タイトル	変動係数，ジニ係数，平均差の要因分解
著者	木村，和範；KIMURA，Kazunori
引用	季刊北海学園大学経済論集，66(3)：27-35
発行日	2018-12-30

《論説》

変動係数，ジニ係数，平均差の要因分解

木　村　和　範*

〈要旨〉

所得分布の統計解析で使用される変動係数（CV），ジニ係数（G），平均差（MD）の要因分解式を次のように誘導した。

$$\begin{cases} CV = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot CV_j}^{\text{級内変動}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j (CV - CV_j)}^{\text{級間変動}} \\ \Delta CV = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \overline{p}_j \cdot \Delta CV_j}^{\text{級内変動}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \overline{p}_j (\Delta CV - \Delta CV_j)}^{\text{級間変動}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \overline{CV} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} G = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot G_j}^{\text{級内変動}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j (G - G_j)}^{\text{級間変動}} \\ \Delta G = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \overline{p}_j \cdot \Delta G_j}^{\text{級内変動}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \overline{p}_j (\Delta G - \Delta G_j)}^{\text{級間変動}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \overline{G} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} MD = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot MD_j}^{\text{級内変動}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j (MD - MD_j)}^{\text{級間変動}} \\ \Delta MD = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \overline{p}_j \cdot \Delta MD_j}^{\text{級内変動}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \overline{p}_j (\Delta MD - \Delta MD_j)}^{\text{級間変動}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \overline{MD} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果}} \end{cases}$$

〈Abstract〉

The author decomposes such statistics as coefficient of variation (hereafter CV), Gini's coefficient (hereafter G) and mean difference (hereafter MD):

$$\begin{cases} CV = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot CV_j}^{\text{intra-variation}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j (CV - CV_j)}^{\text{inter-variation}} \\ \Delta CV = \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \overline{p}_j \cdot \Delta CV_j}^{\text{intra-variation}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \overline{p}_j (\Delta CV - \Delta CV_j)}^{\text{inter-variation}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \overline{CV} \cdot \Delta p_j}^{\text{effect of population ageing}} \end{cases}$$

*　北海学園大学名誉教授，北海学園大学経済学部客員教授

$$\begin{cases} G=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot G_j}^{\text{intra}-\text{variation}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j(G-G_j)}^{\text{inter}-\text{variation}} \\ \Delta G=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j\cdot\Delta G_j}^{\text{intra}-\text{variation}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j(\Delta G-\Delta G_j)}^{\text{inter}-\text{variation}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{G}\cdot\Delta p_j}^{\text{effect of population ageing}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} MD=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot MD_j}^{\text{intra}-\text{variation}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j(MD-MD_j)}^{\text{inter}-\text{variation}} \\ \Delta MD=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j\cdot\Delta MD_j}^{\text{intra}-\text{variation}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j(\Delta MD-\Delta MD_j)}^{\text{inter}-\text{variation}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{MD}\cdot\Delta p_j}^{\text{effect of population ageing}} \end{cases}$$

〈叙述の順序〉

は じ め に

旧聞に属するが，『日本経済新聞』(2012 年 2 月 19 日付け）は「県民所得，平均 279 万円　沖縄が最下位脱出　　09 年度，地域間格差は最小」という記事を掲載している。この記事では，地域間格差の指標として変動係数（coefficient of variation：CV）が使用されている。地域間格差の分析には，変動係数だけでなく，ジニ係数（Gini's coefficient：G）も使用されることがある[(1)]。ジニ係数は，所得格差をはじめとする様々な不平等度の計測指標として著名であることは他言を要さない。

このような格差分析の現実を踏まえて，本稿では，変動係数とジニ係数について，その要因分解式を誘導する。なお，ジニ係数は，それを単独的に使用するよりも，平均差（mean difference：MD）と組み合わせるのが望ましい[(2)]。このことから，本稿では，平均差の要因分解も試みる。そのために，相加平均，標準偏差，平均対数偏差，分散，対

(1)　この記事は，以下でも閲覧できる。https://www.nikkei.com/article/DGXNASFS29028_Z20C12A2EE1000/, accessed on Oct. 21, 2018. なお，ジニ係数や変動係数による地域間格差分析の脆弱性については，豊田哲也「日本における地域間格差と人口移動の変化―世帯規模と年齢構成を考慮した世帯所得の推定を用いて―」『経済地理学年報』第 59 号，2013 年，7 頁参照。

