2)(b_1 + b_2) \tag{1-5}$$

を(1-4)′式の第 1 項と第 2 項にそれぞれ適用して整理すると次式を得る[3]。

$${}^{\Delta Stat}C_j$$

$$= \overbrace{\left\{ \frac{1}{2}({}^{t}p_j + {}^{0}p_j)({}^{t}Stat_j - {}^{0}Stat_j) \right\}}^{\text{(1-4)}'\text{式第 1 項(その 1)}}$$

$$+ \overbrace{\left\{ \frac{1}{2}({}^{t}p_j - {}^{0}p_j)({}^{t}Stat_j + {}^{0}Stat_j) \right\}}^{\text{(1-4)}'\text{式第 1 項(その 2)}}$$

$$+ \overbrace{\left[\frac{1}{2}({}^{t}p_j + {}^{0}p_j)\{({}^{t}Stat - {}^{t}Stat_j) - ({}^{0}Stat - {}^{0}Stat_j)\} \right]}^{\text{(1-4)}'\text{式第 2 項(その 1)}}$$

$$+ \overbrace{\left[\frac{1}{2}({}^{t}p_j - {}^{0}p_j)\{({}^{t}Stat - {}^{t}Stat_j) + ({}^{0}Stat - {}^{0}Stat_j)\} \right]}^{\text{(1-4)}'\text{式第 2 項(その 2)}}$$

$$= \frac{1}{2}({}^{t}p_j + {}^{0}p_j)({}^{t}Stat_j - {}^{0}Stat_j)$$

$$+ \frac{1}{2}({}^{t}p_j + {}^{0}p_j)\{({}^{t}Stat - {}^{t}Stat_j) - ({}^{0}Stat - {}^{0}Stat_j)\}$$

$$+ \frac{1}{2}({}^{t}p_j - {}^{0}p_j)[({}^{t}Stat_j + {}^{0}Stat_j) + \{({}^{t}Stat - {}^{t}Stat_j) + ({}^{0}Stat - {}^{0}Stat_j)\}]$$

$$= \frac{1}{2}({}^{t}p_j + {}^{0}p_j)({}^{t}Stat_j - {}^{0}Stat_j)$$

$$+ \frac{1}{2}({}^{t}p_j + {}^{0}p_j)\{({}^{t}Stat - {}^{t}Stat_j) - ({}^{0}Stat - {}^{0}Stat_j)\}$$

$$+ \frac{1}{2}({}^{t}p_j - {}^{0}p_j)({}^{t}Stat + {}^{0}Stat)$$

$$= \frac{1}{2}({}^{t}p_j + {}^{0}p_j)({}^{t}Stat_j - {}^{0}Stat_j)$$

$$+ \frac{1}{2}({}^{t}p_j + {}^{0}p_j)\{({}^{t}Stat - {}^{0}Stat) - ({}^{t}Stat_j - {}^{0}Stat_j)\}$$

$$+ \frac{1}{2}({}^{t}Stat + {}^{0}Stat)({}^{t}p_j - {}^{0}p_j) \tag{1-6}$$

ここで，次のようにおく。

---

(3) 恒等式（(1-5)式）の使用については，「不平等，格差の分析手法　対数標準偏差　シュロックス 分 解」（http: // takamasa. at. webry. info/ 200805/article_1. html, accessed on Jan. 18, 2018）を参照した。

$$\begin{cases} \bar{p}_j = \dfrac{1}{2}({}^t p_j + {}^0 p_j) \\ \Delta p_j = {}^t p_j - {}^0 p_j \\ \Delta Stat = {}^t Stat - {}^0 Stat \\ \Delta Stat_j = {}^t Stat_j - {}^0 Stat_j \\ \overline{Stat} = \dfrac{1}{2}({}^t Stat + {}^0 Stat) \end{cases} \qquad (1\text{-}7)$$

(1-7)式を(1-6)式に代入すると，２時点における統計量（全年齢階級）の差（$\Delta Stat$）にたいする第j年齢階級の寄与分（$^{\Delta Stat}C_j$）として次式を得る。

$$^{\Delta Stat}C_j = {}^t p_j \cdot {}^t Stat - {}^0 p_j \cdot {}^0 Stat \quad (1\text{-}4)\text{［再掲］}$$

$$= \overbrace{\bar{p}_j \cdot \Delta Stat_j}^{\text{級内変動（第}j\text{年齢階級）}}$$

$$+ \overbrace{\bar{p}_j(\Delta Stat - \Delta Stat_j)}^{\text{級間変動（第}j\text{年齢階級）}}$$

$$+ \overbrace{\overline{Stat} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果（第}j\text{年齢階級）}} \qquad (1\text{-}8)$$

２時点における統計量（全年齢階級）の差（$\Delta Stat$）は，年齢階級別寄与分（$^{\Delta Stat}C_j$）の総計であるから，以下のようになる。

$$\Delta Stat = \sum_{j=1}^{m}({}^t p_j \cdot {}^t Stat - {}^0 p_j \cdot {}^0 Stat)$$

$$= \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j \cdot \Delta Stat_j}^{\text{級内変動（全年齢階級）}}$$

$$+ \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j(\Delta Stat - \Delta Stat_j)}^{\text{級間変動（全年齢階級）}}$$

$$+ \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{Stat} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果（全年齢階級）}} \qquad (1\text{-}9)$$

ここで，$\Delta Stat$にかんする要因分解式（(1-9)式）における人口動態効果（全年齢階級）の特殊性を，$^{\Delta Stat}C_j$にかんする要因分解式（(1-8)式）における人口動態効果（第j年齢階級）と対比させて述べる。

(1-9)式右辺第３項（全年齢階級にかんする人口動態効果）については，つねに

$$\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{Stat} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果（全年齢階級）［(1-9)式右辺第３項］}} = 0 \qquad (1\text{-}10)$$

$$\because$$

$$\overline{Stat}\sum_{j=1}^{m}\Delta p_j = \overline{Stat} \times 0$$

が成立する[(4)]。

これにたいして，(1-8)式右辺第３項（年齢階級別人口動態効果）

$$\overbrace{\overline{Stat} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果（第}j\text{年齢階級）［(1-8)式右辺第３項］}} \qquad (1\text{-}11)$$

は，つねにゼロになるとは限らない。

$$\overbrace{\overline{Stat} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果（第}j\text{年齢階級）}} = 0 \qquad (1\text{-}12)$$

が成立するには，次の条件，

$$\overline{Stat} = 0 \quad \vee \quad \Delta p_j = 0$$

が満たされていなければならないからである。

最初に，第１条件（$\overline{Stat}=0$）を取り上げる。

$$\begin{cases} {}^0 Stat \geqq 0 \\ {}^t Stat \geqq 0 \end{cases}$$

である。したがって，

$$\overline{Stat} = \frac{1}{2}({}^t Stat + {}^0 Stat) = 0$$

となるとき，

$${}^t Stat = 0 \quad \wedge \quad {}^0 Stat = 0$$

（4） 木村（2018b：13頁）

が成立している。これは，全年齢階級の所得分布にかんする統計量（*Stat*）が比較時点と基準時点のいずれにおいてもゼロであることを意味する。本節冒頭で述べたように本稿が想定している統計量は，所得分布の平均対数偏差，標準偏差，あるいは相加平均などである。平均対数偏差（または標準偏差）がゼロになるのは，すべての世帯所得が同一となる場合であり，また相加平均がゼロということは，(世帯所得が非負であるから) すべての世帯所得がゼロとなる場合である。これらの例が示すように，数学的には，

$$\overline{Stat}=0$$

の成立条件を考察することは意義深いかもしれないが，実際の所得分布では，2つの時点にかんする統計量の相加平均については

$$\overline{Stat}\neq 0$$

と考えるのが現実的である。

したがって，年齢階級別人口動態効果が

$$\overbrace{\overline{Stat}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(第}j\text{年齢階級)}}=0 \qquad (1\text{-}12)[再掲]$$

となるのは，第2の条件

$$\Delta p_j=0 \qquad (1\text{-}13)$$

が成立するときに限られる。

$$\Delta p_j={}^t p_j-{}^0 p_j$$

であるから，Δp_j の値がゼロであるということは，換言すれば，当該年齢階級について基準時点と比較時点における世帯シェアが等しいこと，すなわち

$${}^t p_j={}^0 p_j$$

であることを意味する。2つの時点で世帯シェアにまったく変化がない年齢階級では，

$$\Delta p_j=0 \qquad (1\text{-}13)[再掲]$$

となり，したがって，

$$\overbrace{\overline{Stat}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(第}j\text{年齢階級)}}=0 \qquad (1\text{-}12)[再掲]$$

が成立する。これにたいして，

$$\Delta p_j\neq 0 \qquad (1\text{-}14)$$

のときは，

$$\overbrace{\overline{Stat}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(第}j\text{年齢階級)}}\neq 0 \qquad (1\text{-}15)$$

となる。以上のことは，

$$\Delta p_j \gtreqless 0$$

であるから，

$$\overline{Stat}_j\cdot\Delta p_j \gtreqless 0$$

であると言ってもよい。

要するに，全年齢階級の人口動態効果については，つねに

$$\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{Stat}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}}=0 \qquad (1\text{-}10)[再掲]$$

が成立する。

これにたいして，年齢階級別の人口動態効果は，基準時点と比較時点における世帯シェアの変化の程度によって様々な値となり，必ずしもゼロになるとは限らない。すなわち，次のようになる。

$$\overbrace{\overline{Stat}\cdot\Delta p_j}^{\substack{\text{人口動態効果}\\(\text{第}\,j\,\text{年齢階級})}}=0 \overset{(1\text{-}12)\text{式}}{} \quad \vee \quad \overbrace{\overline{Stat}\cdot\Delta p_j}^{\substack{\text{人口動態効果}\\(\text{第}\,j\,\text{年齢階級})}}\neq 0 \overset{(1\text{-}15)\text{式}}{}$$

＊　＊　＊　＊

以上を要約すれば，単一時点にかんする統計量($Stat$，${}^{Stat}C_j$)の要因分解の一般式，ならびに 2 時点における統計量の差($\Delta Stat$，${}^{\Delta Stat}C_j$)の要因分解にかんする一般式は，それぞれ以下のようになる。

単一時点

$$\begin{cases} Stat=\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot Stat \\ \quad=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot Stat_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j\,(Stat-Stat_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} \qquad (1\text{-}1)[\text{再掲}] \\ {}^{Stat}C_j=p_j\cdot Stat \\ \quad=\overbrace{p_j\cdot Stat_j}^{\text{級内変動(第}\,j\,\text{年齢階級)}}+\overbrace{p_j\,(Stat-Stat_j)}^{\text{級間変動(第}\,j\,\text{年齢階級)}} \qquad (1\text{-}2)[\text{再掲}] \end{cases}$$

2 時点間

$$\begin{aligned} \Delta Stat&=\sum_{j=1}^{m}({}^{t}p_j\cdot{}^{t}Stat-{}^{0}p_j\cdot{}^{0}Stat) \\ &=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j\cdot\Delta Stat_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}} \\ &\quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j\,(\Delta Stat-\Delta Stat_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} \\ &\quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{Stat}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}} \qquad (1\text{-}9)[\text{再掲}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{\Delta Stat}C_j&={}^{t}p_j\cdot{}^{t}Stat-{}^{0}p_j\cdot{}^{0}Stat \\ &=\overbrace{\overline{p}_j\cdot\Delta Stat_j}^{\text{級内変動(第}\,j\,\text{年齢階級)}} \\ &\quad+\overbrace{\overline{p}_j\,(\Delta Stat-\Delta Stat_j)}^{\text{級間変動(第}\,j\,\text{年齢階級)}} \\ &\quad+\overbrace{\overline{Stat}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(第}\,j\,\text{年齢階級)}} \qquad (1\text{-}8)[\text{再掲}] \end{aligned}$$

