タイトル	人口構成の変化と所得分布
著者	木村，和範；KIMURA，Kazunori
引用	季刊北海学園大学経済論集，66(2)：1-23
発行日	2018-09-30

《論説》

人口構成の変化と所得分布

木　　村　　和　　範*

〈要旨〉

平均対数偏差，相加平均，標準偏差と同様に，２時点間の分散の差（および対数分散の差）もまた，①級内変動，②級間変動，③人口動態効果の３つに要因分解できる。本稿では，誘導した全年齢階級の人口動態効果（第３要因）が，一般に，ゼロになることを数学的に証明した。『全国消費実態調査報告』（2009 年，2014 年）が表章する「世帯主の年齢階級別１世帯当り１か月の収入と支出」に，相加平均の差の要因分解式を応用して，人口動態効果を算出し，そのことを例示した。

〈Abstract〉

The author decomposes the difference between two ordinary variances (two logarithmic variances and two mean logarithmic deviations) at different time points into three elements: intra-variation, inter-variation and the effect of population ageing. Considering the mathematical nature of the third element, he proves that its value regarding total households amounts to zero. Applying the formula for decomposition of the difference between two arithmetic means to “Monthly Receipts and Disbursements per Household by Age Group of Household Head” in two reports, *the 2009 and 2014 National Survey of Family Income and Expenditure*, he illustrates the validity of his own conclusion.

〈叙述の順序〉

*　本学名誉教授，本学経済学部客員教授

はじめに

人口動態効果がもたらす格差の変化は「見かけ上」であるといわれている。この人口動態効果を計測するために，平均対数偏差（mean logarithmic deviation：MLD）

$$MLD=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\log\bar{x}-\log x_i)$$

ここに，Nは全世帯数，x_iは世帯所得，$\bar{x}$はx_iの相加平均

あるいは対数分散（logarithmic variance：LV）

$$LV=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\log x_i-\overline{\log x_i}\right)^2$$

ここに，Nは全世帯数，$\log x_i$は世帯所得の対数変換値，$\overline{\log x_i}$は対数変換したx_iの相加平均

が使用されている。

単一時点におけるこれらの統計量（statistic：$Stat$）は，年齢階級別級内変動の和($\sum_{Intra}^{Stat}V$)と年齢階級別級間変動の和($\sum_{Inter}^{Stat}V$)の２つに要因分解される。ところが，異なる２時点間の統計量の変化（差分）（$\Delta Stat$）を要因分解すれば，その差分からは，年齢階級別級内変動の和($\sum_{Inter}^{\Delta Stat}V$)ならびに年齢階級別級間変動の和($\sum_{Intra}^{\Delta Stat}V$)の２要因のほかに，年齢階級別人口動態効果の和($\sum_{Classis}^{\Delta Stat}V$)という第３の要因も検出され，これが「見かけ上」の格差の尺度と見なされている。

この分解については，数学的に明証的な説明があるかどうか，寡聞にして不明であった。遅きに失したが，平均対数偏差，ならびに平均対数偏差の差の要因分解式の誘導にかんする情報(1)に接する機会に浴した。それをなぞり，全年齢階級の平均対数偏差ならびにその差の要因分解式を誘導するとともに，全年齢階級を構成する第j年齢階級の寄与分にかんする要因分解式を誘導した。そして，単一時点における相加平均と標準偏差の要因分解式，およびそれぞれの統計量の２時点間の差にかんする要因分解式を誘導した(2)。

前稿（木村［2018］）では，全国消費実態調査のミクロデータ（1989年，1994年，1999年，2004年，二人以上世帯および単身世帯の年間収入，独立行政法人 統計センターに返却済み）にもとづく計算結果から世帯シェアを復元し，２時点間の標準偏差の差を要因分解して，人口動態効果を算出した。年齢階級別の人口動態効果の数値は非ゼロであったが，全年齢階級にかんする人口動態効果はゼロ（あるいはそれに近い値）になった。この結果数字は，使用したデータセットに固有であるのか，計算間違いによるものか，あるいは，人口動態効果の一般的性質によるものか。この考察が課題として残された。

本稿は，これを検討するために，人口構成の変化と所得分布の関係を，人口動態効果に着目して考察する。そして，独自に誘導した平均対数偏差だけでなく，相加平均，標準偏差，分散，対数分散についても，全年齢階級の人口動態効果($\sum_{Classis}^{\Delta Stat}V$)が，一般にゼロとなることを数学的に証明した。さらに，相加平均だけについてであるが，全国消費実態調査結果にもとづいて，このことを確かめた。

1．分散，対数分散，平均対数偏差の要因分解

木村［2018］で要因分解した３つの統計量

---

(1)　「不平等,格差の分析手法　対数標準偏差　シュロックス分解」（http://takamasa.at.webry.info/200805/article_1.html, accessed on Jan. 18, 2018）

(2)　木村和範「所得格差の変動にたいする人口動態効果の計測」『経済論集』（北海学園大学経済学部）　第66巻第1号　2018年6月（以下，木村［2018］）

（①平均対数偏差，②相加平均，③標準偏差）のうち，②相加平均と③標準偏差の要因分解にかんする仕方・様式にもとづけば，分散と対数分散も，それぞれ単一時点については同様形式の級内変動と級間変動に分解することができる。２つの時点間の分散（および対数分散）の差もまた，それぞれ，②相加平均，および③標準偏差と同様形式の級内変動，級間変動，人口動態効果に要因分解できる。本節(1)では分散を取り上げ，(2)では，対数分散を取り上げる。

なお，①平均対数偏差についても(1)(2)で採用したのと同様の仕方・様式により，要因分解式を誘導することができる。この分解式は，木村［2018］で示した誘導式とは異なり，別解と見なすことができる。(3)では別解の誘導を試みる。

以下，とくに断らない限り，文字にはこれまでと同様の意味をもたせて要因分解式を誘導する。すなわち，世帯所得を x_i とし，世帯の総数を N とする。全世帯が世帯主の年齢別に m 個の年齢階級に分類されており，それぞれの階級に落ちる世帯数を k_j とする。このとき，

$$N=\sum_{j=1}^{m}k_j$$

である。年齢階級別の世帯シェア p_j は

$$p_j=\frac{k_j}{N}$$

である。さらに，一般に，全年齢階級にかんする統計量を $Stat$，第 j 年齢階級にかんする同じ統計量を $Stat_j$ と表す。ここで，基準時点を０，比較時点を t とする。そして，２時点間の統計量（全年齢階級）の差分を一般に $\Delta Stat$ と表し，第 j 年齢階級の統計量の差分を $\Delta Stat_j$ と表す。このとき，以下のようになる。

$$\begin{cases}\Delta Stat={}^{t}Stat-{}^{0}Stat\\ \Delta Stat_j={}^{t}Stat_j-{}^{0}Stat_j\end{cases}$$