(2)　木村和範『ジニ係数の形成』北海道大学出版会，2008 年［木村（2008)]，終章。

数分散にかんする要因分解式の誘導法[3]を応用する。

以下では，所得を x_i とする世帯の総数を N とする。これが m 個の年齢階級にグループ分けされていると想定し，一般に，第 j 年齢階級に落ちる世帯数を k_j とする。年齢階級別世帯数を合算すると，全年齢階級の世帯数になるから，

$$N=\sum_{j=1}^{m}k_j$$

である。また，第 j 年齢階級の世帯シェアを p_j とおけば

$$p_j=\frac{k_j}{N}$$

である。なお，基準時点を 0，比較時点を t で表し，それらを文字の左上のサフィックスとして，時点を識別する。たとえば，基準時点の世帯総数を ${}^0N$ と表し，比較時点については ${}^tN$ と表す。

1．変動係数

変動係数（CV）は次式で定義される無次元量（dimensionless quantity）（無名数（unitless number）ともいう。）である。

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}$$

ここに，$\bar{x}$ は x_i の分布の相加平均，
σ は x_i の分布の標準偏差

以下，全年齢階級の変動係数を CV，第 j 年齢階級の変動係数を次式で定義される CV_j とする。

$$CV_j=\frac{\sigma_j}{\bar{x}_j}$$

(3)　木村和範「所得格差の変動にたいする人口動態効果の計測」『経済論集』（北海学園大学）第66巻第1号，2018年6月，および同「人口構成の変化と所得分布」同上，第66巻第2号，2018年9月。

⑴　任意の1時点における変動係数（CV）の要因分解

$$\begin{aligned}
&CV\\
&=CV\times\frac{1}{N}\times N\\
&=CV\times\frac{1}{N}\times\sum_{j=1}^{m}k_j\\
&=CV\times\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}\\
&=CV\times\sum_{j=1}^{m}p_j\\
&=\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot CV+\overbrace{\left(\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot CV_j-\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot CV_j\right)}^{\text{ゼロを加算}}\\
&=\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot CV_j+\left(\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot CV-\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot CV_j\right)\\
&=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot CV_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j(CV-CV_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}}
\end{aligned}\tag{1-1}$$

全年齢階級の変動係数（CV）は，年齢階級別寄与分の総和であるから，(1-1)式により全年齢階級の CV にたいする第 j 年齢階級の寄与分（${}^{CV}C_j$）は次式であたえられる。

$${}^{CV}C_j=\overbrace{p_j\cdot CV_j}^{\text{級内変動(第}j\text{年齢階級)}}+\overbrace{p_j(CV-CV_j)}^{\text{級間変動(第}j\text{年齢階級)}}\tag{1-2}$$

⑵　2時点間における変動係数の差（ΔCV）の要因分解

$$\begin{aligned}
&\Delta CV\\
&={}^tCV-{}^0CV\\
&=\overbrace{\left\{\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^tp_j\cdot{}^tCV_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^tp_j({}^tCV-{}^tCV_j)}^{\text{級間変動}}\right\}}^{\text{比較時点(全年齢階級)[(1-1)式による]}}\\
&\quad-\overbrace{\left\{\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^0p_j\cdot{}^0CV_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^0p_j({}^0CV-{}^0CV_j)}^{\text{級間変動}}\right\}}^{\text{基準時点(全年齢階級)[(1-1)式による]}}\\
&=\overbrace{\left(\sum_{j=1}^{m}{}^tp_j\cdot{}^tCV_j-\sum_{j=1}^{m}{}^0p_j\cdot{}^0CV_j\right)}^{\text{級内変動の差(全年齢階級)}}
\end{aligned}$$

$$+\overbrace{\left\{\sum_{j=1}^{m}{}^{t}p_j({}^{t}CV-{}^{t}CV_j)-\sum_{j=1}^{m}{}^{0}p_j({}^{0}CV-{}^{0}CV_j)\right\}}^{\text{級間変動の差（全年齢階級）}} \tag{1-3}$$

全年齢階級にかんする変動係数の変化（$\varDelta CV$）を示す(1-3)式から，$\varDelta CV$ にたいする第 j 年齢階級の寄与分（${}^{\varDelta CV}C_j$）を抽出すると，次式を得る。

$$\begin{aligned}
&{}^{\varDelta CV}C_j\\
&=\overbrace{({}^{t}p_j\cdot{}^{t}CV_j-{}^{0}p_j\cdot{}^{0}CV_j)}^{\text{級内変動の差（第 }j\text{ 年齢階級）（第 1 項）}}\\
&\quad+\overbrace{\{{}^{t}p_j({}^{t}CV-{}^{t}CV_j)-{}^{0}p_j({}^{0}CV-{}^{0}CV_j)\}}^{\text{級間変動の差（第 }j\text{ 年齢階級）（第 2 項）}}
\end{aligned} \tag{1-4}$$