以下では，本稿冒頭で列挙した 8 つの統計量（平均対数偏差，相加平均，標準偏差，分散，対数分散，変動係数，ジニ係数，平均差）にかんする要因分解式が上記した一般式の系として誘導されることを述べる。

(2) 平均対数偏差

平均対数偏差（mean logarithmic deviation：MLD）は，次式で定義される。

$$MLD=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}(\log\overline{x}-\log x_i)$$

なお，MLD は，以下のようにも再定義できる[5]。

$$\begin{aligned} MLD&=\log \mathfrak{m}_A-\log \mathfrak{m}_G \\ &=\log\frac{\mathfrak{m}_A}{\mathfrak{m}_G} \end{aligned}$$

ただし，$\mathfrak{m}_A$ は相加平均（定義式は後述），$\mathfrak{m}_G$ は相乗平均$\left(\mathfrak{m}_G=\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N}x_i}\right)$

次節における仮設的数値例にたいしては，計算の簡便性から上の再定義式を使用する。

① 単一時点における平均対数偏差の要因分解

$$\begin{cases} Stat=MLD \\ Stat_j=MLD_j \end{cases} \qquad (2\text{-}1)$$

とおいて，(2-1)式を(1-1)式と(1-2)式に代入すれば，要因分解式として次式を得る。

(5) 木村和範「平均対数偏差の数学的性質にかんする覚書」『経済論集』（北海学園大学経済学部）第 65 巻第 1・2 合併号，2017 年，4 頁。

$$\begin{cases} MLD=\sum_{i=1}^{m} p_j \cdot MLD \\ \quad = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot MLD_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j (MLD-MLD_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} \qquad (2\text{-}2) \\ {}^{MLD}C_j = p_j \cdot MLD \\ \quad = \overbrace{p_j \cdot MLD_j}^{\text{級内変動(第}j\text{年齢階級)}} + \overbrace{p_j (MLD-MLD_j)}^{\text{級間変動(第}j\text{年齢階級)}} \qquad (2\text{-}3) \end{cases}$$

② 2時点における平均対数偏差の差の要因分解

$$\begin{cases} \Delta Stat = \Delta MLD\,(={}^{t}MLD-{}^{0}MLD) \\ \Delta Stat_j = \Delta MLD_j\,(={}^{t}MLD_j-{}^{0}MLD_j) \\ \overline{Stat} = \overline{MLD}\left(=\frac{1}{2}({}^{t}MLD+{}^{0}MLD)\right) \end{cases} \qquad (2\text{-}4)$$

とおいて，(2-4)式を(1-9)式と(1-8)式に代入すれば，要因分解式として次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta MLD &= \sum_{j=1}^{m} ({}^{t}p_j \cdot {}^{t}MLD - {}^{0}p_j \cdot {}^{0}MLD) \\ &= \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \overline{p}_j \cdot \Delta MLD_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \overline{p}_j (\Delta MLD - \Delta MLD_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \overline{MLD} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}} \qquad (2\text{-}5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{\Delta MLD}C_j &= {}^{t}p_j \cdot {}^{t}MLD - {}^{0}p_j \cdot {}^{0}MLD \\ &= \overbrace{\overline{p}_j \cdot \Delta MLD_j}^{\text{級内変動(第}j\text{年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\overline{p}_j (\Delta MLD - \Delta MLD_j)}^{\text{級間変動(第}j\text{年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\overline{MLD} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果(第}j\text{年齢階級)}} \qquad (2\text{-}6) \end{aligned}$$

(3) 相加平均

相加平均（$\overline{x}$）は，次式で定義される。

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

① 単一時点における相加平均の要因分解

$$\begin{cases} Stat = \overline{x} \\ Stat_j = \overline{x}_j \end{cases} \qquad (3\text{-}1)$$

とおいて，(3-1)式を(1-1)式と(1-2)式に代入すれば，要因分解式として次式を得る。

$$\begin{cases} \overline{x} = \sum_{i=1}^{m} p_j \cdot \overline{x} \\ \quad = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \overline{x}_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j (\overline{x}-\overline{x}_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} \qquad (3\text{-}2) \\ {}^{\overline{x}}C_j = p_j \cdot \overline{x} \\ \quad = \overbrace{p_j \cdot \overline{x}_j}^{\text{級内変動(第}j\text{年齢階級)}} + \overbrace{p_j (\overline{x}-\overline{x}_j)}^{\text{級間変動(第}j\text{年齢階級)}} \qquad (3\text{-}3) \end{cases}$$

ここで，相加平均の要因分解によって検出される級間変動（全年齢階級）の特殊な数学的性質を，全年齢階級にかんする級間変動の一般式と対比させて述べる。

一般式[(1-1)式]があたえる級間変動（全年齢階級）は

$$\overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j (Stat - Stat_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}}$$

である。これは，

$$\begin{cases} \forall\, j=1, 2, \cdots, m,\ p_j=0 \\ \forall\, j=1, 2, \cdots, m,\ Stat - Stat_j = 0 \end{cases} \qquad (3\text{-}4)$$

のいずれかが成立するとき，ゼロになる。しかし，一般には，

$$Stat - Stat_j \lesseqgtr 0$$

であり，(3-4)式が成立しなくても，m 個の

$$p_j\,(Stat - Stat_j)$$

が合算されることによって相殺し合えば，

$$\overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j\,(Stat - Stat_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} = 0 \qquad (3\text{-}5)$$

となる。他方で，m個の

$$p_j\,(Stat - Stat_j)$$

が相殺し合うことがなく，かつ(3-4)式が成立していなければ，

$$\sum_{j=1}^{m} p_j\,(Stat - Stat_j) \neq 0$$

となる。したがって，(3-4)式は(3-5)式の十分条件ではあるが，必要条件ではないことが分かる。換言すれば，一般式のレベルでは，全年齢階級にかんする級間変動については，

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} p_j\,(Stat - Stat_j) = 0 \\ \sum_{j=1}^{m} p_j\,(Stat - Stat_j) \neq 0 \end{cases}$$

という2とおりの可能性がある。

これにたいして，相加平均にかんする級間変動（全年齢階級）においては，事情が異なり，つねにゼロとなる。以下では，このことを証明する。相加平均（全年齢階級）の定義式は，次のようにも変形することができる[(6)]。

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$= \frac{1}{N}\left\{\overbrace{\overbrace{\underbrace{(x_1+\cdots+x_{k_1})}_{k_1\text{個}}}^{\text{第1年齢階級}} + \cdots + \overbrace{\underbrace{(x_1+\cdots+x_{k_j})}_{k_j\text{個}}}^{\text{第}j\text{年齢階級}} + \cdots + \overbrace{\underbrace{(x_1+\cdots+x_{k_m})}_{k_m\text{個}}}^{\text{第}m\text{年齢階級}}}^{x_i\text{の総数(全年齢階級の世帯総数)：}N}\right\}$$

$$= \frac{1}{N}\left(\overbrace{\sum_{i=1}^{k_1} x_i}^{\text{第1年齢階級}} + \cdots + \overbrace{\sum_{i=1}^{k_j} x_i}^{\text{第}j\text{年齢階級}} + \cdots + \overbrace{\sum_{i=1}^{k_m} x_i}^{\text{第}m\text{年齢階級}}\right) \qquad (3\text{-}6)$$

第j年齢階級の相加平均$(\bar{x}_j)$は

$$\bar{x}_j = \frac{1}{k_j}\sum_{i=1}^{k_j} x_i \qquad (3\text{-}7)$$

である。(3-7)式を

$$k_j \cdot \bar{x}_j = \sum_{i=1}^{k_j} x_i \qquad (3\text{-}7)'$$

と変形し，これを一般項と見なして，(3-6)式に代入すれば，次式を得る。

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\left(\overbrace{k_1 \cdot \bar{x}_1}^{\text{第1年齢階級}} + \cdots + \overbrace{k_j \cdot \bar{x}_j}^{\text{第}j\text{年齢階級}} + \cdots + \overbrace{k_m \cdot \bar{x}_m}^{\text{第}m\text{年齢階級}}\right) \qquad (3\text{-}8)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m} k_j \cdot \bar{x}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{k_j}{N} \cdot \bar{x}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \bar{x}_j \qquad (3\text{-}9)$$

(3-9)式の右辺を

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} p_j \cdot \bar{x}$$

$$= \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \bar{x}_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j\,(\bar{x} - \bar{x}_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} \qquad (3\text{-}2)\text{〔再掲〕}$$

---

(6) 木村（2018a：39頁）

の左辺に代入すると，(3-2)式は次のようになる。

$$\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \bar{x}_j = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \bar{x}_j}^{\text{級内変動（全年齢階級）}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j (\bar{x} - \bar{x}_j)}^{\text{級間変動（全年齢階級）}} \tag{3-10}$$

∴

$$0 = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j (\bar{x} - \bar{x}_j)}^{\text{級間変動（全年齢階級）}} \tag{3-11}$$

q.e.d.

以上から明らかなように，全年齢階級の相加平均にかんする級間変動は，つねにゼロとなる。全年齢階級の相加平均を要因分解すれば，級内変動だけが残る。このことは，本稿で取り上げた他の統計量（平均対数偏差，標準偏差，分散，対数分散，変動係数，ジニ係数，平均差）には見ることができず，相加平均に固有の性質である。

ただし，全年齢階級の相加平均にかんする要因分解によって級内変動だけが残るということは，年齢階級別の級間変動の総和（全年齢階級の級間変動）がゼロであるということを意味するにすぎず，年齢階級別級間変動そのものの計測が無意味であることを含意するものではない。以下で，このことを述べる。

$$^{\bar{x}}C_j = \overbrace{p_j \cdot \bar{x}_j}^{\text{級内変動（第}\,j\,\text{年齢階級）}} + \overbrace{p_j (\bar{x} - \bar{x}_j)}^{\text{級間変動（第}\,j\,\text{年齢階級）}}$$

(3-3)［再掲］

における年齢階級別級間変動

$$\overbrace{p_j (\bar{x} - \bar{x}_j)}^{\text{級間変動（第}\,j\,\text{年齢階級）}}$$

は

$$p_j = 0 \quad \vee \quad \bar{x} - \bar{x}_j = 0$$

のときに，ゼロになる（年齢階級別級間変動が，つねにゼロになるとは限らない）。上記した条件の第1番目（$p_j=0$）が成立するときには，$p_j(\bar{x}-\bar{x}_j)$（第 j 年齢階級の級間変動）とともに，

$$\overbrace{p_j \cdot \bar{x}_j}^{\text{級内変動（第}\,j\,\text{年齢階級）}}$$

の値もゼロとなり，そのために，級内変動と級間変動の和としてあたえられる年齢階級別寄与分（$^{\bar{x}}C_j$）がゼロとなる（世帯シェアがゼロの年齢階級は，全年齢階級にかんする相加平均にたいして級内変動（$p_j \cdot \bar{x}_j$）と級間変動（$p_j(\bar{x}-\bar{x}_j)$）のいずれもがゼロという値の寄与を果たす）。換言すれば，世帯シェアがゼロである場合はもとより，微少な世帯シェアの年齢階級は，年齢階級としての「存在感」を示すことがない。このことは，相加平均に限らず，他の統計量にたいしても一般的に指摘することができる。

第2の条件（$\bar{x}-\bar{x}_j=0$）は，全年齢階級にかんする相加平均と年齢階級別の相加平均が一致していることを示している（$\bar{x}=\bar{x}_j$）。年齢階級別級間変動は，p_j（世帯シェア）をウェイトとし，$\bar{x}$（全年齢階級の相加平均）と $\bar{x}_j$（当該年齢階級の相加平均）との乖離によって計測される。このため，$\bar{x}=\bar{x}_j$のときには，級間変動はゼロである。