(1)　分散（σ^2）の要因分解

全年齢階級の分散（σ^2）と第 j 年齢階級の分散（σ_j^2）は，それぞれ以下のように定義される。

$$\begin{cases}\sigma^2=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2\\ \qquad\text{ただし，}\bar{x}=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\\ \sigma_j^2=\dfrac{1}{k_j}\sum_{i=1}^{k_j}(x_i-\bar{x}_j)^2\\ \qquad\text{ただし，}\bar{x}_j=\dfrac{1}{k_j}\sum_{i=1}^{k_j}x_i\end{cases}$$

①　単一時点における分散の要因分解

$$\begin{aligned}&\sigma^2\\ &=\sigma^2\times\frac{1}{N}\times N\\ &=\sigma^2\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}\\ &\qquad\left(\because\quad N=\sum_{j=1}^{m}k_j\right)\\ &=\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}\sigma^2\\ &=\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}\sigma^2+\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}\sigma_j^2-\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}\sigma_j^2\right)\\ &=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}\sigma_j^2}^{\text{級内変動（全年齢階級）}}+\overbrace{\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}(\sigma^2-\sigma_j^2)\right\}}^{\text{級間変動（全年齢階級）}}\qquad(1\text{-}1)\\ &=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j\sigma_j^2}^{\text{級内変動（全年齢階級）}}+\overbrace{\left\{\sum_{j=1}^{m}p_j(\sigma^2-\sigma_j^2)\right\}}^{\text{級間変動（全年齢階級）}}\qquad(1\text{-}1)'\end{aligned}$$

(1-1)式（および(1-1)′式）は，全年齢階級の分散(σ^2)が，年齢階級別寄与分の総和であることを示している。したがって，第 j 年齢階級の寄与分 $({}^{\sigma^2}C_j)$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned}{}^{\sigma^2}C_j&=\overbrace{\frac{k_j}{N}\sigma_j^2}^{\text{級内変動（第 }j\text{ 年齢階級）}}+\overbrace{\frac{k_j}{N}(\sigma^2-\sigma_j^2)}^{\text{級間変動（第 }j\text{ 年齢階級）}}\qquad(1\text{-}2)\\ &=\overbrace{p_j\sigma_j^2}^{\text{級内変動（第 }j\text{ 年齢階級）}}+\overbrace{p_j(\sigma^2-\sigma_j^2)}^{\text{級間変動（第 }j\text{ 年齢階級）}}\qquad(1\text{-}2)'\end{aligned}$$

② 2時点間における分散の差の要因分解

$$\Delta\sigma^2={}^t\sigma^2-{}^0\sigma^2$$

$$=\overbrace{\underbrace{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^tk_j}{{}^tN}{}^t\sigma_j^2}_{\text{級内変動（全年齢階級）}}+\underbrace{\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^tk_j}{{}^tN}({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_j^2)\right\}}_{\text{級間変動（全年齢階級）}}}^{\text{比較時点［(1-1)式による］}}$$

$$-\overbrace{\underbrace{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^0k_j}{{}^0N}{}^0\sigma_j^2}_{\text{級内変動（全年齢階級）}}+\underbrace{\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^0k_j}{{}^0N}({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_j^2)\right\}}_{\text{級間変動（全年齢階級）}}}^{\text{基準時点［(1-1)式による］}}$$

$$=\overbrace{\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^tk_j}{{}^tN}{}^t\sigma_j^2+\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^tk_j}{{}^tN}{}^t\sigma^2-\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^tk_j}{{}^tN}{}^t\sigma_j^2\right)\right\}}^{\text{比較時点}}$$

$$-\overbrace{\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^0k_j}{{}^0N}{}^0\sigma_j^2+\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^0k_j}{{}^0N}{}^0\sigma^2-\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^0k_j}{{}^0N}{}^0\sigma_j^2\right)\right\}}^{\text{基準時点}}$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^tk_j}{{}^tN}{}^t\sigma_j^2-\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^0k_j}{{}^0N}{}^0\sigma_j^2\right)$$

$$+\left\{\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^tk_j}{{}^tN}{}^t\sigma^2-\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^tk_j}{{}^tN}{}^t\sigma_j^2\right)-\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^0k_j}{{}^0N}{}^0\sigma^2-\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^0k_j}{{}^0N}{}^0\sigma_j^2\right)\right\}$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^tk_j}{{}^tN}{}^t\sigma_j^2-\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^0k_j}{{}^0N}{}^0\sigma_j^2\right)$$

$$+\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^tk_j}{{}^tN}({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_j^2)-\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^0k_j}{{}^0N}({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_j^2)\right\}\qquad(1\text{-}3)$$

(1-3)式は，全年齢階級にかんする分散の2時点間変化($\Delta\sigma^2$)が各年齢階級の寄与分の総和であることを示している。したがって，$\Delta\sigma^2$ にたいする第 j 年齢階級の寄与分 $({}^{\Delta\sigma^2}C_j)$ を抽出すると，次式を得る。

$${}^{\Delta\sigma^2}C_j$$

$$=\overbrace{\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}{}^t\sigma_j^2-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}{}^0\sigma_j^2\right)}^{\text{第1項}}$$

$$+\overbrace{\left\{\frac{{}^tk_j}{{}^tN}({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_j^2)-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_j^2)\right\}}^{\text{第2項}}\qquad(1\text{-}4)$$

ここで，$a_1\in\mathbb{C}, a_2\in\mathbb{C}, b_1\in\mathbb{C}, b_2\in\mathbb{C}$ のときに成立する次の恒等式(3)を想起する。

$$a_1b_1-a_2b_2$$

$$\equiv\frac{1}{2}(a_1+a_2)(b_1-b_2)+\frac{1}{2}(a_1-a_2)(b_1+b_2)\qquad(1\text{-}5)$$