(1-4)式右辺の第 1 項と第 2 項は，それぞれその形式において次の恒等式

$$\begin{aligned}
&a_1b_1-a_2b_2\\
&\equiv\frac{1}{2}(a_1+a_2)(b_1-b_2)+\frac{1}{2}(a_1-a_2)(b_1+b_2)
\end{aligned} \tag{1-5}$$

の左辺と同じであるから，(1-5)式によって(1-4)式を整理することができる。

$$\begin{aligned}
&{}^{\varDelta CV}C_j\\
&=\overbrace{({}^{t}p_j\cdot{}^{t}CV_j-{}^{0}p_j\cdot{}^{0}CV_j)}^{\text{級内変動の差（第 }j\text{ 年齢階級）（第 1 項）}}\\
&\quad+\overbrace{\{{}^{t}p_j({}^{t}CV-{}^{t}CV_j)-{}^{0}p_j({}^{0}CV-{}^{0}CV_j)\}}^{\text{級間変動の差（第 }j\text{ 年齢階級）（第 2 項）}}
\end{aligned} \tag{1-4［再掲］}$$

$$\begin{aligned}
&=\overbrace{\left\{\frac{1}{2}({}^{t}p_j+{}^{0}p_j)({}^{t}CV_j-{}^{0}CV_j)\right\}}^{\text{(1-4)式第 1 項（その 1 ）}}\\
&\quad+\overbrace{\left\{\frac{1}{2}({}^{t}p_j-{}^{0}p_j)({}^{t}CV_j+{}^{0}CV_j)\right\}}^{\text{(1-4)式第 1 項（その 2 ）}}\\
&\quad+\overbrace{\left[\frac{1}{2}({}^{t}p_j+{}^{0}p_j)\{({}^{t}CV-{}^{t}CV_j)-({}^{0}CV-{}^{0}CV_j)\}\right]}^{\text{(1-4)式第 2 項（その 1 ）}}\\
&\quad+\overbrace{\left[\frac{1}{2}({}^{t}p_j-{}^{0}p_j)\{({}^{t}CV-{}^{t}CV_j)+({}^{0}CV-{}^{0}CV_j)\}\right]}^{\text{(1-4)式第 2 項（その 2 ）}}\\
&=\frac{1}{2}({}^{t}p_j+{}^{0}p_j)({}^{t}CV_j-{}^{0}CV_j)\\
&\quad+\frac{1}{2}({}^{t}p_j+{}^{0}p_j)\{({}^{t}CV-{}^{t}CV_j)-({}^{0}CV-{}^{0}CV_j)\}\\
&\quad+\frac{1}{2}({}^{t}p_j-{}^{0}p_j)[({}^{t}CV_j+{}^{0}CV_j)+\{({}^{t}CV-{}^{t}CV_j)+({}^{0}CV-{}^{0}CV_j)\}]\\
&=\frac{1}{2}({}^{t}p_j+{}^{0}p_j)({}^{t}CV_j-{}^{0}CV_j)\\
&\quad+\frac{1}{2}({}^{t}p_j+{}^{0}p_j)\{({}^{t}CV-{}^{0}CV)-({}^{t}CV_j-{}^{0}CV_j)\}\\
&\quad+\frac{1}{2}({}^{t}p_j-{}^{0}p_j)({}^{t}CV+{}^{0}CV)\\
&=\frac{1}{2}({}^{t}p_j+{}^{0}p_j)({}^{t}CV_j-{}^{0}CV_j)\\
&\quad+\frac{1}{2}({}^{t}p_j+{}^{0}p_j)\{({}^{t}CV-{}^{0}CV)-({}^{t}CV_j-{}^{0}CV_j)\}\\
&\quad+\frac{1}{2}({}^{t}CV+{}^{0}CV)({}^{t}p_j-{}^{0}p_j)
\end{aligned} \tag{1-6}$$

ここで，次のようにおく。

$$\left\{\begin{aligned}
\bar{p}_j&=\frac{1}{2}({}^{0}p_j+{}^{t}p_j)\\
\varDelta p_j&={}^{t}p_j-{}^{0}p_j\\
\varDelta CV&={}^{t}CV-{}^{0}CV\\
\varDelta CV_j&={}^{t}CV_j-{}^{0}CV_j\\
\overline{CV}&=\frac{1}{2}({}^{t}CV+{}^{0}CV)
\end{aligned}\right. \tag{1-7}$$