すでに述べたように，この年齢階級の級内変動は $p_j \cdot \bar{x}_j$ である。ここでは，所得分布においては一般に

$$\bar{x} \neq 0$$

であるから，

$p_j \neq 0$

のとき，年齢階級別級内変動（$p_j \cdot \overline{x}_j$）はゼロにはならない（より厳密には正である）ことを付言する。

以上，要するに，

$$\overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j\,(\overline{x}-\overline{x}_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} = 0 \qquad (3\text{-}11)\,[\text{再掲}]$$

は，相加平均にかんする全年齢階級の級間変動（年齢階級別級間変動の総和）がゼロになるということだけを示しており，年齢階級別級間変動の計測の意義を否定するものではない。

② 2時点における相加平均の差の要因分解

$$\begin{cases} \Delta Stat = \Delta\overline{x}\ (= {}^{t}\overline{x} - {}^{0}\overline{x}) \\ \Delta Stat_j = \Delta\overline{x}_j\ (= {}^{t}\overline{x}_j - {}^{0}\overline{x}_j) \\ \overline{Stat} = \overline{\overline{x}} \left(= \dfrac{1}{2}({}^{t}\overline{x} + {}^{0}\overline{x})\right) \end{cases} \qquad (3\text{-}12)$$

とおいて，(3-12)式を(1-9)式と(1-8)式に代入すれば，要因分解式として次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta\overline{x} &= \sum_{j=1}^{m}({}^{t}p_j \cdot {}^{t}\overline{x} - {}^{0}p_j \cdot {}^{0}\overline{x}) \\ &= \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j \cdot \Delta\overline{x}_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j\,(\Delta\overline{x} - \Delta\overline{x}_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{\overline{x}} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}} \end{aligned} \qquad (3\text{-}13)$$

$$\begin{aligned} {}^{\Delta\overline{x}}C_j &= {}^{t}p_j \cdot {}^{t}\overline{x} - {}^{0}p_j \cdot {}^{0}\overline{x} \\ &= \overbrace{\overline{p}_j \cdot \Delta\overline{x}_j}^{\text{級内変動(第 } j \text{ 年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\overline{p}_j\,(\Delta\overline{x} - \Delta\overline{x}_j)}^{\text{級間変動(第 } j \text{ 年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\overline{\overline{x}} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果(第 } j \text{ 年齢階級)}} \end{aligned} \qquad (3\text{-}14)$$

(4) 標準偏差

標準偏差（σ）は，次式で定義される。

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\sigma^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2} \end{aligned}$$

① 一時点における標準偏差の要因分解

$$\begin{cases} Stat = \sigma \\ Stat_j = \sigma_j \end{cases} \qquad (4\text{-}1)$$

とおいて，(4-1)式を(1-1)式と(1-2)式に代入すれば，要因分解式として次式を得る。

$$\begin{cases} \sigma = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_j \cdot \sigma \\ \quad = \overbrace{\displaystyle\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \sigma_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}} + \overbrace{\displaystyle\sum_{j=1}^{m} p_j\,(\sigma - \sigma_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} \qquad (4\text{-}2) \\ {}^{\sigma}C_j = p_j \cdot \sigma \\ \quad = \overbrace{p_j \cdot \sigma_j}^{\text{級内変動(第 } j \text{ 年齢階級)}} + \overbrace{p_j\,(\sigma - \sigma_j)}^{\text{級間変動(第 } j \text{ 年齢階級)}} \qquad (4\text{-}3) \end{cases}$$

② 2時点における標準偏差の差の要因分解

$$\begin{cases} \Delta Stat = \Delta\sigma\ (={}^t\sigma - {}^0\sigma) \\ \Delta Stat_j = \Delta\sigma_j\ (={}^t\sigma_j - {}^0\sigma_j) \\ \overline{Stat} = \overline{\sigma}\left(=\dfrac{1}{2}({}^t\sigma + {}^0\sigma)\right) \end{cases} \tag{4-4}$$

とおいて，(4-4)式を(1-9)式と(1-8)式に代入すれば，要因分解式として次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= \sum_{j=1}^{m}({}^tp_j \cdot {}^t\sigma - {}^0p_j \cdot {}^0\sigma) \\ &= \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j \cdot \Delta\sigma_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j(\Delta\sigma - \Delta\sigma_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{\sigma} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}} \end{aligned} \tag{4-5}$$

$$\begin{aligned} {}^{\Delta\sigma}C_j &= {}^tp_j \cdot {}^t\sigma - {}^0p_j \cdot {}^0\sigma \\ &= \overbrace{\overline{p}_j \cdot \Delta\sigma_j}^{\text{級内変動(第 } j \text{ 年齢階級)]}} \\ &\quad + \overbrace{\overline{p}_j(\Delta\sigma - \Delta\sigma_j)}^{\text{級間変動(第 } j \text{ 年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\overline{\sigma} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果(第 } j \text{ 年齢階級)}} \end{aligned} \tag{4-6}$$

(5) 分散

分散（σ^2）は標準偏差（σ）の平方である。すなわち，分散は次式で定義される。

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2$$

① 単一時点における分散の要因分解

$$\begin{cases} Stat = \sigma^2 \\ Stat_j = \sigma_j^2 \end{cases} \tag{5-1}$$

とおいて，(5-1)式を(1-1)式と(1-2)式に代入すれば，要因分解式として次式を得る。

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{i=1}^{m}p_j \cdot \sigma^2 \\ &= \overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j \cdot \sigma_j^2}^{\text{級内変動(全年齢階級)}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j(\sigma^2 - \sigma_j^2)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} \end{aligned} \tag{5-2}$$

$$\begin{aligned} {}^{\sigma}C_j &= p_j \cdot \sigma^2 \\ &= \overbrace{p_j \cdot \sigma_j^2}^{\text{級内変動(第 } j \text{ 年齢階級)}} + \overbrace{p_j(\sigma^2 - \sigma_j^2)}^{\text{級間変動(第 } j \text{ 年齢階級)}} \end{aligned} \tag{5-3}$$

② 2時点における分散の差の要因分解

$$\begin{cases} \Delta Stat = \Delta\sigma^2\ (={}^t\sigma^2 - {}^0\sigma^2) \\ \Delta Stat_j = \Delta\sigma_j^2\ (={}^t\sigma_j^2 - {}^0\sigma_j^2) \\ \overline{Stat} = \overline{\sigma^2}\left(=\dfrac{1}{2}({}^t\sigma^2 + {}^0\sigma^2)\right) \end{cases} \tag{5-4}$$

とおいて，(5-4)式を(1-9)式と(1-8)式に代入すれば，要因分解式として次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta\sigma^2 &= \sum_{j=1}^{m}({}^tp_j \cdot {}^t\sigma^2 - {}^0p_j \cdot {}^0\sigma^2) \\ &= \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j \cdot \Delta\sigma_j^2}^{\text{級内変動(全年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j(\Delta\sigma^2 - \Delta\sigma_j^2)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{\sigma^2} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}} \end{aligned} \tag{5-5}$$

$$\begin{aligned} {}^{\Delta\sigma^2}C_j &= {}^tp_j \cdot {}^t\sigma^2 - {}^0p_j \cdot {}^0\sigma^2 \\ &= \overbrace{\overline{p}_j \cdot \Delta\sigma_j^2}^{\text{級内変動(第 } j \text{ 年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\overline{p}_j(\Delta\sigma^2 - \Delta\sigma_j^2)}^{\text{級間変動(第 } j \text{ 年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\overline{\sigma^2} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果(第 } j \text{ 年齢階級)}} \end{aligned} \tag{5-6}$$

(6) 対数分散

対数分散（logarithmic variance：LV）は，次式で定義される。

$$LV=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\log x_i-\overline{\log x}\right)^2$$

①　単一時点における対数分散の要因分解

$$\begin{cases} Stat=LV \\ Stat_j=LV_j \end{cases} \tag{6-1}$$

とおいて，(6-1)式を(1-1)式と(1-2)式に代入すれば，要因分解式として次式を得る。

$$\begin{cases} LV=\sum_{i=1}^{m}p_j\cdot LV \\ \quad =\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot LV_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j\,(LV-LV_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} \quad (6\text{-}2) \\ {}^{LV}C_j=p_j\cdot LV \\ \quad =\overbrace{p_j\cdot LV_j}^{\text{級内変動(第}j\text{年齢階級)}}+\overbrace{p_j\,(LV-LV_j)}^{\text{級間変動(第}j\text{年齢階級)}} \end{cases} \tag{6-3}$$

②　2時点における対数分散の差の要因分解

$$\begin{cases} \Delta Stat=\Delta LV\ (={}^tLV-{}^0LV) \\ \Delta Stat_j=\Delta LV_j\ (={}^tLV_j-{}^0LV_j) \\ \overline{Stat}=\overline{LV}\left(=\frac{1}{2}({}^tLV+{}^0LV)\right) \end{cases} \tag{6-4}$$

とおいて，(6-4)式を(1-9)式と(1-8)式に代入すれば，要因分解式として次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta LV&=\sum_{j=1}^{m}({}^tp_j\cdot{}^tLV-{}^0p_j\cdot{}^0LV) \\ &=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j\cdot\Delta LV_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}} \\ &\quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j\,(\Delta LV-\Delta LV_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} \\ &\quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{LV}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}} \end{aligned} \tag{6-5}$$

$$\begin{aligned} {}^{\Delta LV}C_j&={}^tp_j\cdot{}^tLV-{}^0p_j\cdot{}^0LV \\ &=\overbrace{\overline{p}_j\cdot\Delta LV_j}^{\text{級内変動(第}j\text{年齢階級)}} \\ &\quad+\overbrace{\overline{p}_j\,(\Delta LV-\Delta LV_j)}^{\text{級間変動(第}j\text{年齢階級)}} \\ &\quad+\overbrace{\overline{LV}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(第}j\text{年齢階級)}} \end{aligned} \tag{6-6}$$

(7) 変動係数

変動係数(coefficient of variation：CV)は次式で定義される無次元量である。

$$CV=\frac{\sigma}{\overline{x}}$$

ここに，$\overline{x}$は統計系列の相加平均，σは標準偏差

①　単一時点における変動係数の要因分解

$$\begin{cases} Stat=CV \\ Stat_j=CV_j \end{cases} \tag{7-1}$$

とおいて，(7-1)式を(1-1)式と(1-2)式に代入すれば，要因分解式として次式を得る。

$$\begin{cases} CV=\sum_{i=1}^{m} p_j\cdot CV \\ \quad =\overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j\cdot CV_j}^{\text{級内変動（全年齢階級）}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j\,(CV-CV_j)}^{\text{級間変動（全年齢階級）}} \qquad (7\text{-}2) \\ {}^{CV}C_j=p_j\cdot CV \\ \quad =\overbrace{p_j\cdot CV_j}^{\text{級内変動（第}j\text{年齢階級）}}+\overbrace{p_j\,(CV-CV_j)}^{\text{級間変動（第}j\text{年齢階級）}} \qquad (7\text{-}3) \end{cases}$$

② 2時点における変動係数の差の要因分解

$$\begin{cases} \Delta Stat=\Delta CV\ (={}^{t}CV-{}^{0}CV) \\ \Delta Stat_j=\Delta CV_j\ (={}^{t}CV_j-{}^{0}CV_j) \\ \overline{Stat}=\overline{CV}\left(=\frac{1}{2}({}^{t}CV+{}^{0}CV)\right) \end{cases} \qquad (7\text{-}4)$$