そして，(1-4)式第1項において

$$\begin{cases}\dfrac{{}^tk}{{}^tN}=a_1\\ {}^t\sigma_j^2=b_1\\ \dfrac{{}^0k}{{}^0N}=a_2\\ {}^0\sigma_j^2=b_2\end{cases}$$

とおき，また(1-4)式第2項については

$$\begin{cases}\dfrac{{}^tk}{{}^tN}=a_1\\ {}^t\sigma^2-{}^t\sigma_j^2=b_1\\ \dfrac{{}^0k}{{}^0N}=a_2\\ {}^0\sigma^2-{}^0\sigma_j^2=b_2\end{cases}$$

とおいて，(1-5)式を(1-4)式に応用すれば，次のように整理できる。

$${}^{\Delta\sigma^2}C_j$$

$$=\overbrace{\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}{}^t\sigma_j^2-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}{}^0\sigma_j^2\right)}^{\text{第1項}}$$

$$+\overbrace{\left\{\frac{{}^tk_j}{{}^tN}({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_j^2)-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_j^2)\right\}}^{\text{第2項}}$$

(1-4)［再掲］

$$=\overbrace{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^t\sigma_j^2-{}^0\sigma_j^2)\right\}}^{\text{(1-4)式第1項(その1)}}$$

$$+\overbrace{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^t\sigma_j^2+{}^0\sigma_j^2)\right\}}^{\text{(1-4)式第1項(その2)}}$$

$$+\overbrace{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_j^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_j^2)\}\right]}^{\text{(1-4)式第2項(その1)}}$$

(3) 木村［2018：34頁］

$$+\overbrace{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_j^2)+({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_j^2)\}\right]}^{\text{(1-4)式第２項(その２)}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^t\sigma_j^2-{}^0\sigma_j^2)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_j^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_j^2)\}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)[({}^t\sigma_j^2+{}^0\sigma_j^2)+\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_j^2)+({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_j^2)\}]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^t\sigma_j^2-{}^0\sigma_j^2)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{({}^t\sigma^2-{}^0\sigma^2)-({}^t\sigma_j^2-{}^0\sigma_j^2)\}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^t\sigma^2+{}^0\sigma^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^t\sigma_j^2-{}^0\sigma_j^2)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{({}^t\sigma^2-{}^0\sigma^2)-({}^t\sigma_j^2-{}^0\sigma_j^2)\}$$
$$+\frac{1}{2}({}^t\sigma^2+{}^0\sigma^2)\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right) \qquad (1\text{-}6)$$

ここで，次のようにおく。

$$\begin{aligned}
{}^0p_j&=\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\\
{}^tp_j&=\frac{{}^tk_j}{{}^tN}\\
\overline{p}_j&=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^0k_j}{{}^0N}+\frac{{}^tk_j}{{}^tN}\right)\\
\Delta p_j&={}^tp_j-{}^0p_j\\
\Delta\sigma^2&={}^t\sigma^2-{}^0\sigma^2\\
\Delta\sigma_j^2&={}^t\sigma_j^2-{}^0\sigma_j^2\\
\overline{\sigma^2}&=\frac{1}{2}({}^t\sigma^2+{}^0\sigma^2)
\end{aligned} \qquad (1\text{-}7)$$

(1-7)式を(1-6)式に代入すると，全年齢階級にかんする分散の変化 $(\Delta\sigma^2)$ にたいする第 j 年齢階級の寄与分 $({}^{\Delta\sigma^2}C_j)$ は，以下のようになる。

$$\begin{aligned}
{}^{\Delta\sigma^2}C_j=&\ \overbrace{\overline{p}_j\cdot\Delta\sigma_j^2}^{\text{級内変動(第}j\text{年齢階級)}}\\
&+\overbrace{\overline{p}_j(\Delta\sigma^2-\Delta\sigma_j^2)}^{\text{級間変動(第}j\text{年齢階級)}}\\
&+\overbrace{\overline{\sigma^2}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(第}j\text{年齢階級)}}
\end{aligned} \qquad (1\text{-}8)$$

全年齢階級の分散の差 $(\Delta\sigma^2)$ は年齢階級別寄与分 $({}^{\Delta\sigma^2}C_j)$ の総和であり，以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma^2=&\ \overbrace{\sum_{i=1}^{m}\overline{p}_j\cdot\Delta\sigma_j^2}^{\text{級内変動(全年齢階級)}}\\
&+\overbrace{\sum_{i=1}^{m}\overline{p}_j(\Delta\sigma^2-\Delta\sigma_j^2)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}}\\
&+\overbrace{\sum_{i=1}^{m}\overline{\sigma^2}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}}
\end{aligned} \qquad (1\text{-}9)$$

⑵　対数分散（LV）の要因分解

全年齢階級の対数分散（LV）と第 j 年齢階級の対数分散（LV_j）は，それぞれ以下のように定義される。

$$\begin{cases}
LV=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\log x_i-\overline{\log x}\right)^2\\
\qquad\text{ただし，}\overline{\log x}=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\log x_i\\
LV_j=\dfrac{1}{k_j}\displaystyle\sum_{i=1}^{k_j}\left(\log x_i-\overline{\log x}_j\right)^2\\
\qquad\text{ただし，}\overline{\log x}_j=\dfrac{1}{k_j}\displaystyle\sum_{i=1}^{k_j}\log x_i
\end{cases}$$

①　単一時点における対数分散の要因分解

$$\begin{aligned}
&LV\\
&=LV\times\frac{1}{N}\times N\\
&=LV\times\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}\\
&=\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}\cdot LV+\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}\cdot LV_j-\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}\cdot LV_j\right)\\
&=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}\cdot LV_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}}+\overbrace{\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}(LV-LV_j)\right\}}^{\text{級間変動(全年齢階級)}}
\end{aligned} \qquad (1\text{-}10)$$

$$= \overbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot LV_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}} + \overbrace{\left\{\sum_{j=1}^{m} p_j (LV - LV_j)\right\}}^{\text{級間変動(全年齢階級)}} \quad (1\text{-}10)'$$