(1-7)式を(1-6)式に代入すると，全年齢階級にかんする変動係数の変化（$\varDelta CV$）にたいする第 j 年齢階級の寄与分（${}^{\varDelta CV}C_j$）は，以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&{}^{\varDelta CV}C_j\\
&=\overbrace{\bar{p}_j\cdot\varDelta CV_j}^{\text{級内変動（第 }j\text{ 年齢階級）}}\\
&\quad+\overbrace{\bar{p}_j(\varDelta CV-\varDelta CV_j)}^{\text{級間変動（第 }j\text{ 年齢階級）}}\\
&\quad+\overbrace{\overline{CV}\cdot\varDelta p_j}^{\text{人口動態効果（第 }j\text{ 年齢階級）}}
\end{aligned} \tag{1-8}$$

全年齢階級の変動係数の差（$\varDelta CV$）は年齢階級別寄与分（${}^{\varDelta CV}C_j$）の総和である。し

たがって，以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\Delta CV\\
&= \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\cdot\Delta CV_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}}\\
&\quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j(\Delta CV-\Delta CV_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}}\\
&\quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{CV}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}} \qquad (1\text{-}9)
\end{aligned}
$$

2. ジ ニ 係 数

ジニ係数についても，前項と同様の仕方・様式によって，要因分解式を誘導することができる(4)。

変動係数と同様に無次元量をあたえるジニ係数(G)については，様々な定義式が誘導されている(5)。ここでは，その明解性に鑑みて，ジニによるすべての定義式の劈頭にある(6)

$$
G=\frac{\sum_{i=1}^{N-1}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{q}_i)}{\sum_{i=1}^{N-1}\mathfrak{p}_i}
$$

ここに，$\mathfrak{p}$ は世帯の累積相対度数，$\mathfrak{q}$ は世帯所得の累積相対度数

を掲げる(7)。

全年齢階級のジニ係数を G，第 j 年齢階級のジニ係数を次式で定義される G_j とする。

$$
G_j=\frac{\sum_{i=1}^{k_j-1}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{q}_i)}{\sum_{i=1}^{k_j-1}\mathfrak{p}_i}
$$

(1) 任意の1時点におけるジニ係数（G）の要因分解

$$
\begin{aligned}
&G\\
&=G\times\frac{1}{N}\times N\\
&=G\times\frac{1}{N}\times\sum_{j=1}^{m}k_j\\
&=G\times\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}\\
&=G\times\sum_{j=1}^{m}p_j\\
&=\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot G+\overbrace{\left(\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot G_j-\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot G_j\right)}^{\text{ゼロを加算}}\\
&=\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot G_j+\left(\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot G-\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot G_j\right)\\
&=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot G_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j(G-G_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} \qquad (2\text{-}1)
\end{aligned}
$$

(4)　単一時点におけるジニ係数について，ラオは要因分解式として

$$
G=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{{}^{j}A_n}{A_n}\cdot{}^{j}G\right)
$$

ここに，A_n は所得総額，${}^{j}A_n$ は所得総額を構成する第 j 番目の要因の所得，${}^{j}G$ は第 j 要因にかんするジニ係数（これを「擬ジニ係数」という）

を誘導した（V. M. Rao, “Two Decomposition of Concentration Ratio,” *JRSS*, Ser. A, Vol.132, 1969)。関彌三郎『寄与度・寄与率—増加率の寄与度分解法—』産業統計研究社，1992 年（第 7 章）は，これを拡張して，2時点間のジニ係数の差分を要因分解した。

本稿では，ラオおよび関とは異なり，単一時点については級内変動と級間変動の2要因に分解し，2時点間については級内変動，級間変動，人口動態効果の3要因に分解する。

(5)　木村（2008)，第6章，第7章，第8章。

(6)　Gini, Corrado, “Sulla misura dellla concentrazione e delle variabilità dei caratteri,” *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, Tomo LXXIII, Parte seconda, Anno accademico 1913-1914, p.1207.

(7)　この定義式で和の末項が（$N-1$）になっているのは，最後の世帯所得 x_N までの $\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ については $\mathfrak{p}_N=\mathfrak{q}_N=1$ であること（$\mathfrak{p}_N-\mathfrak{q}_N=0$)，すなわち

$$
\frac{\mathfrak{p}_N-\mathfrak{q}_N}{\mathfrak{p}_N}=0
$$

となることによる（木村（2008：184 頁))。

全年齢階級のジニ係数（G）は，年齢階級別寄与分の総和であるから，Gにたいする第j年齢階級の寄与分（${}^{G}C_j$）は次式であたえられる。

$$
{}^{G}C_j = \overbrace{p_j\cdot G_j}^{\text{級内変動(第}\,j\,\text{年齢階級)}} \quad + \quad \overbrace{p_j(G-G_j)}^{\text{級間変動(第}\,j\,\text{年齢階級)}} \tag{2-2}
$$