とおいて，(7-4)式を(1-9)式と(1-8)式に代入すれば，要因分解式として次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta CV &=\sum_{j=1}^{m}({}^{t}p_j\cdot {}^{t}CV-{}^{0}p_j\cdot {}^{0}CV) \\ &=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j\cdot \Delta CV_j}^{\text{級内変動（全年齢階級）}} \\ &\quad +\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j\,(\Delta CV-\Delta CV_j)}^{\text{級間変動（全年齢階級）}} \\ &\quad +\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{CV}\cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果（全年齢階級）}} \qquad (7\text{-}5) \\ {}^{\Delta CV}C_j &={}^{t}p_j\cdot {}^{t}CV-{}^{0}p_j\cdot {}^{0}CV \\ &=\overbrace{\overline{p}_j\cdot \Delta CV_j}^{\text{級内変動（第}j\text{年齢階級）}} \\ &\quad +\overbrace{\overline{p}_j\,(\Delta CV-\Delta CV_j)}^{\text{級間変動（第}j\text{年齢階級）}} \\ &\quad +\overbrace{\overline{CV}\cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果（第}j\text{年齢階級）}} \qquad (7\text{-}6) \end{aligned}$$

(8) ジニ係数

変動係数と同様に，無次元量をあたえるジニ係数（Gini's coefficient：G）について，ジニは，様々な定義式を誘導している[7]。その様々な定義式のなかから，明解性に鑑みて，劈頭にある集中比（rapporto di concentrazione）の定義式[8]

$$G=\frac{\sum_{i=1}^{N-1}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{q}_i)}{\sum_{i=1}^{N-1}\mathfrak{p}_i}$$

ここに，$\mathfrak{p}$ は世帯の累積相対度数，$\mathfrak{q}$ は世帯所得の累積相対度数

を掲げる。この定義式は，項が比較的少ない統計系列にかんするジニ係数の算出に適していることから，次節における例解で採用した。

① 単一時点におけるジニ係数の要因分解

$$\begin{cases} Stat=G \\ Stat_j=G_j \end{cases} \qquad (8\text{-}1)$$

とおいて，(8-1)式を(1-1)式と(1-2)式に代入すれば，要因分解式として次式を得る。

$$\begin{cases} G=\sum_{i=1}^{m} p_j\cdot G \\ \quad =\overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j\cdot G_j}^{\text{級内変動（全年齢階級）}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j\,(G-G_j)}^{\text{級間変動（全年齢階級）}} \qquad (8\text{-}2) \\ {}^{G}C_j=p_j\cdot G \\ \quad =\overbrace{p_j\cdot G_j}^{\text{級内変動（第}j\text{年齢階級）}}+\overbrace{p_j\,(G-G_j)}^{\text{級間変動（第}j\text{年齢階級）}} \qquad (8\text{-}3) \end{cases}$$

---

(7) 木村和範『ジニ係数の形成』北海道大学出版会 2008年［木村（2008）］，第6章，第7章，第8章。

(8) Gini, Corrado, "Sulla misura dellla concentrazione e delle variabilità dei caratteri," *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, Tomo LXXIII, Parte seconda, Anno accademico 1913–1914, p.1207.

② 2時点におけるジニ係数の差の要因分解

$$\begin{cases} \Delta Stat = \Delta G \left(= {}^{t}G - {}^{0}G\right) \\ \Delta Stat_j = \Delta G_j \left(= {}^{t}G_j - {}^{0}G_j\right) \\ \overline{Stat} = \overline{G} \left(= \dfrac{1}{2}\left({}^{t}G + {}^{0}G\right)\right) \end{cases} \tag{8-4}$$

とおいて，(8-4)式を(1-9)式と(1-8)式に代入すれば，要因分解式として次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta G &= \sum_{j=1}^{m}\left({}^{t}p_j \cdot {}^{t}G - {}^{0}p_j \cdot {}^{0}G\right) \\ &= \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j \cdot \Delta G_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j\left(\Delta G - \Delta G_j\right)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{G} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}} \end{aligned} \tag{8-5}$$

$$\begin{aligned} {}^{\Delta G}C_j &= {}^{t}p_j \cdot {}^{t}G - {}^{0}p_j \cdot {}^{0}G \\ &= \overbrace{\overline{p}_j \cdot \Delta G_j}^{\text{級内変動(第 } j \text{ 年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\overline{p}_j\left(\Delta G - \Delta G_j\right)}^{\text{級間変動(第 } j \text{ 年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\overline{G} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果(第 } j \text{ 年齢階級)}} \end{aligned} \tag{8-6}$$

(9) 平均差

ジニ係数（G）は平均差（mean difference：MD）と相加平均（$\overline{x}$）によって，次のように定義される[9]。

$$G = \frac{MD}{2\overline{x}}$$

この定義式から，平均差は

$$MD = 2\overline{x}G$$

となる。

① 単一時点における平均差の要因分解

$$\begin{cases} Stat = MD \\ Stat_j = MD_j \end{cases} \tag{9-1}$$

とおいて，(9-1)式を(1-1)式と(1-2)式に代入すれば，要因分解式として次式を得る。

$$\begin{cases} MD = \sum_{i=1}^{m} p_j \cdot MD \\ \quad = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot MD_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j\left(MD - MD_j\right)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} \qquad (9\text{-}2) \\ {}^{MD}C_j = p_j \cdot MD \\ \quad = \overbrace{p_j \cdot MD_j}^{\text{級内変動(第 } j \text{ 年齢階級)}} + \overbrace{p_j\left(MD - MD_j\right)}^{\text{級間変動(第 } j \text{ 年齢階級)}} \qquad (9\text{-}3) \end{cases}$$

② 2時点における平均差の差の要因分解

$$\begin{cases} \Delta Stat = \Delta MD \left(= {}^{t}MD - {}^{0}MD\right) \\ \Delta Stat_j = \Delta MD_j \left(= {}^{t}MD_j - {}^{0}MD_j\right) \\ \overline{Stat} = \overline{MD} \left(= \dfrac{1}{2}\left({}^{t}MD + {}^{0}MD\right)\right) \end{cases} \tag{9-4}$$

とおいて，(9-4)式を(1-9)式と(1-8)式に代入すれば，要因分解式として次式を得る。

(9) 木村（2008：第8章）

$$\varDelta MD=\sum_{j=1}^{m}({}^{t}p_j\cdot{}^{t}MD-{}^{0}p_j\cdot{}^{0}MD)$$
$$=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\cdot\varDelta MD_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}}$$
$$+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j(\varDelta MD-\varDelta MD_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}}$$
$$+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{MD}\cdot\varDelta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}}\qquad(9\text{-}5)$$

$${}^{\varDelta MD}C_j={}^{t}p_j\cdot{}^{t}MD-{}^{0}p_j\cdot{}^{0}MD$$
$$=\overbrace{\bar{p}_j\cdot\varDelta MD_j}^{\text{級内変動(第}j\text{年齢階級)}}$$
$$+\overbrace{\bar{p}_j(\varDelta MD-\varDelta MD_j)}^{\text{級間変動(第}j\text{年齢階級)}}$$
$$+\overbrace{\overline{MD}\cdot\varDelta p_j}^{\text{人口動態効果(第}j\text{年齢階級)}}\qquad(9\text{-}6)$$

2．数値例による要因分解

いずれの統計量についても仮設したデータ・セットは同一であり，世帯所得の単位を百万円とする。要因分解式によって算出される数値は，平均対数偏差，相加平均，標準偏差，分散，対数分散，平均差については通貨単位（数値例では円）が付く名数であり(10)，変動係数とジニ係数では無次元量（無名数）である。なお，所得額の対数変換には常用対数を用いた。

本稿で仮設したデータ・セットにおける世帯数は，以下のとおりである。

基準時点　全年齢階級：10 世帯
　　　　　第 1 年齢階級： 3 世帯
　　　　　第 2 年齢階級： 5 世帯
　　　　　第 3 年齢階級： 2 世帯
比較時点　全年齢階級：12 世帯
　　　　　第 1 年齢階級： 2 世帯
　　　　　第 2 年齢階級： 7 世帯
　　　　　第 3 年齢階級： 3 世帯

(1) 単一時点にかんする統計量の分解（級内変動・級間変動）

以下では，基準時点と比較時点の時点別データ・セットにたいする要因分解表とそのグラフを統計量ごとに掲載する。

(10) 原系列を対数変換したときは，厳密には対数変換円となろう。

①　平均対数偏差

表 1 (a)　基準時点における要因分解 (平均対数偏差)

全年齢階級の世帯別所得	(百万円)	年齢階級別世帯所得 (百万円) 第 1	第 2	第 3
第 1 年齢階級	1	1	2	3
	2	2	5	8
	3	3	7	
第 2 年齢階級	2		7	
	5		9	
	7			
	7			
	9			
第 3 年齢階級	3			
	8			
世帯シェア (p_j)	[1.0000]	0.3000	0.5000	0.2000
相加平均	4.7000	2.0000	6.0000	5.5000
相乗平均	3.8043	1.8171	5.3566	4.8990
平均対数偏差 (MLD, MLD_j)	0.0918	0.0416	0.0493	0.0503
$MLD-MLD_j$		0.0502	0.0426	0.0416
年齢階級別寄与分*		0.0275	0.0459	0.0184
級内変動	0.0472	0.0125	0.0246	0.0101
級間変動	0.0446	0.0151	0.0213	0.0083
合　　計	0.0918	0.0275	0.0459	0.0184

(＊) (世帯シェア) × (全年齢階級の平均対数偏差)

表 1 (b)　比較時点における要因分解 (平均対数偏差)

全年齢階級の世帯別所得	(百万円)	年齢階級別世帯所得 (百万円) 第 1	第 2	第 3
第 1 年齢階級	1	1	1	2
	3	3	3	5
第 2 年齢階級	1		6	6
	3		6	
	6		7	
	6		8	
	7		8	
	8			
	8			
第 3 年齢階級	2			
	5			
	6			
世帯シェア (p_j)	[1.0000]	0.1667	0.5833	0.2500
相加平均	4.6667	2.0000	5.5714	4.3333
相乗平均	3.7873	1.7321	4.6692	3.9149
平均対数偏差 (MLD, MLD_j)	0.0907	0.0625	0.0767	0.0441
$MLD-MLD_j$		0.0282	0.0140	0.0466
年齢階級別寄与分*		0.0151	0.0529	0.0227
級内変動	0.0662	0.0104	0.0448	0.0110
級間変動	0.0245	0.0047	0.0081	0.0116
合　　計	0.0907	0.0151	0.0529	0.0227

(＊) (世帯シェア) × (全年齢階級の平均対数偏差)

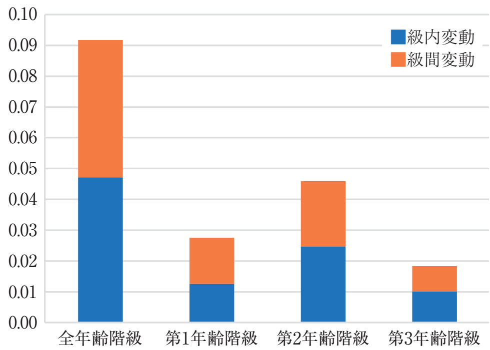

図 1 (a)　基準時点における要因分解図 (平均対数偏差)

(注) 縦軸の値は原系列 (単位は百万円) の対数変換値である。

出所：表 1 (a)

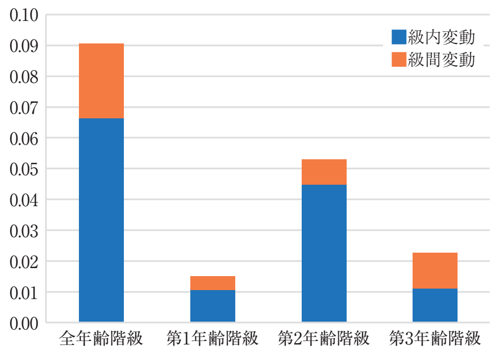

図 1 (b)　比較時点における要因分解図 (平均対数偏差)