全年齢階級の対数分散(LV)は，年齢階級別寄与分の総和であるから，第 j 年齢階級の寄与分(${}^{LV}C_j$)は次式であたえられる。

$${}^{LV}C_j$$

$$= \overbrace{\frac{k_j}{N} \cdot LV_j}^{\text{級内変動(第 } j \text{ 年齢階級)}} + \overbrace{\frac{k_j}{N}(LV - LV_j)}^{\text{級間変動(第 } j \text{ 年齢階級)}} \quad (1\text{-}11)$$

$$= \overbrace{p_j \cdot LV_j}^{\text{級内変動(第 } j \text{ 年齢階級)}} + \overbrace{p_j (LV - LV_j)}^{\text{級間変動(第 } j \text{ 年齢階級)}} \quad (1\text{-}11)'$$

② 2 時点間における対数分散の差の要因分解

$$\varDelta LV$$

$$= {}^{t}LV - {}^{0}LV$$

$$= \overbrace{\overbrace{\sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} \cdot {}^{t}LV_j}^{\text{級内変動（全年齢階級）}} + \overbrace{\left\{\sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}({}^{t}LV - {}^{t}LV_j)\right\}}^{\text{級間変動（全年齢階級）}}}^{\text{比較時点［(1-10)式による］}}$$

$$- \overbrace{\overbrace{\sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N} \cdot {}^{0}LV_j}^{\text{級内変動（全年齢階級）}} + \overbrace{\left\{\sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}({}^{0}LV - {}^{0}LV_j)\right\}}^{\text{級間変動（全年齢階級）}}}^{\text{基準時点［(1-10)式による］}}$$

$$= \overbrace{\left\{\sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} {}^{t}LV_j + \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} {}^{t}LV - \sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} {}^{t}LV_j\right)\right\}}^{\text{比較時点}}$$

$$- \overbrace{\left\{\sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N} {}^{0}LV_j + \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N} {}^{0}LV - \sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N} {}^{0}LV_j\right)\right\}}^{\text{基準時点}}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} {}^{t}LV_j - \sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N} {}^{0}LV_j\right)$$

$$+ \left\{\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} {}^{t}LV - \sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} {}^{t}LV_j\right) - \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N} {}^{0}LV - \sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N} {}^{0}LV_j\right)\right\}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} {}^{t}LV_j - \sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N} {}^{0}LV_j\right)$$

$$+ \left\{\sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}({}^{t}LV - {}^{t}LV_j) - \sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}({}^{0}LV - {}^{0}LV_j)\right\} \quad (1\text{-}12)$$

全年齢階級にかんする対数分散の変化($\varDelta LV$)を示す(1‒12)式から，第 j 年齢階級の寄与分(${}^{\varDelta LV}C_j$)を抽出すると，次式を得る。

$${}^{\varDelta LV}C_j$$

$$= \overbrace{\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} {}^{t}LV_j - \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N} {}^{0}LV_j\right)}^{\text{第 1 項}}$$

$$+ \overbrace{\left\{\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}({}^{t}LV - {}^{t}LV_j) - \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}({}^{0}LV - {}^{0}LV_j)\right\}}^{\text{第 2 項}} \quad (1\text{-}13)$$

ここで，前項と同様に，恒等式

$$a_1 b_1 - a_2 b_2$$

$$\equiv \frac{1}{2}(a_1 + a_2)(b_1 - b_2) + \frac{1}{2}(a_1 - a_2)(b_1 + b_2) \quad (1\text{-}5)\text{［再掲］}$$

により，(1‒13)式を整理する。

$${}^{\varDelta LV}C_j$$

$$= \overbrace{\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} {}^{t}LV_j - \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N} {}^{0}LV_j\right)}^{\text{第 1 項}}$$

$$+ \overbrace{\left\{\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}({}^{t}LV - {}^{t}LV_j) - \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}({}^{0}LV - {}^{0}LV_j)\right\}}^{\text{第 2 項}} \quad (1\text{-}13)\text{［再掲］}$$

$$= \overbrace{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} + \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)({}^{t}LV_j - {}^{0}LV_j)\right\}}^{\text{(1-13)式第 1 項(その 1)}}$$

$$+ \overbrace{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} - \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)({}^{t}LV_j + {}^{0}LV_j)\right\}}^{\text{(1-13)式第 1 項(その 2)}}$$

$$+ \overbrace{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} + \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)\{({}^{t}LV - {}^{t}LV_j) - ({}^{0}LV - {}^{0}LV_j)\}\right]}^{\text{(1-13)式第 2 項(その 1)}}$$

$$+ \overbrace{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} - \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)\{({}^{t}LV - {}^{t}LV_j) + ({}^{0}LV - {}^{0}LV_j)\}\right]}^{\text{(1-13)式第 2 項(その 2)}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} + \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)({}^{t}LV_j - {}^{0}LV_j)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} + \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)\{({}^{t}LV - {}^{t}LV_j) - ({}^{0}LV - {}^{0}LV_j)\}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} - \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)[({}^{t}LV_j + {}^{0}LV_j) + \{({}^{t}LV - {}^{t}LV_j) + ({}^{0}LV - {}^{0}LV_j)\}]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^tLV_j-{}^0LV_j)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{({}^tLV-{}^0LV)-({}^tLV_j-{}^0LV_j)\}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^tLV+{}^0LV)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^tLV_j-{}^0LV_j)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{({}^tLV-{}^0LV)-({}^tLV_j-{}^0LV_j)\}$$
$$+\frac{1}{2}({}^tLV+{}^0LV)\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right) \tag{1-14}$$

ここで，次のようにおく。

$$\begin{aligned}
{}^0p_j&=\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\\
{}^tp_j&=\frac{{}^tk_j}{{}^tN}\\
\bar{p}_j&=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^0k_j}{{}^0N}+\frac{{}^tk_j}{{}^tN}\right)\\
\Delta p_j&={}^tp_j-{}^0p_j\\
\Delta LV&={}^tLV-{}^0LV\\
\Delta LV_j&={}^tLV_j-{}^0LV_j\\
\overline{LV}&=\frac{1}{2}({}^tLV+{}^0LV)
\end{aligned} \tag{1-15}$$

(1-15)式を(1-14)式に代入すると，全年齢階級にかんする対数分散の変化(ΔLV)にたいする第 j 年齢階級の寄与分 (${}^{\Delta LV}C_j$) は，以下のようになる。

$$\begin{aligned}
{}^{\Delta LV}C_j=&\ \overbrace{\bar{p}_j\cdot\Delta LV_j}^{\text{級内変動(第 }j\text{ 年齢階級)}}\\
&+\overbrace{\bar{p}_j(\Delta LV-\Delta LV_j)}^{\text{級間変動(第 }j\text{ 年齢階級)}}\\
&+\overbrace{\overline{LV}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(第 }j\text{ 年齢階級)}}
\end{aligned} \tag{1-16}$$