⑵　2時点間におけるジニ係数の差（ΔG）の要因分解

$$
\begin{aligned}
&\Delta G \\
&={}^{t}G-{}^{0}G \\
&=\overbrace{\left\{\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^{t}p_j\cdot{}^{t}G_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^{t}p_j({}^{t}G-{}^{t}G_j)}^{\text{級間変動}}\right\}}^{\text{比較時点(全年齢階級)[(2-1)式による]}} \\
&\quad-\overbrace{\left\{\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^{0}p_j\cdot{}^{0}G_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^{0}p_j({}^{0}G-{}^{0}G_j)}^{\text{級間変動}}\right\}}^{\text{基準時点(全年齢階級)[(2-1)式による]}} \\
&=\overbrace{\left(\sum_{j=1}^{m}{}^{t}p_j\cdot{}^{t}G_j-\sum_{j=1}^{m}{}^{0}p_j\cdot{}^{0}G_j\right)}^{\text{級内変動の差(全年齢階級)}} \\
&\quad+\overbrace{\left\{\sum_{j=1}^{m}{}^{t}p_j({}^{t}G-{}^{t}G_j)-\sum_{j=1}^{m}{}^{0}p_j({}^{0}G-{}^{0}G_j)\right\}}^{\text{級間変動の差(全年齢階級)}}
\end{aligned} \tag{2-3}
$$

全年齢階級にかんするジニ係数の変化（ΔG）を示す(2-3)式から，ΔGにたいする第j年齢階級の寄与分（${}^{\Delta G}C_j$）を抽出すると，次式を得る。

$$
\begin{aligned}
&{}^{\Delta G}C_j \\
&=\overbrace{({}^{t}p_j\cdot{}^{t}G_j-{}^{0}p_j\cdot{}^{0}G_j)}^{\text{級内変動の差(第}\,j\,\text{年齢階級)(第1項)}} \\
&\quad+\overbrace{\{{}^{t}p_j({}^{t}G-{}^{t}G_j)-{}^{0}p_j({}^{0}G-{}^{0}G_j)\}}^{\text{級間変動の差(第}\,j\,\text{年齢階級)(第2項)}}
\end{aligned} \tag{2-4}
$$

変動係数の要因分解と同様に，恒等式

$$
\begin{aligned}
&a_1b_1-a_2b_2 \\
&\equiv\frac{1}{2}(a_1+a_2)(b_1-b_2)+\frac{1}{2}(a_1-a_2)(b_1+b_2)
\end{aligned} \tag{1-5}
$$

［再掲］

により，(2-4)式を整理する。

$$
\begin{aligned}
&{}^{\Delta G}C_j \\
&=\overbrace{({}^{t}p_j\cdot{}^{t}G_j-{}^{0}p_j\cdot{}^{0}G_j)}^{\text{級内変動の差(第}\,j\,\text{年齢階級)(第1項)}} \\
&\quad+\overbrace{\{{}^{t}p_j({}^{t}G-{}^{t}G_j)-{}^{0}p_j({}^{0}G-{}^{0}G_j)\}}^{\text{級間変動の差(第}\,j\,\text{年齢階級)(第2項)}}
\end{aligned} \tag{2-4}
$$

［再掲］

$$
\begin{aligned}
&=\overbrace{\left\{\frac{1}{2}({}^{t}p_j+{}^{0}p_j)({}^{t}G_j-{}^{0}G_j)\right\}}^{\text{(2-4)式第1項(その1)}} \\
&\quad+\overbrace{\left\{\frac{1}{2}({}^{t}p_j-{}^{0}p_j)({}^{t}G_j+{}^{0}G_j)\right\}}^{\text{(2-4)式第1項(その2)}} \\
&\quad+\overbrace{\left[\frac{1}{2}({}^{t}p_j+{}^{0}p_j)\{({}^{t}G-{}^{t}G_j)-({}^{0}G-{}^{0}G_j)\}\right]}^{\text{(2-4)式第2項(その1)}} \\
&\quad+\overbrace{\left[\frac{1}{2}({}^{t}p_j-{}^{0}p_j)\{({}^{t}G-{}^{t}G_j)+({}^{0}G-{}^{0}G_j)\}\right]}^{\text{(2-4)式第2項(その2)}} \\
&=\frac{1}{2}({}^{t}p_j+{}^{0}p_j)({}^{t}G_j-{}^{0}G_j) \\
&\quad+\frac{1}{2}({}^{t}p_j+{}^{0}p_j)\{({}^{t}G-{}^{t}G_j)-({}^{0}G-{}^{0}G_j)\} \\
&\quad+\frac{1}{2}({}^{t}p_j-{}^{0}p_j)[({}^{t}G_j+{}^{0}G_j)+\{({}^{t}G-{}^{t}G_j)+({}^{0}G-{}^{0}G_j)\}] \\
&=\frac{1}{2}({}^{t}p_j+{}^{0}p_j)({}^{t}G_j-{}^{0}G_j) \\
&\quad+\frac{1}{2}({}^{t}p_j+{}^{0}p_j)\{({}^{t}G-{}^{0}G)-({}^{t}G_j-{}^{0}G_j)\} \\
&\quad+\frac{1}{2}({}^{t}p_j-{}^{0}p_j)({}^{t}G+{}^{0}G) \\
&=\frac{1}{2}({}^{t}p_j+{}^{0}p_j)({}^{t}G_j-{}^{0}G_j) \\
&\quad+\frac{1}{2}({}^{t}p_j+{}^{0}p_j)\{({}^{t}G-{}^{0}G)-({}^{t}G_j-{}^{0}G_j)\} \\
&\quad+\frac{1}{2}({}^{t}G+{}^{0}G)({}^{t}p_j-{}^{0}p_j)
\end{aligned} \tag{2-5}
$$