(注) 縦軸の値は原系列 (単位は百万円) の対数変換値である。

出所：表 1 (b)

②　相加平均

表2(a)　基準時点における要因分解(相加平均)

全年齢階級の世帯別所得　（百万円）		年齢階級別世帯所得（百万円）第1	第2	第3
第1年齢階級	1	1	2	3
	2	2	5	8
	3	3	7	
第2年齢階級	2		7	
	5		9	
	7			
	7			
	9			
第3年齢階級	3			
	8			
世帯シェア(p_j)	[1.0000]	0.3000	0.5000	0.2000
相加平均($\bar{x}$, $\bar{x}_j$)	4.7000	2.0000	6.0000	5.5000
$\bar{x}-\bar{x}_j$		2.7000	−1.3000	−0.8000
年齢階級別寄与分*		1.4100	2.3500	0.9400
級内変動	4.7000	0.6000	3.0000	1.1000
級間変動**	0.0000	0.8100	−0.6500	−0.1600
合　計	4.7000	1.4100	2.3500	0.9400

（*）（世帯シェア）×（全年齢階級の相加平均）
（**）全年齢階級の級間変動がゼロとなることについては，相加平均の定義式（(3-6)式）から(3-9)式を経て，導き出された(3-11)式によって示される。

表2(b)　比較時点における要因分解(相加平均)

全年齢階級の世帯別所得　（百万円）		年齢階級別世帯所得（百万円）第1	第2	第3
第1年齢階級	1	1	1	2
	3	3	3	5
第2年齢階級	1		6	6
	3		6	
	6		7	
	6		8	
	7		8	
	8			
	8			
第3年齢階級	2			
	5			
	6			
世帯シェア(p_j)	[1.0000]	0.1667	0.5833	0.2500
相加平均($\bar{x}$, $\bar{x}_j$)	4.6667	2.0000	5.5714	4.3333
$\bar{x}-\bar{x}_j$		2.6667	−0.9048	0.3333
年齢階級別寄与分*		0.7778	2.7222	1.1667
級内変動	4.6667	0.3333	3.2500	1.0833
級間変動**	0.0000	0.4444	−0.5278	0.0833
合　計	4.6667	0.7778	2.7222	1.1667

（*）（世帯シェア）×（全年齢階級の相加平均）
（**）全年齢階級の級間変動がゼロとなることについては，相加平均の定義式（(3-6)式）から(3-9)式を経て，導き出された(3-11)式によって示される。

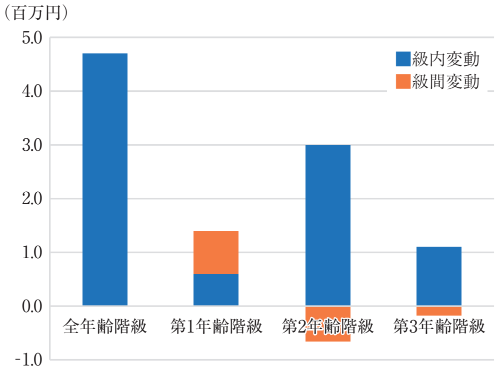

図2 (a)　基準時点における要因分解図（相加平均）
出所：表2 (a)

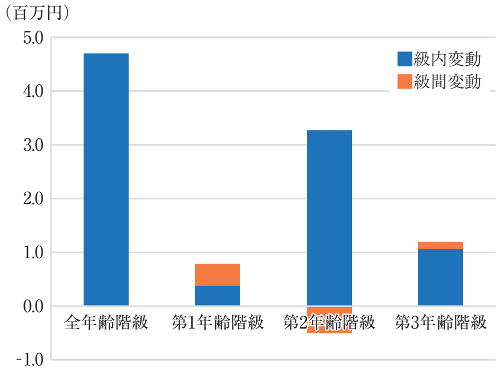

図2 (b)　比較時点における要因分解図（相加平均）
出所：表2 (b)

③　標準偏差

表 3(a)　基準時点における要因分解(標準偏差)

全年齢階級の世帯別所得	(百万円)	年齢階級別世帯所得 (百万円) 第 1	第 2	第 3
第 1 年齢階級	1	1	2	3
	2	2	5	8
	3	3	7	
第 2 年齢階級	2		7	
	5		9	
	7			
	7			
	9			
第 3 年齢階級	3			
	8			
世帯シェア(p_j)	[1.0000]	0.3000	0.5000	0.2000
標準偏差(σ, σ_j)	2.7221	0.8165	2.3664	2.5000
$\sigma-\sigma_j$		1.9056	0.3557	0.2221
年齢階級別寄与分*		0.8166	1.3611	0.5444
級内変動	1.9282	0.2449	1.1832	0.5000
級間変動	0.7940	0.5717	0.1778	0.0444
合　計	2.7221	0.8166	1.3611	0.5444

(*)(世帯シェア)×(全年齢階級の標準偏差)

表 3(b)　比較時点における要因分解(標準偏差)

全年齢階級の世帯別所得	(百万円)	年齢階級別世帯所得 (百万円) 第 1	第 2	第 3
第 1 年齢階級	1	1	1	2
	3	3	3	5
第 2 年齢階級	1		6	6
	3		6	
	6		7	
	6		8	
	7		8	
	8			
	8			
第 3 年齢階級	2			
	5			
	6			
世帯シェア(p_j)	[1.0000]	0.1667	0.5833	0.2500
標準偏差(σ, σ_j)	2.4608	1.0000	2.4411	1.6997
$\sigma-\sigma_j$		1.4608	0.0197	0.7611
年齢階級別寄与分*		0.4101	1.4355	0.6152
級内変動	2.0156	0.1667	1.4240	0.4249
級間変動	0.4452	0.2435	0.0115	0.1903
合　計	2.4608	0.4101	1.4355	0.6152

(*)(世帯シェア)×(全年齢階級の標準偏差)

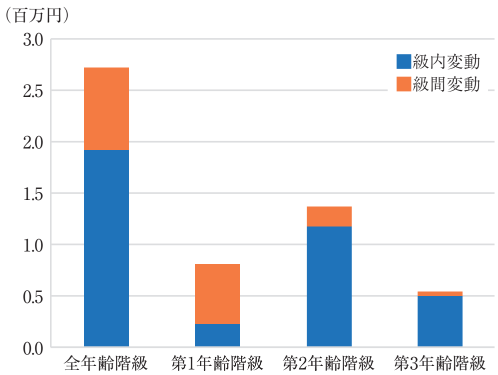

図 3 (a)　基準時点における要因分解図 (標準偏差)
出所：表 3 (a)

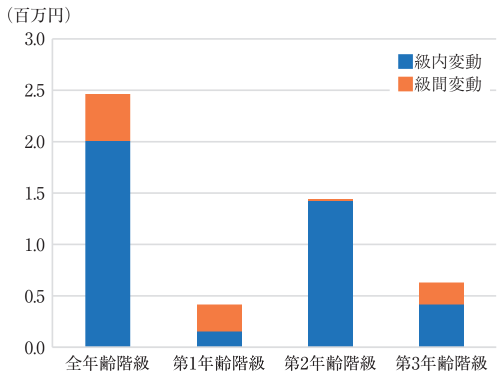

図 3 (b)　比較時点における要因分解図 (標準偏差)
出所：表 3 (b)

④　分散

表 4(a)　基準時点における要因分解(分散)

全年齢階級の世帯別所得（百万円）		年齢階級別世帯所得（百万円）第 1	第 2	第 3
第 1 年齢階級	1	1	2	3
	2	2	5	8
	3	3	7	
第 2 年齢階級	2		7	
	5		9	
	7			
	7			
	9			
第 3 年齢階級	3			
	8			
世帯シェア(p_j)	[1.0000]	0.3000	0.5000	0.2000
分散(σ^2, σ_j^2)	7.4100	0.6667	5.6000	6.2500
$\sigma^2-\sigma_j^2$		6.7433	1.8100	1.1600
年齢階級別寄与分*		2.2230	3.7050	1.4820
級内変動	4.2500	0.2000	2.8000	1.2500
級間変動	3.1600	2.0230	0.9050	0.2320
合　計	7.4100	2.2230	3.7050	1.4820

(＊)(世帯シェア)×(全年齢階級の分散)

表 4(b)　比較時点における要因分解(分散)

全年齢階級の世帯別所得（百万円）		年齢階級別世帯所得（百万円）第 1	第 2	第 3
第 1 年齢階級	1	1	1	2
	3	3	3	5
第 2 年齢階級	1		6	6
	3		6	
	6		7	
	6		8	
	7		8	
	8			
	8			
第 3 年齢階級	2			
	5			
	6			
世帯シェア(p_j)	[1.0000]	0.1667	0.5833	0.2500
分散(σ^2, σ_j^2)	6.0556	1.0000	5.9592	2.8889
$\sigma^2-\sigma_j^2$		5.0556	0.0964	3.1667
年齢階級別寄与分*		1.0093	3.5324	1.5139
級内変動	4.3651	0.1667	3.4762	0.7222
級間変動	1.6905	0.8426	0.0562	0.7917
合　計	6.0556	1.0093	3.5324	1.5139

(＊)(世帯シェア)×(全年齢階級の分散)

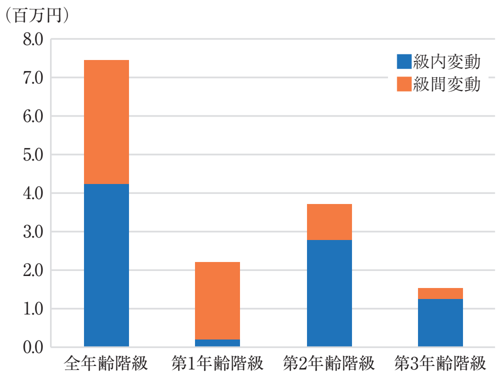

図 4 (a)　基準時点における要因分解図（分散）
出所：表 4 (a)

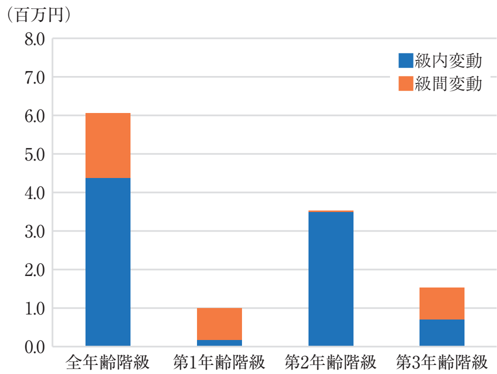

図 4 (b)　比較時点における要因分解図（分散）
出所：表 4 (b)

⑤　対数分散

表 5(a)　基準時点における要因分解(対数分散)

全年齢階級の世帯別所得	(百万円)	年齢階級別世帯所得 (百万円) 第 1	第 2	第 3
第 1 年齢階級	1	1	2	3
	2	2	5	8
	3	3	7	
第 2 年齢階級	2		7	
	5		9	
	7			
	7			
	9			
第 3 年齢階級	3			
	8			
世帯シェア(p_j)	[1. 0000]	0. 3000	0. 5000	0. 2000
対数分散(LV, LV_j)	0. 0912	0. 0388	0. 0524	0. 0454
$LV-LV_j$		0. 0524	0. 0389	0. 0459
年齢階級別寄与分*		0. 0274	0. 0456	0. 0182
級内変動	0. 0469	0. 0116	0. 0262	0. 0091
級間変動	0. 0443	0. 0157	0. 0194	0. 0092
合　　計	0. 0912	0. 0274	0. 0456	0. 0182