全年齢階級の対数分散の差(ΔLV)は年齢階級別寄与分 (${}^{\Delta LV}C_j$) の総和である。したがって，以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\Delta LV=&\ \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\cdot\Delta LV_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}}\\
&+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j(\Delta LV-\Delta LV_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}}\\
&+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{LV}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}}
\end{aligned} \tag{1-17}$$

(3)　平均対数偏差 (MLD) の要因分解 (別解)

全年齢階級の平均対数偏差 (MLD) と第 j 年齢階級の平均対数偏差 (MLD_j) は，それぞれ以下のように定義される。

$$\begin{cases}
MLD=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}(\log x_i-\log\bar{x})\\
\qquad\text{ただし，}\bar{x}=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}x_i\\
MLD_j=\dfrac{1}{k_j}\displaystyle\sum_{i=1}^{k_j}(\log x_i-\log\bar{x}_j)\\
\qquad\text{ただし，}\bar{x}_j=\dfrac{1}{k_j}\displaystyle\sum_{i=1}^{k_j}x_i
\end{cases}$$

平均対数偏差を，前稿では以下のように要因分解した(4)。

単一時点：

全年齢階級：

$$MLD=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot MLD_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)}^{\text{級間変動}}$$

第 j 年齢階級の寄与分：

$${}^{MLD}C_j=\overbrace{p_j\cdot MLD_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{p_j(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)}^{\text{級間変動}}$$

2時点間の差

全年齢階級：

$$\begin{aligned}
&\Delta MLD\\
&=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)}^{\text{級間変動}}\\
&\quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{\text{人口動態効果}}
\end{aligned}$$

(4)　木村［2018：31 頁以下］。この要因分解式と以下で述べる別解との比較は，今後の課題とする。

第 j 年齢階級の寄与分：

$$
\begin{aligned}
&{}^{\Delta MLD}C_j \\
&=\overbrace{\bar{p}_j \cdot \Delta MLD_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{\bar{p}_j(\Delta \log \bar{x}-\Delta \log \bar{x}_j)}^{\text{級間変動}} \\
&\quad+\overbrace{\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log \bar{x}}-\overline{\log \bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{\text{人口動態効果}}
\end{aligned}
$$

(1)と(2)で述べた分散と対数分散にかんする要因分解の仕方・様式にもとづいて平均対数偏差を要因分解すれば，上式とは異なった分解式（別解）が，以下のように誘導される。

① 単一時点における平均対数偏差の要因分解

$$
\begin{aligned}
&MLD \\
&=MLD\times\frac{1}{N}\times N \\
&=MLD\times\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N} \\
&=\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}\cdot MLD+\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}\cdot MLD_j-\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}\cdot MLD_j\right) \\
&=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}\cdot MLD_j}^{\text{級内変動（全年齢階級）}}+\overbrace{\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}(MLD-MLD_j)\right\}}^{\text{級間変動（全年齢階級）}} \qquad (1\text{-}18) \\
&=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot MLD_j}^{\text{級内変動（全年齢階級）}}+\overbrace{\left\{\sum_{j=1}^{m}p_j(MLD-MLD_j)\right\}}^{\text{級間変動（全年齢階級）}} \qquad (1\text{-}18)'
\end{aligned}
$$

全年齢階級の平均対数偏差 (MLD) は，年齢階級別寄与分の総和であるから，第 j 年齢階級の寄与分 (${}^{MLD}C_j$) は次式であたえられる。

$$
\begin{aligned}
&{}^{MLD}C_j \\
&=\overbrace{\frac{k_j}{N}\cdot MLD_j}^{\text{級内変動（第 } j \text{ 年齢階級）}}+\overbrace{\frac{k_j}{N}(MLD-MLD_j)}^{\text{級間変動（第 } j \text{ 年齢階級）}} \qquad (1\text{-}19) \\
&=\overbrace{p_j\cdot MLD_j}^{\text{級内変動（第 } j \text{ 年齢階級）}}+\overbrace{p_j(MLD-MLD_j)}^{\text{級間変動（第 } j \text{ 年齢階級）}} \qquad (1\text{-}19)'
\end{aligned}
$$

② 2 時点間における平均対数偏差の要因分解

$$
\begin{aligned}
&\Delta MLD \\
&={}^{t}MLD-{}^{0}MLD \\
&=\overbrace{\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}\cdot{}^{t}MLD_j}^{\text{級内変動（全年齢階級）}}+\overbrace{\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}({}^{t}MLD-{}^{t}MLD_j)\right\}}^{\text{級間変動（全年齢階級）}}}^{\text{比較時点［(1-18)式による］}} \\
&\quad-\overbrace{\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\cdot{}^{0}MLD_j}^{\text{級内変動（全年齢階級）}}+\overbrace{\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}({}^{0}MLD-{}^{0}MLD_j)\right\}}^{\text{級間変動（全年齢階級）}}}^{\text{基準時点［(1-18)式による］}} \\
&=\overbrace{\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}{}^{t}MLD_j+\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}{}^{t}MLD-\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}{}^{t}MLD_j\right)\right\}}^{\text{比較時点}} \\
&\quad-\overbrace{\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}{}^{0}MLD_j+\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}{}^{0}MLD-\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}{}^{0}MLD_j\right)\right\}}^{\text{基準時点}} \\
&=\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}{}^{t}MLD_j-\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}{}^{0}MLD_j\right) \\
&\quad+\left\{\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}{}^{t}MLD-\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}{}^{t}MLD_j\right)-\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}{}^{0}MLD-\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}{}^{0}MLD_j\right)\right\} \\
&=\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}{}^{t}MLD_j-\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}{}^{0}MLD_j\right) \\
&\quad+\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}\left({}^{t}MLD-{}^{t}MLD_j\right)-\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\left({}^{0}MLD-{}^{0}MLD_j\right)\right\} \qquad (1\text{-}20)
\end{aligned}
$$