ここで，次のようにおく。

$$\begin{cases} \bar{p}_j = \frac{1}{2}({}^0p_j + {}^tp_j) \\ \Delta p_j = {}^tp_j - {}^0p_j \\ \Delta G = {}^tG - {}^0G \\ \Delta G_j = {}^tG_j - {}^0G_j \\ \bar{G} = \frac{1}{2}({}^tG + {}^0G) \end{cases} \tag{2-6}$$

(2-6)式を(2-5)式に代入すると，全年齢階級にかんするジニ係数の変化（ΔG）にたいする第 j 年齢階級の寄与分（${}^{\Delta G}C_j$）は，以下のようになる。

$$\begin{aligned} &{}^{\Delta G}C_j \\ &= \overbrace{\bar{p}_j \cdot \Delta G_j}^{\text{級内変動(第}j\text{年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\bar{p}_j(\Delta G - \Delta G_j)}^{\text{級間変動(第}j\text{年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\bar{G} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果(第}j\text{年齢階級)}} \end{aligned} \tag{2-7}$$

全年齢階級のジニ係数の差（ΔG）は年齢階級別寄与分（${}^{\Delta G}C_j$）の総和である。したがって，以下のようになる。

$$\begin{aligned} &\Delta G \\ &= \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \bar{p}_j \cdot \Delta G_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \bar{p}_j(\Delta G - \Delta G_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} \\ &\quad + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \bar{G} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}} \end{aligned} \tag{2-8}$$

3. 平　均　差

ジニ係数（G）は平均差（MD）と相加平均（$\bar{x}$）によって，

$$G = \frac{MD}{2\bar{x}}$$

と定義される。この定義式から平均差は

$$MD = 2\bar{x}G$$

となる[(8)]。ジニ係数 G は無次元量であるが，所得分布の相加平均 $\bar{x}$ はそうではない。したがって，G と $2\bar{x}$ の積である平均差は無次元量ではない。所得分布の統計解析に使用される場合には，平均差は通貨単位が付く名数（dominated number）としてあたえられる。

全年齢階級の平均差を MD，第 j 年齢階級の平均差を次式で定義される MD_j とする。

$$MD_j = 2\bar{x}_j G_j$$

(1)　任意の1時点における平均差（MD）の要因分解

$$\begin{aligned} &MD \\ &= MD \times \frac{1}{N} \times N \\ &= MD \times \frac{1}{N} \times \sum_{j=1}^{m} k_j \\ &= MD \times \sum_{j=1}^{m} \frac{k_j}{N} \\ &= MD \times \sum_{j=1}^{m} p_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot MD + \overbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot MD_j - \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot MD_j\right)}^{\text{ゼロを加算}} \\ &= \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot MD_j + \left(\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot MD - \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot MD_j\right) \\ &= \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot MD_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j(MD - MD_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} \end{aligned} \tag{3-1}$$

全年齢階級の平均差（MD）は，年齢階級別寄与分の総和であるから，MD にたいする第 j 年齢階級の寄与分（${}^{MD}C_j$）は次式であたえられる。

(8)　木村（2008：第8章）。

$$ {}^{MD}C_j = \overbrace{p_j \cdot MD_j}^{\text{級内変動(第}\,j\,\text{年齢階級)}} + \overbrace{p_j(MD - MD_j)}^{\text{級間変動(第}\,j\,\text{年齢階級)}} \qquad (3\text{-}2)$$