(*)(世帯シェア)×(全年齢階級の対数分散)

表 5(b)　比較時点における要因分解(対数分散)

全年齢階級の世帯別所得	(百万円)	年齢階級別世帯所得 (百万円) 第 1	第 2	第 3
第 1 年齢階級	1	1	1	2
	3	3	3	5
第 2 年齢階級	1		6	6
	3		6	
	6		7	
	6		8	
	7		8	
	8			
	8			
第 3 年齢階級	2			
	5			
	6			
世帯シェア(p_j)	[1. 0000]	0. 1667	0. 5833	0. 2500
対数分散(LV, LV_j)	0. 0986	0. 0569	0. 0927	0. 0436
$LV-LV_j$		0. 0417	0. 0059	0. 0550
年齢階級別寄与分*		0. 0164	0. 0575	0. 0246
級内変動	0. 0744	0. 0095	0. 0541	0. 0109
級間変動	0. 0241	0. 0069	0. 0034	0. 0137
合　　計	0. 0986	0. 0164	0. 0575	0. 0246

(*)(世帯シェア)×(全年齢階級の対数分散)

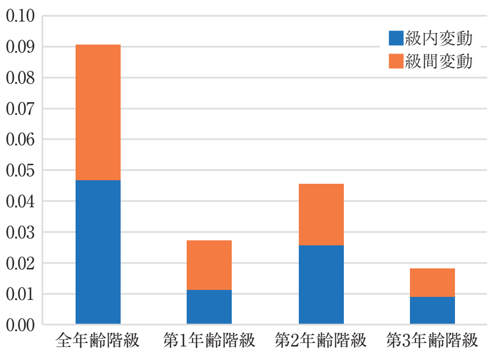

図 5 (a)　基準時点における要因分解図 (対数分散)

(注)縦軸の値は原系列 (単位は百万円) の対数変換値である。

出所：表 5 (a)

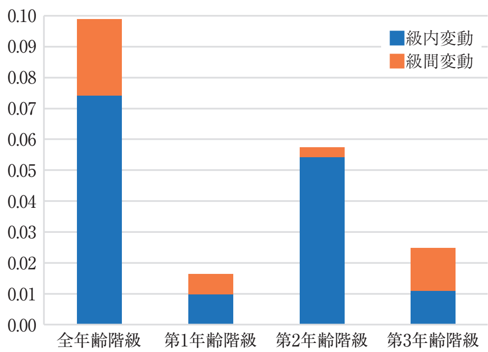

図 5 (b)　比較時点における要因分解図 (対数分散)

(注)縦軸の値は原系列 (単位は百万円) の対数変換値である。

出所：表 5 (b)

⑥　変動係数

表 6(a)　基準時点における要因分解(変動係数)

全年齢階級の世帯別所得　(百万円)		年齢階級別世帯所得（百万円） 第1	第2	第3
第1年齢階級	1	1	2	3
	2	2	5	8
	3	3	7	
第2年齢階級	2		7	
	5		9	
	7			
	7			
	9			
第3年齢階級	3			
	8			
世帯シェア(p_j)	[1.0000]	0.3000	0.5000	0.2000
相加平均	4.7000	2.0000	6.0000	5.5000
標準偏差	2.7221	0.8165	2.3664	2.5000
変動係数(CV, CV_j)	0.5792	0.4082	0.3944	0.4545
$CV-CV_j$		0.1709	0.1848	0.1246
年齢階級別寄与分*		0.1738	0.2896	0.1158
級内変動	0.4106	0.1225	0.1972	0.0909
級間変動	0.1686	0.0513	0.0924	0.0249
合　計	0.5792	0.1738	0.2896	0.1158

(＊)(世帯シェア)×(全年齢階級の変動係数)

表 6(b)　比較時点における要因分解(変動係数)

全年齢階級の世帯別所得　(百万円)		年齢階級別世帯所得（百万円） 第1	第2	第3
第1年齢階級	1	1	1	2
	3	3	3	5
第2年齢階級	1		6	6
	3		6	
	6		7	
	6		8	
	7		8	
	8			
	8			
第3年齢階級	2			
	5			
	6			
世帯シェア(p_j)	[1.0000]	0.1667	0.5833	0.2500
相加平均	4.6667	2.0000	5.5714	4.3333
標準偏差	2.4608	1.0000	2.4411	1.6997
変動係数(CV, CV_j)	0.5273	0.5000	0.4382	0.3922
$CV-CV_j$		0.0273	0.0892	0.1351
年齢階級別寄与分*		0.0879	0.3076	0.1318
級内変動	0.4370	0.0833	0.2556	0.0981
級間変動	0.0903	0.0046	0.0520	0.0338
合　計	0.5273	0.0879	0.3076	0.1318

(＊)(世帯シェア)×(全年齢階級の変動係数)

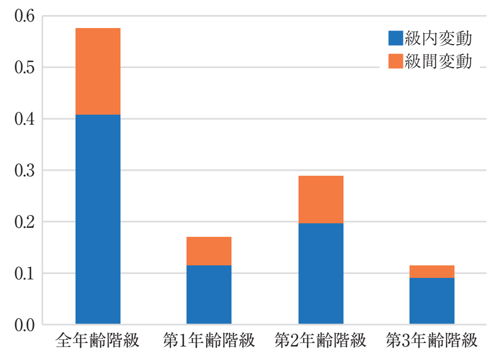

図 6 (a)　基準時点における要因分解図（変動係数）
(注)縦軸の値は無次元量である。
出所：表 6 (a)

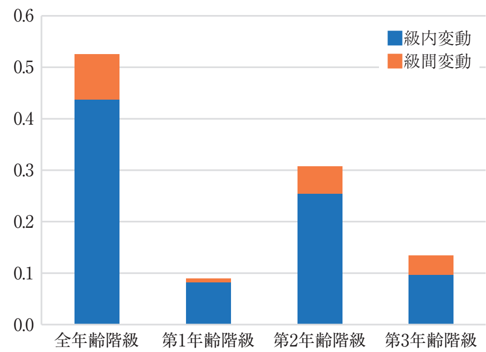

図 6 (b)　比較時点における要因分解図（変動係数）
(注)縦軸の値は無次元量である。
出所：表 6 (b)

⑦　ジニ係数

表記の統一性をはかるために，ここでは，５つの統計量にかんするこれまでの計算例と同様形式の要因分解表のみを掲げる。全年齢階級と年齢階級別のジニ係数にかんする計算表（基準時点と比較時点）は，本稿末尾に掲げた（付表１と付表２）。

表7(a)　基準時点における要因分解(ジニ係数)

全年齢階級の世帯別所得（百万円）*		年齢階級別世帯所得（百万円）		
		第1	第2	第3
	1(1)	1	2	3
	2(1)	2	5	8
	2(2)	3	7	
	3(1)		7	
	3(3)		9	
	5(2)			
	7(2)			
	7(2)			
	8(3)			
	9(2)			
世帯シェア(p_j)	[1.0000]	0.3000	0.5000	0.2000
ジニ係数(G, G_j)**	0.3285	0.3333	0.2857	0.4545
$G-G_j$		−0.0049	0.0427	−0.1261
年齢階級別寄与分***		0.0985	0.1642	0.0657
級内変動	0.3338	0.1000	0.1429	0.0909
級間変動	−0.0053	−0.0015	0.0214	−0.0252
合　計	0.3285	0.0985	0.1642	0.0657

(*) 計算のために昇順に並べ替えた。所得の後の（　）内数字は年齢階級を示す。
(**) 付表1(a)(b)(c)(d)参照。
(***)(世帯シェア)×(全年齢階級のジニ係数)

表7(b)　比較時点における要因分解(ジニ係数)

全年齢階級の世帯別所得（百万円）*		年齢階級別世帯所得（百万円）		
		第1	第2	第3
	1(1)	1	1	2
	1(2)	3	3	5
	2(3)		6	6
	3(1)		6	
	3(2)		7	
	5(3)		8	
	6(2)		8	
	6(2)			
	6(3)			
	7(2)			
	8(2)			
	8(2)			
世帯シェア(p_j)	[1.0000]	0.1667	0.5833	0.2500
ジニ係数(G, G_j)**	0.3633	0.5000	0.3419	0.3077
$G-G_j$		−0.1367	0.0214	0.0556
年齢階級別寄与分***		0.0605	0.2119	0.0908
級内変動	0.3597	0.0833	0.1994	0.0769
級間変動	0.0036	−0.0228	0.0125	0.0139
合　計	0.3633	0.0605	0.2119	0.0908

(*) 計算のために昇順に並べ替えた。所得の後の（　）内数字は年齢階級を示す。
(**) 付表2(a)(b)(c)(d)参照。
(***)(世帯シェア)×(全年齢階級のジニ係数)

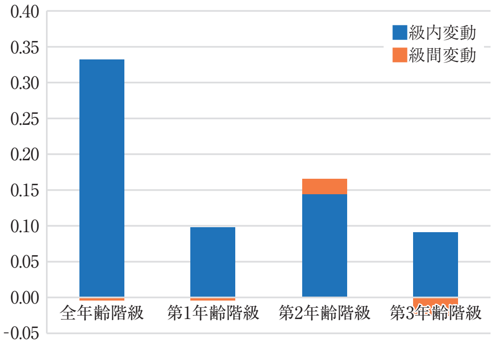

図7(a)　基準時点における要因分解図（ジニ係数）
(注)縦軸の値は無次元量である。
出所：表7(a)

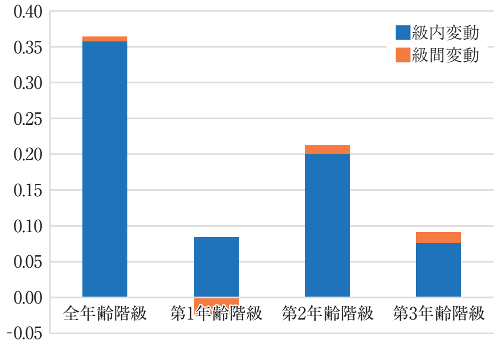

図7(b)　比較時点における要因分解図（ジニ係数）
(注)縦軸の値は無次元量である。
出所：表7(b)

⑧　平均差

表 8(a)　基準時点における要因分解(平均差)

全年齢階級の世帯別所得	(百万円)	年齢階級別世帯所得（百万円）第 1	第 2	第 3
第 1 年齢階級	1	1	2	3
	2	2	5	8
	3	3	7	
第 2 年齢階級	2		7	
	5		9	
	7			
	7			
	9			
第 3 年齢階級	3			
	8			
世帯シェア(p_j)	[1. 0000]	0. 3000	0. 5000	0. 2000
相加平均	4. 7000	2. 0000	6. 0000	5. 5000
相加平均×2	9. 4000	4. 0000	12. 0000	11. 0000
ジニ係数	0. 3285	0. 3333	0. 2857	0. 4545
平均差(MD, MD_j)	3. 0875	1. 3333	3. 4286	5. 0000
$MD-MD_j$		1. 7542	−0. 3411	−1. 9125
年齢階級別寄与分*		0. 9263	1. 5438	0. 6175
級内変動	3. 1143	0. 4000	1. 7143	1. 0000
級間変動	−0. 0268	0. 5263	−0. 1705	−0. 3825
合　　計	3. 0875	0. 9263	1. 5438	0. 6175

(＊)(世帯シェア)×(全年齢階級の平均差)

表 8(b)　比較時点における要因分解(平均差)