全年齢階級にかんする平均対数偏差の変化 (ΔMLD) を示す (1-20) 式から，第 j 年齢階級の寄与分 (${}^{\Delta MLD}C_j$) を抽出すると，次式を得る。

$$
\begin{aligned}
&{}^{\Delta MLD}C_j \\
&=\overbrace{\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}{}^{t}MLD_j-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}{}^{0}MLD_j\right)}^{\text{第 1 項}} \\
&\quad+\overbrace{\left\{\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}({}^{t}MLD-{}^{t}MLD_j)-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}({}^{0}MLD-{}^{0}MLD_j)\right\}}^{\text{第 2 項}} \qquad (1\text{-}21)
\end{aligned}
$$

ここで，前項と同様に，恒等式

$$
\begin{aligned}
&a_1b_1-a_2b_2 \\
&\equiv\frac{1}{2}(a_1+a_2)(b_1-b_2)+\frac{1}{2}(a_1-a_2)(b_1+b_2) \qquad (1\text{-}5)［再掲］
\end{aligned}
$$

により，(1-21)式を整理する。

$$
\begin{aligned}
&{}^{\Delta MLD}C_j\\
&=\overbrace{\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}{}^tMLD_j-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}{}^0MLD_j\right)}^{\text{第１項}}\\
&\quad+\overbrace{\left\{\frac{{}^tk_j}{{}^tN}({}^tMLD-{}^tMLD_j)-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}({}^0MLD-{}^0MLD_j)\right\}}^{\text{第２項}}
\end{aligned}
\qquad \text{(1-21)［再掲］}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\overbrace{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^tMLD_j-{}^0MLD_j)\right\}}^{\text{(1-21)式第１項（その１）}}\\
&\quad+\overbrace{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^tMLD_j+{}^0MLD_j)\right\}}^{\text{(1-21)式第１項（その２）}}\\
&\quad+\overbrace{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{({}^tMLD-{}^tMLD_j)-({}^0MLD-{}^0MLD_j)\}\right]}^{\text{(1-21)式第２項（その１）}}\\
&\quad+\overbrace{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{({}^tMLD-{}^tMLD_j)+({}^0MLD-{}^0MLD_j)\}\right]}^{\text{(1-21)式第２項（その２）}}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^tMLD_j-{}^0MLD_j)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{({}^tMLD-{}^tMLD_j)-({}^0MLD-{}^0MLD_j)\}\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)[({}^tMLD_j+{}^0MLD_j)+\{({}^tMLD-{}^tMLD_j)+({}^0MLD-{}^0MLD_j)\}]\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^tMLD_j-{}^0MLD_j)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{({}^tMLD-{}^0MLD)-({}^tMLD_j-{}^0MLD_j)\}\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^tMLD+{}^0MLD)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^tMLD_j-{}^0MLD_j)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{({}^tMLD-{}^0MLD)-({}^tMLD_j-{}^0MLD_j)\}\\
&\quad+\frac{1}{2}({}^tMLD+{}^0MLD)\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)
\end{aligned}
\qquad \text{(1-22)}
$$

ここで，次のようにおく。

$$
\begin{aligned}
{}^0p_j&=\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\\
{}^tp_j&=\frac{{}^tk_j}{{}^tN}\\
\overline{p}_j&=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^0k_j}{{}^0N}+\frac{{}^tk_j}{{}^tN}\right)\\
\Delta p_j&={}^tp_j-{}^0p_j\\
\Delta MLD&={}^tMLD-{}^0MLD\\
\Delta MLD_j&={}^tMLD_j-{}^0MLD_j\\
\overline{MLD}&=\frac{1}{2}({}^tMLD+{}^0MLD)
\end{aligned}
\qquad \text{(1-23)}
$$

(1-23)式を(1-22)式に代入すると，全年齢階級にかんする平均対数偏差の変化(ΔMLD)にたいする第j年齢階級の寄与分(${}^{\Delta MLD}C_j$)は，以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
{}^{\Delta MLD}C_j=&\ \overbrace{\overline{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動（第 }j\text{ 年齢階級）}}\\
&+\overbrace{\overline{p}_j(\Delta MLD-\Delta MLD_j)}^{\text{級間変動（第 }j\text{ 年齢階級）}}\\
&+\overbrace{\overline{MLD}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果（第 }j\text{ 年齢階級）}}
\end{aligned}
\qquad \text{(1-24)}
$$

全年齢階級の平均対数偏差の差(ΔMLD)は年齢階級別寄与分(${}^{\Delta MLD}C_j$)の総和である。したがって，以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\Delta MLD=&\ \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動（全年齢階級）}}\\
&+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j(\Delta MLD-\Delta MLD_j)}^{\text{級間変動（全年齢階級）}}\\
&+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{MLD}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果（全年齢階級）}}
\end{aligned}
\qquad \text{(1-25)}
$$

２．様々な統計量の要因分解

全年齢階級にかんする単一時点における統計量（分散と対数分散）は①級内変動と②級間変動に要因分解される。また，当該統計量にかんする２時点間の差は，①級内変動，②級間変動，③人口動態効果の３つに分解され

る。平均対数偏差についても同様であるが，別解として新たな要因分解式が誘導された。以上が前節の要約である。

本節では，人口構成の変化と所得分布の関係を，人口動態効果の数学的性質に着目して考察する。この考察に先立って，木村［2018］で誘導した統計量（平均対数偏差，相加平均，標準偏差）にかんする要因分解式に，前節で誘導した要因分解式を加えて一覧に供すべく，単一時点にかんする分解式を表1とし，２時点間の差にかんする分解式を表２（次頁）として掲げる。

本稿における論述の論点整理を目的として，表２の表頭（全年齢階級の統計量の差と年齢階級別の統計量の差）の諸項目を，①全年齢階級の変動と②年齢階級別の変動に分けて，一般的に検討するために，表３（次頁）を作成した。以下では，表３における記載内容を数式で表現しなおす。一般化の発見的機能にかんする数学者ジョージ・ポリアの故智に