(2)　2時点間における平均差の差（ΔMD）の要因分解

$$
\begin{aligned}
&\Delta MD \\
&= {}^{t}MD - {}^{0}MD \\
&= \overbrace{\left\{ \overbrace{\sum_{j=1}^{m} {}^{t}p_j \cdot {}^{t}MD_j}^{\text{級内変動}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} {}^{t}p_j({}^{t}MD - {}^{t}MD_j)}^{\text{級間変動}} \right\}}^{\text{比較時点(全年齢階級)[(3-1)式による]}} \\
&\quad - \overbrace{\left\{ \overbrace{\sum_{j=1}^{m} {}^{0}p_j \cdot {}^{0}MD_j}^{\text{級内変動}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} {}^{0}p_j({}^{0}MD - {}^{0}MD_j)}^{\text{級間変動}} \right\}}^{\text{基準時点(全年齢階級)[(3-1)式による]}} \\
&= \overbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} {}^{t}p_j \cdot {}^{t}MD_j - \sum_{j=1}^{m} {}^{0}p_j \cdot {}^{0}MD_j \right)}^{\text{級内変動の差(全年齢階級)}} \\
&\quad + \overbrace{\left\{ \sum_{j=1}^{m} {}^{t}p_j({}^{t}MD - {}^{t}MD_j) - \sum_{j=1}^{m} {}^{0}p_j({}^{0}MD - {}^{0}MD_j) \right\}}^{\text{級間変動の差(全年齢階級)}}
\end{aligned}
\qquad (3\text{-}3)
$$

全年齢階級にかんする平均差の変化（ΔMD）を示す(3-3)式から，ΔMD にたいする第 j 年齢階級の寄与分（${}^{\Delta MD}C_j$）を抽出すると，次式を得る。

$$
\begin{aligned}
&{}^{\Delta MD}C_j \\
&= \overbrace{({}^{t}p_j \cdot {}^{t}MD_j - {}^{0}p_j \cdot {}^{0}MD_j)}^{\text{級内変動の差(第}\,j\,\text{年齢階級)(第 1 項)}} \\
&\quad + \overbrace{\{ {}^{t}p_j({}^{t}MD - {}^{t}MD_j) - {}^{0}p_j({}^{0}MD - {}^{0}MD_j) \}}^{\text{級間変動の差(第}\,j\,\text{年齢階級)(第 2 項)}}
\end{aligned}
\qquad (3\text{-}4)
$$

これまでと同様に，恒等式

$$
\begin{aligned}
&a_1 b_1 - a_2 b_2 \\
&\equiv \frac{1}{2}(a_1 + a_2)(b_1 - b_2) + \frac{1}{2}(a_1 - a_2)(b_1 + b_2)
\end{aligned}
\qquad (1\text{-}5)\text{[再掲]}
$$

により，(3-4)式を整理する。

$$
\begin{aligned}
&{}^{\Delta MD}C_j \\
&= \overbrace{({}^{t}p_j \cdot {}^{t}MD_j - {}^{0}p_j \cdot {}^{0}MD_j)}^{\text{級内変動の差(第}\,j\,\text{年齢階級)(第 1 項)}} \\
&\quad + \overbrace{\{ {}^{t}p_j({}^{t}MD - {}^{t}MD_j) - {}^{0}p_j({}^{0}MD - {}^{0}MD_j) \}}^{\text{級間変動の差(第}\,j\,\text{年齢階級)(第 2 項)}}
\end{aligned}
\qquad (3\text{-}4)\text{[再掲]}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \overbrace{\left\{ \frac{1}{2}({}^{t}p_j + {}^{0}p_j)({}^{t}MD_j - {}^{0}MD_j) \right\}}^{\text{(3-4)式第 1 項(その 1)}} \\
&\quad + \overbrace{\left\{ \frac{1}{2}({}^{t}p_j - {}^{0}p_j)({}^{t}MD_j + {}^{0}MD_j) \right\}}^{\text{(3-4)式第 1 項(その 2)}} \\
&\quad + \overbrace{\left[\frac{1}{2}({}^{t}p_j + {}^{0}p_j)\{({}^{t}MD - {}^{t}MD_j) - ({}^{0}MD - {}^{0}MD_j)\} \right]}^{\text{(3-4)式第 2 項(その 1)}} \\
&\quad + \overbrace{\left[\frac{1}{2}({}^{t}p_j - {}^{0}p_j)\{({}^{t}MD - {}^{t}MD_j) + ({}^{0}MD - {}^{0}MD_j)\} \right]}^{\text{(3-4)式第 2 項(その 2)}} \\
&= \frac{1}{2}({}^{t}p_j + {}^{0}p_j)({}^{t}MD_j - {}^{0}MD_j) \\
&\quad + \frac{1}{2}({}^{t}p_j + {}^{0}p_j)\{({}^{t}MD - {}^{t}MD_j) - ({}^{0}MD - {}^{0}MD_j)\} \\
&\quad + \frac{1}{2}({}^{t}p_j - {}^{0}p_j)[({}^{t}MD_j + {}^{0}MD_j) + \{({}^{t}MD - {}^{t}MD_j) + ({}^{0}MD - {}^{0}MD_j)\}] \\
&= \frac{1}{2}({}^{t}p_j + {}^{0}p_j)({}^{t}MD_j - {}^{0}MD_j) \\
&\quad + \frac{1}{2}({}^{t}p_j + {}^{0}p_j)\{({}^{t}MD - {}^{t}MD_j) - ({}^{0}MD - {}^{0}MD_j)\} \\
&\quad + \frac{1}{2}({}^{t}p_j - {}^{0}p_j)({}^{t}MD + {}^{0}MD) \\
&= \frac{1}{2}({}^{t}p_j + {}^{0}p_j)({}^{t}MD_j - {}^{0}MD_j) \\
&\quad + \frac{1}{2}({}^{t}p_j + {}^{0}p_j)\{({}^{t}MD - {}^{t}MD_j) - ({}^{0}MD - {}^{0}MD_j)\} \\
&\quad + \frac{1}{2}({}^{t}MD_j - {}^{0}MD_j)({}^{t}p_j - {}^{0}p_j)
\end{aligned}
\qquad (3\text{-}5)
$$