全年齢階級の世帯別所得	(百万円)	年齢階級別世帯所得（百万円）第 1	第 2	第 3
第 1 年齢階級	1	1	1	2
	3	3	3	5
第 2 年齢階級	1		6	6
	3		6	
	6		7	
	6		8	
	7		8	
	8			
	8			
第 3 年齢階級	2			
	5			
	6			
世帯シェア(p_j)	[1. 0000]	0. 1667	0. 5833	0. 2500
相加平均	4. 6667	2. 0000	5. 5714	4. 3333
相加平均×2	9. 3333	4. 0000	11. 1429	8. 6667
ジニ係数	0. 3633	0. 5000	0. 3419	0. 3077
平均差(MD, MD_j)	3. 3905	2. 0000	3. 8095	2. 6667
$MD-MD_j$		1. 3905	−0. 4190	0. 7238
年齢階級別寄与分*		0. 5651	1. 9778	0. 8476
級内変動	3. 2222	0. 3333	2. 2222	0. 6667
級間変動	0. 1683	0. 2317	−0. 2444	0. 1810
合　　計	3. 3905	0. 5651	1. 9778	0. 8476

(＊)(世帯シェア)×(全年齢階級の平均差)

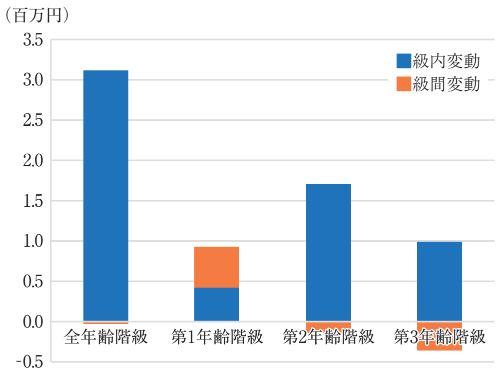

図 8 (a)　基準時点における要因分解図（平均差）
出所：表 8 (a)

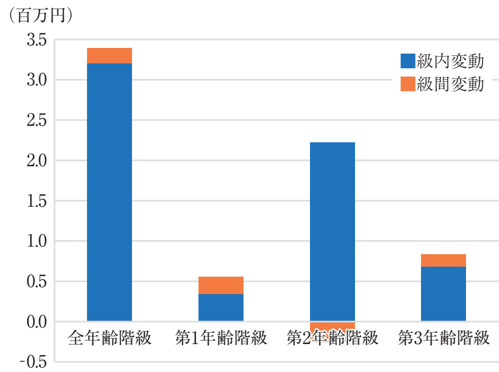

図 8 (b)　比較時点における要因分解図（平均差）
出所：表 8 (b)

(2)　2 時点（比較時点と基準時点）における統計量の差の分解（級内変動・級間変動・人口動態効果）

以下では，前項における時点別の要因分解表にもとづいて算出した 2 時点における統計量の差にかんする要因分解表とそのグラフを掲載する。

①　平均対数偏差

表 1(c)　2 時点にかんする要因分解(平均対数偏差)

全年齢階級の世帯別所得	(百万円)	年齢階級 第 1	第 2	第 3
$\bar{p}_j$		0. 2333	0. 5417	0. 2250
ΔMLD_j		0. 0208	0. 0275	−0. 0062
ΔMLD	−0. 0011			
$\Delta MLD - \Delta MLD_j$		−0. 0220	−0. 0286	0. 0050
$\overline{MLD}$	0. 0912			
Δp_j		−0. 1333	0. 0833	0. 0500
年齢階級別寄与分*		−0. 0124	0. 0070	0. 0043
級 内 変 動	0. 0183	0. 0049	0. 0149	−0. 0014
級 間 変 動	−0. 0195	−0. 0051	−0. 0155	0. 0011
人口動態効果	0. 0000	−0. 0122	0. 0076	0. 0046
合　　　計	−0. 0011	−0. 0124	0. 0070	0. 0043

(*)(比較時点の年齢階級別寄与分)−(基準時点の年齢階級別寄与分)[表 1(a)(b)による]

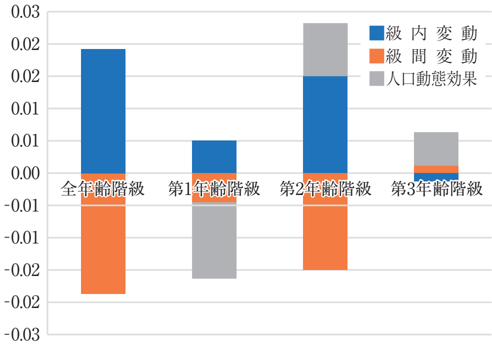

図 1 (c)　2 時点における要因分解図(平均対数偏差)

(注)縦軸の値は原系列（単位は百万円）の対数変換値である。

出所：表 1 (c)

②　相加平均

表 2(c)　2 時点にかんする要因分解(相加平均)

全年齢階級の世帯別所得	(百万円)	年齢階級 第 1	第 2	第 3
$\bar{p}_j$		0. 2333	0. 5417	0. 2250
Δx_j		0. 0000	−0. 4286	−1. 1667
$\Delta \bar{x}$	−0. 0333			
$\Delta \bar{x} - \Delta \bar{x}_j$		−0. 0333	0. 3952	1. 1333
$\bar{\bar{x}}$	4. 6833			
Δp_j		−0. 1333	0. 0833	0. 0500
年齢階級別寄与分*		−0. 6322	0. 3722	0. 2267
級 内 変 動	−0. 4946	0. 0000	−0. 2321	−0. 2625
級 間 変 動	0. 4613	−0. 0078	0. 2141	0. 2550
人口動態効果	0. 0000	−0. 6244	0. 3903	0. 2342
合　　　計	−0. 0333	−0. 6322	0. 3722	0. 2267

(*)(比較時点の年齢階級別寄与分)−(基準時点の年齢階級別寄与分)[表 2(a)(b)による]

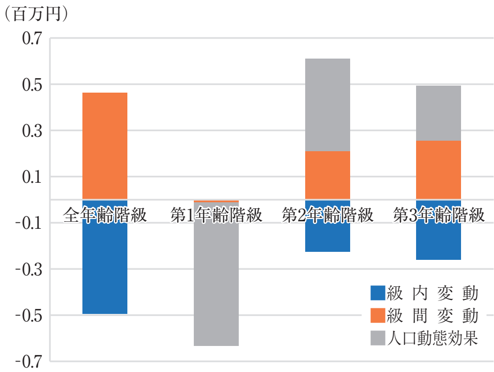

図 2 (c)　2 時点における要因分解図（相加平均）

出所：表 2 (c)

③　標準偏差

表 3(c)　2 時点にかんする要因分解(標準偏差)

全年齢階級の世帯別所得	(百万円)	年齢階級 第 1	第 2	第 3
$\bar{p}_j$		0. 2333	0. 5417	0. 2250
$\Delta \sigma_j$		0. 1835	0. 0747	−0. 8003
$\Delta \sigma$	−0. 2613			
$\Delta \sigma - \Delta \sigma_j$		−0. 4448	−0. 3360	0. 5390
$\bar{\sigma}$	2. 5915			
Δp_j		−0. 1333	0. 0833	0. 0500
年齢階級別寄与分*		−0. 4065	0. 0744	0. 0708
級 内 変 動	−0. 0968	0. 0428	0. 0405	−0. 1801
級 間 変 動	−0. 1645	−0. 1038	−0. 1820	0. 1213
人口動態効果	0. 0000	−0. 3455	0. 2160	0. 1296
合　　　計	−0. 2613	−0. 4065	0. 0744	0. 0708

(*)(比較時点の年齢階級別寄与分)−(基準時点の年齢階級別寄与分)[表 3(a)(b)による]

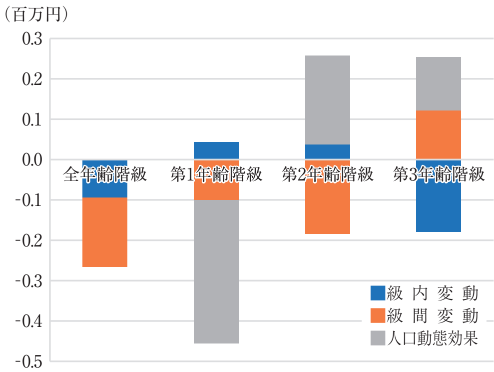

図 3 (c)　2 時点における要因分解図（標準偏差）

出所：表 3 (c)

④　分散

表４(c)　２時点にかんする要因分解(分散)

全年齢階級の世帯別所得	（百万円）	年齢階級		
		第１	第２	第３
$\bar{p}_j$		0.2333	0.5417	0.2250
$\Delta\sigma_j^2$		0.3333	0.3592	−3.3611
$\Delta\sigma^2$	−1.3544			
$\Delta\sigma^2-\Delta\sigma_j^2$		−1.6878	−1.7136	2.0067
$\overline{\sigma^2}$	6.7328			
Δp_j		−0.1333	0.0833	0.0500
年齢階級別寄与分*		−1.2137	−0.1726	0.0319
級 内 変 動	−0.4839	0.0778	0.1946	−0.7563
級 間 変 動	−0.8705	−0.3938	−0.9282	0.4515
人口動態効果	0.0000	−0.8977	0.5611	0.3366
合　　計	−1.3544	−1.2137	−0.1726	0.0319

(*)(比較時点の年齢階級別寄与分)－(基準時点の年齢階級別寄与分)[表４(a)(b)による]

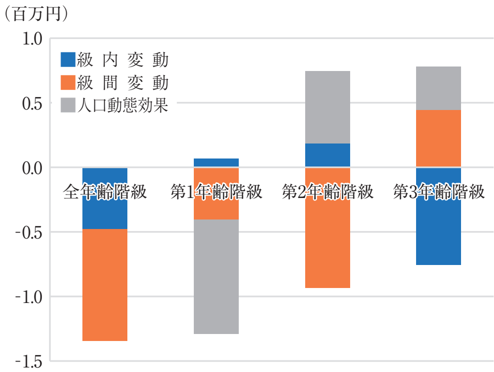

図４(c)　２時点における要因分解図（分散）
出所：表４(c)

⑤　対数分散

表５(c)　２時点にかんする要因分解(対数分散)

全年齢階級の世帯別所得	（百万円）	年齢階級		
		第１	第２	第３
$\bar{p}_j$		0.2333	0.5417	0.2250
ΔLV_j		0.0181	0.0403	−0.0018
ΔLV	0.0073			
$\Delta LV-\Delta LV_j$		−0.0108	−0.0330	0.0091
$\overline{LV}$	0.0949			
Δp_j		−0.1333	0.0833	0.0500
年齢階級別寄与分*		−0.0109	0.0119	0.0064
級 内 変 動	0.0257	0.0042	0.0218	−0.0004
級 間 変 動	−0.0183	−0.0025	−0.0179	0.0020
人口動態効果	0.0000	−0.0127	0.0079	0.0047
合　　計	0.0073	−0.0109	0.0119	0.0064

(*)(比較時点の年齢階級別寄与分)－(基準時点の年齢階級別寄与分)[表５(a)(b)による]

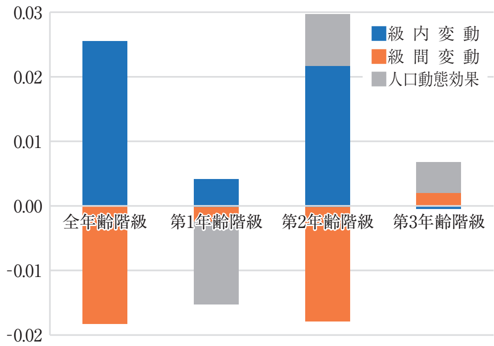

図５(c)　２時点における要因分解図（対数分散）
(注)縦軸の値は原系列（単位は百万円）の対数変換値である。
出所：表５(c)

⑥　変動係数

表６(c)　２時点にかんする要因分解(変動係数)