表１　単一時点における統計量の要因分解

全年齢階級の統計量 $Stat$	全年齢階級 $\sum {}^{Stat}V$ 級内変動 $\sum {}^{Stat}_{Intra}V$	全年齢階級 $\sum {}^{Stat}V$ 級間変動 $\sum {}^{Stat}_{Inter}V$	年齢階級別統計量 $Stat_j$	第j年齢階級（年齢階級別寄与分） ${}^{Stat}C_j$ 級内変動 ${}^{Stat}_{Intra}C_j$	第j年齢階級（年齢階級別寄与分） ${}^{Stat}C_j$ 級間変動 ${}^{Stat}_{Inter}C_j$
平均対数偏差 MLD $=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\log\bar{x}-\log x_i)$	$\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot MLD_j$	$\sum_{j=1}^{m}p_j(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)$ 〈別解〉 $\sum_{j=1}^{m}p_j(MLD-MLD_j)$	平均対数偏差 MLD_j $=\frac{1}{k_j}\sum_{i=1}^{k_j}(\log\bar{x}_j-\log x_i)$	$p_j\cdot MLD_j$	$p_j(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)$ 〈別解〉 $p_j(MLD-MLD_j)$
相加平均 $\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$	$\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot\bar{x}_j$	$\sum_{j=1}^{m}p_j(\bar{x}-\bar{x}_j)$	相加平均 $\bar{x}_j=\frac{1}{k_j}\sum_{i=1}^{k_j}x_i$	$p_j\cdot\bar{x}_j$	$p_j(\bar{x}-\bar{x}_j)$
標準偏差 $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$	$\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot\sigma_j$	$\sum_{j=1}^{m}p_j(\sigma-\sigma_j)$	標準偏差 $\sigma_j=\sqrt{\sigma_j^2}$	$p_j\cdot\sigma_j$	$p_j(\sigma-\sigma_j)$
分散 $\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2$	$\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot\sigma_j^2$	$\sum_{j=1}^{m}p_j(\sigma^2-\sigma_j^2)$	分散 $\sigma_j^2=\frac{1}{k_j}\sum_{i=1}^{k_j}(x_i-\bar{x}_j)^2$	$p_j\cdot\sigma_j^2$	$p_j(\sigma^2-\sigma_j^2)$
対数分散 LV $=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\log x_i-\overline{\log x})^2$	$\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot LV_j$	$\sum_{j=1}^{m}p_j(LV-LV_j)$	対数分散 LV_j $=\frac{1}{k_j}\sum_{i=1}^{k_j}(\log x_i-\overline{\log x_j})^2$	$p_j\cdot LV_j$	$p_j(LV-LV_j)$

注記
　文字の意味は以下のとおり。
N：総世帯数
x_i：世帯所得
m：年齢階級の個数
j：年齢階級の番号（$j=1, 2, \cdots, m$）
k_j：第j年齢階級に落ちる世帯数
$p_j=\frac{k_j}{N}$：第j年齢階級の世帯シェア
MLD_j：第j年齢階級の所得分布の平均対数偏差
$\bar{x}_j$：第j年齢階級の所得分布の相加平均
σ_j：第j年齢階級の所得分布の標準偏差
σ_j^2：第j年齢階級の所得分布の分散
LV_j：第j年齢階級の所得分布の対数分散

出所：MLD(別解を除く)，$\bar{x}$，σについては，木村［2018：31頁以下］。MLDの別解，σ^2，LVについては本稿。

表 2　2 時点における統計量の差にかんする統計量別要因分解

統計量の差 $\Delta Stat$ $={}^{t}Stat-{}^{0}Stat$	全年齢階級 $\sum{}^{\Delta Stat}V$			統計量の差 $\Delta Stat_j$ $={}^{t}Stat_j-{}^{0}Stat_j$	第 j 年齢階級（年齢階級別寄与分） $\sum{}^{\Delta Stat}C_j$		
	級内変動 $\sum{}^{\Delta Stat}_{Intra}V$	級間変動 $\sum{}^{\Delta Stat}_{Inter}V$	人口動態効果 $\sum{}^{\Delta Stat}_{Classis}V$		級内変動 ${}^{\Delta Stat}_{Intra}C_j$	級間変動 ${}^{\Delta Stat}_{Inter}C_j$	人口動態効果 ${}^{\Delta Stat}_{Classis}C_j$
平均対数偏差 ΔMLD $={}^{t}MLD-{}^{0}MLD$	$\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j\cdot\Delta MLD_j$	$\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)$ 〈別解〉 $\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j(\Delta MLD-\Delta MLD_j)$	$\sum_{j=1}^{m}\{\overline{MLD}_j+(\overline{\log\overline{x}}-\overline{\log\overline{x}_j})\}\Delta p_j$ 〈別解〉 $\sum_{j=1}^{m}\overline{MLD}\cdot\Delta p_j$	平均対数偏差 ΔMLD_j $={}^{t}MLD_j-{}^{0}MLD_j$	$\overline{p}_j\cdot\Delta MLD_j$	$\overline{p}_j(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)$ 〈別解〉 $\overline{p}_j(\Delta MLD-\Delta MLD_j)$	$\{\overline{MLD}_j+(\overline{\log\overline{x}}-\overline{\log\overline{x}_j})\}\Delta p_j$ 〈別解〉 $\overline{MLD}\cdot\Delta p_j$
相加平均 $\Delta\overline{x}={}^{t}\overline{x}-{}^{0}\overline{x}$	$\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j\cdot\Delta\overline{x}_j$	$\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j(\Delta\overline{x}-\Delta\overline{x}_j)$	$\sum_{j=1}^{m}\overline{\overline{x}}\cdot\Delta p_j$	相加平均 $\Delta\overline{x}_j={}^{t}\overline{x}_j-{}^{0}\overline{x}_j$	$\overline{p}_j\cdot\Delta\overline{x}_j$	$\overline{p}_j(\Delta\overline{x}-\Delta\overline{x}_j)$	$\overline{\overline{x}}\cdot\Delta p_j$
標準偏差 $\Delta\sigma={}^{t}\sigma-{}^{0}\sigma$	$\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j\cdot\Delta\sigma_j$	$\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j(\Delta\sigma-\Delta\sigma_j)$	$\sum_{j=1}^{m}\overline{\sigma}\cdot\Delta p_j$	標準偏差 $\Delta\sigma_j={}^{t}\sigma_j-{}^{0}\sigma_j$	$\overline{p}_j\cdot\Delta\sigma_j$	$\overline{p}_j(\Delta\sigma-\Delta\sigma_j)$	$\overline{\sigma}\cdot\Delta p_j$
分散 $\Delta\sigma^2={}^{t}\sigma^2-{}^{0}\sigma^2$	$\sum_{i=1}^{m}\overline{p}_j\cdot\Delta\sigma_j^2$	$\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j(\Delta\sigma^2-\Delta\sigma_j^2)$	$\sum_{j=1}^{m}\overline{\sigma^2}\cdot\Delta p_j$	分散 $\Delta\sigma_j^2={}^{t}\sigma_j^2-{}^{0}\sigma_j^2$	$\overline{p}_j\cdot\Delta\sigma_j^2$	$\overline{p}_j(\Delta\sigma^2-\Delta\sigma_j^2)$	$\overline{\sigma^2}\cdot\Delta p_j$
対数分散 $\Delta LV={}^{t}LV-{}^{0}LV$	$\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j\cdot\Delta LV_j$	$\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j(\Delta LV-\Delta LV_j)$	$\sum_{j=1}^{m}\overline{LV}\cdot\Delta p_j$	対数分散 $\Delta LV_j={}^{t}LV_j-{}^{0}LV_j$	$\overline{p}_j\cdot\Delta LV_j$	$\overline{p}_j(\Delta LV-\Delta LV_j)$	$\overline{LV}\cdot\Delta p_j$