ここで，次のようにおく。

$$\begin{cases} \bar{p}_j = \dfrac{1}{2}({}^0p_j + {}^tp_j) \\ \Delta p_j = {}^tp_j - {}^0p_j \\ \Delta MD = {}^tMD - {}^0MD \\ \Delta MD_j = {}^tMD_j - {}^0MD_j \\ \overline{MD} = \dfrac{1}{2}({}^tMD + {}^0MD) \end{cases} \tag{3-6}$$

（3-6）式を（3-5）式に代入すると，全年齢階級にかんする平均差の変化（ΔMD）にたいする第 j 年齢階級の寄与分（${}^{\Delta MD}C_j$）は，以下のようになる。

$$\begin{aligned} &{}^{\Delta MD}C_j \\ = &\overbrace{\bar{p}_j \cdot \Delta MD_j}^{\text{級内変動（第}j\text{年齢階級）}} \\ &+\overbrace{\bar{p}_j(\Delta MD - \Delta MD_j)}^{\text{級間変動（第}j\text{年齢階級）}} \\ &+ \overbrace{\overline{MD} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果（第}j\text{年齢階級）}} \end{aligned} \tag{3-7}$$

全年齢階級の平均差の差（ΔMD）は年齢階級別寄与分（${}^{\Delta MD}C_j$）の総和である。したがって，以下のようになる。

$$\begin{aligned} &\Delta MD \\ = &\overbrace{\sum_{j=1}^{m} \bar{p}_j \cdot \Delta MD_j}^{\text{級内変動（全年齢階級）}} \\ &+\overbrace{\sum_{j=1}^{m} \bar{p}_j(\Delta MD - \Delta MD_j)}^{\text{級間変動（全年齢階級）}} \\ &+ \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \overline{MD} \cdot \Delta p_j}^{\text{人口動態効果（全年齢階級）}} \end{aligned} \tag{3-8}$$

む　す　び

ムッカジーとショロックスは，ジニ係数が，所得分布の変化にたいして影響をあたえる要因の一つである年齢構成の変動効果を不十分にしか計測できないと考えた。彼らは，この変動効果を「年齢効果（age effect）」（いわゆる「人口動態効果」）といい，これを計測するために，平均対数偏差の要因分解式を誘導した[9]。この誘導法には別解がある。その別解を誘導したときの仕方・様式を応用すれば，様々な統計量の要因分解式を誘導することができる。本稿で，取り上げた統計量（変動係数，ジニ係数，平均差）は，その一例である。これらの様々な要因分解式にかんする一般式の検討は今後の課題とする。

（2018 年 10 月 25 日提出）

(9)　Dilip Mookherjee and Anthony Shorrocks, “A Decomposition Analysis of the Trend in UK Income Inequality,” *The Economic Journal*, Vol. 92, 1982. ジニ係数の特性にかんする検討に端を発した一連の論争に触発されて，上記論文により平均対数偏差が定式化されたことについては，木村和範『格差は「見かけ上」か：所得分布の統計解析』日本経済評論社　2013 年　第 1 章参照。