全年齢階級の世帯別所得	（百万円）	年齢階級		
		第１	第２	第３
$\bar{p}_j$		0.2333	0.5417	0.2250
ΔCV_j		0.0918	0.0437	−0.0623
ΔCV	−0.0519			
$\Delta CV-\Delta CV_j$		−0.1436	−0.0956	0.0105
$\overline{CV}$	0.5532			
Δp_j		−0.1333	0.0833	0.0500
年齢階級別寄与分*		−0.0859	0.0180	0.0160
級 内 変 動	0.0311	0.0214	0.0237	−0.0140
級 間 変 動	−0.0829	−0.0335	−0.0518	0.0024
人口動態効果	0.0000	−0.0738	0.0461	0.0277
合　　計	−0.0519	−0.0859	0.0180	0.0160

(*)(比較時点の年齢階級別寄与分)－(基準時点の年齢階級別寄与分)[表６(a)(b)による]

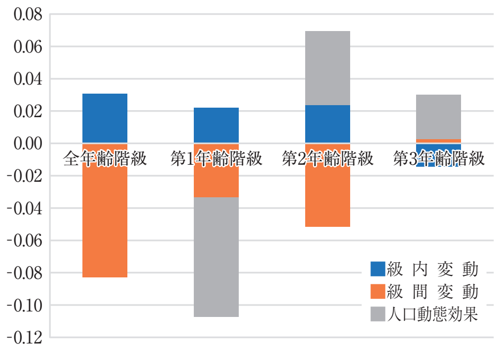

図６(c)　２時点における要因分解図（変動係数）
(注)縦軸の値は無次元量である。
出所：表６(c)

⑦　ジニ係数

表7(c)　2時点にかんする要因分解(ジニ係数)

	全年齢階級の世帯別所得（百万円）	年齢階級		
		第1	第2	第3
$\bar{p}_j$		0.2333	0.5417	0.2250
ΔG_j		0.1667	0.0562	−0.1469
ΔG	0.0348			
$\Delta G-\Delta G_j$		−0.1319	−0.0214	0.1817
$\overline{G}$	0.3459			
Δp_j		−0.1333	0.0833	0.0500
年齢階級別寄与分*		−0.0380	0.0477	0.0251
級内変動	0.0363	0.0389	0.0304	−0.0330
級間変動	−0.0015	−0.0308	−0.0116	0.0409
人口動態効果	0.0000	−0.0461	0.0288	0.0173
合計	0.0348	−0.0380	0.0477	0.0251

(*)(比較時点の年齢階級別寄与分)−(基準時点の年齢階級別寄与分)[表7(a)(b)による]

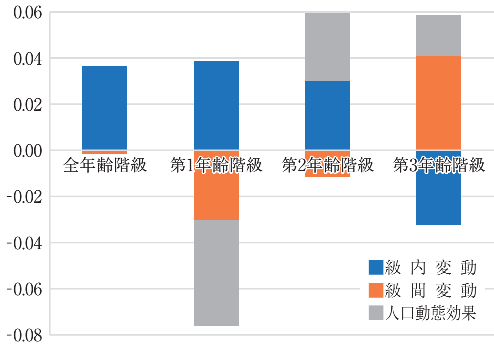

図7(c)　2時点における要因分解図（ジニ係数）
(注)縦軸の値は無次元量である。
出所：表7(c)

⑧　平均差

表8(c)　2時点にかんする要因分解(平均差)

	全年齢階級の世帯別所得（百万円）	年齢階級		
		第1	第2	第3
$\bar{p}_j$		0.2333	0.5417	0.2250
ΔMD_j		0.6667	0.3810	−2.3333
ΔMD	0.3030			
$\Delta MD-\Delta MD_j$		−0.3637	−0.0780	2.6363
$\overline{MD}$	3.2390			
Δp_j		−0.1333	0.0833	0.0500
年齢階級別寄与分*		−0.3612	0.4340	0.2301
級内変動	−0.1631	0.1556	0.2063	−0.5250
級間変動	0.4661	−0.0849	−0.0422	0.5932
人口動態効果	0.0000	−0.4319	0.2699	0.1619
合計	0.3030	−0.3612	0.4340	0.2301

(*)(比較時点の年齢階級別寄与分)−(基準時点の年齢階級別寄与分)[表8(a)(b)による]

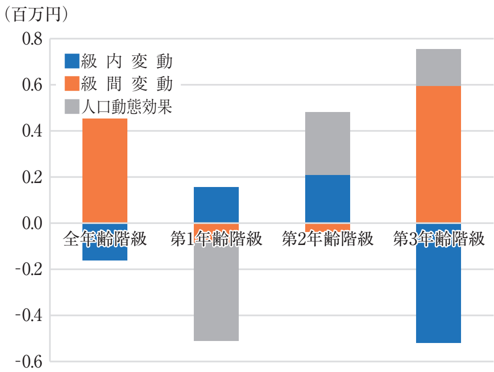

図8(c)　2時点における要因分解図（平均差）
出所：表8(c)

む　す　び

平均対数偏差，相加平均，標準偏差，分散，対数分散だけでなく，変動係数，ジニ係数，平均差もまた，所得分布の統計解析に用いられている。本稿では，これらの統計量の要因分解にかんする一般式を提示し，その後，上記の統計量の要因分解式を，一般化された要因分解式の系として誘導した。そして，簡単な仮設的数値例にたいして，様々な要因分解式を適用し，一般式の応用可能性を具体的に示した。所得分布の統計解析は単一指標によるよりも，多指標によるほうが，認識の深まりを期待することができるからである。

ただし，要因分解の一般式は，取り上げた8つの統計量（平均対数偏差，相加平均，標準偏差，分散，対数分散，変動係数，ジニ係数，平均差）にかんする一般式に止まるのか，あるいは本稿で取り上げた統計量の他にも一般式の系をなす統計量が存在するのかということについての方法論的検討が残された。それだけでなく，様々な統計量を用いた所得分

布にかんする具体的な多指標的統計解析による実証分析もまた，今後の課題として残された。

（2018年10月9日提出）

付表

付表 1 (a)　ジニ係数の計算表(基準時点，全年齢階級)

世帯別所得	項数	値(百万円)	値の小計	項数の相対度数	値の相対度数	項数の累積相対度数($\mathfrak{p}$)	値の累積相対度数($\mathfrak{q}$)	$\mathfrak{p}-\mathfrak{q}$
1	1	1	1	0.1000	0.0213	0.1000	0.0213	0.0787
2 2	2	2	4	0.2000	0.0851	0.3000	0.1064	0.1936
3 3	2	3	6	0.2000	0.1277	0.5000	0.2340	0.2660
5	1	5	5	0.1000	0.1064	0.6000	0.3404	0.2596
7 7	2	7	14	0.2000	0.2979	0.8000	0.6383	0.1617
8	1	8	8	0.1000	0.1702	0.9000	0.8085	0.0915
9	1	9	9	0.1000	0.1915			
合　計	10		47			3.2000		1.0511
							ジニ係数(G)	0.3285

付表 1 (b)　ジニ係数の計算表(基準時点，第 1 年齢階級)

世帯別所得	項数	値(百万円)	値の小計	項数の相対度数	値の相対度数	項数の累積相対度数($\mathfrak{p}$)	値の累積相対度数($\mathfrak{q}$)	$\mathfrak{p}-\mathfrak{q}$
1	1	1	1	0.3333	0.1667	0.3333	0.1667	0.1667
2	1	2	2	0.3333	0.3333	0.6667	0.5000	0.1667
3	1	3	3	0.3333	0.5000			
合　計	3		6			1.0000		0.3333
							ジニ係数(G)	0.3333

付表 1 (c)　ジニ係数の計算表(基準時点，第 2 年齢階級)

世帯別所得	項数	値(百万円)	値の小計	項数の相対度数	値の相対度数	項数の累積相対度数($\mathfrak{p}$)	値の累積相対度数($\mathfrak{q}$)	$\mathfrak{p}-\mathfrak{q}$
2	1	2	2	0.2000	0.0667	0.2000	0.0667	0.1333
5	1	5	5	0.2000	0.1667	0.4000	0.2333	0.1666
7 7	2	7	14	0.4000	0.4667	0.8000	0.7000	0.1000
9	1	9	9	0.2000	0.3000			
合　計	5		30			1.4000		0.4000
							ジニ係数(G)	0.2857

付表 1 (d)　ジニ係数の計算表(基準時点，第 3 年齢階級)

世帯別所得	項数	値(百万円)	値の小計	項数の相対度数	値の相対度数	項数の累積相対度数($\mathfrak{p}$)	値の累積相対度数($\mathfrak{q}$)	$\mathfrak{p}-\mathfrak{q}$
3	1	3	3	0.5000	0.2727	0.5000	0.2727	0.2273
8	1	8	8	0.5000	0.7273			
合　計	2		11			0.5000		0.2273
							ジニ係数(G)	0.4545

付表2(a)　ジニ係数の計算表(比較時点，全年齢階級)

世帯別所得	項数	値(百万円)	値の小計	項数の相対度数	値の相対度数	項数の累積相対度数($\mathfrak{p}$)	値の累積相対度数($\mathfrak{q}$)	$\mathfrak{p}-\mathfrak{q}$
1 1	2	1	2	0.1667	0.0357	0.1667	0.0357	0.1310
2	1	2	2	0.0833	0.0357	0.2500	0.0714	0.1786
3 3	2	3	6	0.1667	0.1071	0.4167	0.1786	0.2381
5	1	5	5	0.0833	0.0893	0.5000	0.2679	0.2321
6 6 6	3	6	18	0.2500	0.3214	0.7500	0.5893	0.1607
7	1	7	7	0.0833	0.1250	0.8333	0.7143	0.1190
8 8	2	8	16	0.1667	0.2857			
合　計	12		56			2.9167		1.0595
							ジニ係数(G)	0.3633

付表2(b)　ジニ係数の計算表(比較時点，第1年齢階級)

世帯別所得	項数	値(百万円)	値の小計	項数の相対度数	値の相対度数	項数の累積相対度数($\mathfrak{p}$)	値の累積相対度数($\mathfrak{q}$)	$\mathfrak{p}-\mathfrak{q}$
1	1	1	1	0.5000	0.2500	0.5000	0.2500	0.2500
3	1	3	3	0.5000	0.7500			
合　計	2		4			0.5000		0.2500
							ジニ係数(G)	0.5000

付表2(c)　ジニ係数の計算表(比較時点，第2年齢階級)

世帯別所得	項数	値(百万円)	値の小計	項数の相対度数	値の相対度数	項数の累積相対度数($\mathfrak{p}$)	値の累積相対度数($\mathfrak{q}$)	$\mathfrak{p}-\mathfrak{q}$
1	1	1	1	0.1429	0.0256	0.1429	0.0256	0.1172
3	1	3	3	0.1429	0.0769	0.2857	0.1026	0.1832
6 6	2	6	12	0.2857	0.3077	0.5714	0.4103	0.1612
7	1	7	7	0.1429	0.1795	0.7143	0.5897	0.1245
8 8	2	8	16	0.2857	0.4103			
合　計	7		39			1.7143		0.5861
							ジニ係数(G)	0.3419

付表2(d)　ジニ係数の計算表(比較時点，第3年齢階級)

世帯別所得	項数	値(百万円)	値の小計	項数の相対度数	値の相対度数	項数の累積相対度数($\mathfrak{p}$)	値の累積相対度数($\mathfrak{q}$)	$\mathfrak{p}-\mathfrak{q}$
2	1	2	2	0.3333	0.1538	0.3333	0.1538	0.1795
5	1	5	5	0.3333	0.3846	0.6667	0.5385	0.1282
6	1	6	6	0.3333	0.4615			
合　計	3		13			1.0000		0.3077
							ジニ係数(G)	0.3077