注記

符号，文字，数字の意味は以下のとおり（表 1 の注記参照）。

0：基準時点

t：比較時点

$\overline{}$（バー）：相加平均を示す。たとえば，${}^{t}\overline{x}$ は，${}^{t}x_i$ の相加平均を示し，$\overline{p}_j$ は，${}^{t}p_j$ と ${}^{0}p_j$ の相加平均を示す。また，$\overline{\log\overline{x}}$ と $\overline{\log\overline{x}_j}$ は，それぞれ以下のとおりである。

$$\overline{\log\overline{x}}=\frac{1}{2}(\log{}^{t}\overline{x}+\log{}^{0}\overline{x}),\quad \overline{\log\overline{x}_j}=\frac{1}{2}(\log{}^{t}\overline{x}_j+\log{}^{0}\overline{x}_j)$$

$=$（ダブルバー）：2 つの相加平均の相加平均を示す。

Δ（デルタ）：比較時点の統計量の値 (${}^{t}Stat$) から基準時点の統計量の値 (${}^{0}Stat$) を減じた差分 ($\Delta Stat$)。たとえば，ΔMLD_j は (${}^{t}MLD_j-{}^{0}MLD_j$)，$\Delta\log\overline{x}$ は ($\log{}^{t}\overline{x}-\log{}^{0}\overline{x}$)，$\Delta\log\overline{x}_j$ は ($\log{}^{t}\overline{x}_j-\log{}^{0}\overline{x}_j$) を示す。

出所：ΔMLD（別解を除く），$\Delta\overline{x}$, $\Delta\sigma$ については，木村［2018：31 頁以下］。MLD の別解，σ^2, LV については本稿。

表 3　2 時点における統計量の差にかんする要因分解（一般式）

年齢階級別寄与分		総変動	級内変動	級間変動	人口動態効果
第 1 年齢階級		${}^{\Delta Stat}C_1$	${}^{\Delta Stat}_{Intra}C_1$	${}^{\Delta Stat}_{Inter}C_1$	${}^{\Delta Stat}_{Classis}C_1$
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
第 j 年齢階級		${}^{\Delta Stat}C_j$	${}^{\Delta Stat}_{Intra}C_j$	${}^{\Delta Stat}_{Inter}C_j$	${}^{\Delta Stat}_{Classis}C_j$
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
第 m 年齢階級		${}^{\Delta Stat}C_m$	${}^{\Delta Stat}_{Intra}C_m$	${}^{\Delta Stat}_{Inter}C_m$	${}^{\Delta Stat}_{Classis}C_m$
合　計 （全年齢階級）	寄与分表示型	$\sum{}^{\Delta Stat}C_j$	$\sum{}^{\Delta Stat}_{Intra}C_j$	$\sum{}^{\Delta Stat}_{Inter}C_j$	$\sum{}^{\Delta Stat}_{Classis}C_j$
	統合型	$\sum{}^{\Delta Stat}V$	$\sum{}^{\Delta Stat}_{Intra}V$	$\sum{}^{\Delta Stat}_{Inter}V$	$\sum{}^{\Delta Stat}_{Classis}V$

注記

$\Delta Stat$ は，ΔMLD，$\Delta\overline{x}$，$\Delta\sigma$，$\Delta\sigma^2$，ΔLV の一般形である。

倣って，考察したいからである[5]。

(1)　全年齢階級の変動 ($\Delta Stat$)

一般に，統計量の差 ($\Delta Stat$) は，①級内変動 ($\sum{}^{\Delta Stat}_{Intra}V$)，②級間変動 ($\sum{}^{\Delta Stat}_{Inter}V$)，③人口動態効果 ($\sum{}^{\Delta Stat}_{Classis}V$) の3要因からなり，この3要因の総計 ($\sum{}^{\Delta Stat}V$) である。すなわち，

$$\Delta Stat=\sum{}^{\Delta Stat}V$$
$$=\overbrace{\sum{}^{\Delta Stat}_{Intra}V}^{\text{級内変動}}+\overbrace{\sum{}^{\Delta Stat}_{Inter}V}^{\text{級間変動}}+\overbrace{\sum{}^{\Delta Stat}_{Classis}V}^{\text{人口動態効果}} \qquad (2\text{-}1)$$

となる。この総計 ($\sum{}^{\Delta Stat}V$) は，年齢階級別寄与分 (${}^{\Delta Stat}C_j$) の総計でもある。したがって，次式を得る。

$$\overbrace{\sum{}^{\Delta Stat}V}^{\text{統合型}}=\overbrace{\sum{}^{\Delta Stat}C_j}^{\text{寄与分表示型}} \qquad (2\text{-}2)$$

(2)　年齢階級別の変動 (${}^{\Delta Stat}C_j$)

${}^{\Delta Stat}C_j$ は，年齢階級別の①級内変動 (${}^{\Delta Stat}_{Intra}C_j$)，②級間変動 (${}^{\Delta Stat}_{Inter}C_j$)，③人口動態効果 (${}^{\Delta Stat}_{Classis}C_j$) の3要因からなり，第 j 年齢階級については次のように表すことができる。

$${}^{\Delta Stat}C_j=\overbrace{{}^{\Delta Stat}_{Intra}C_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{{}^{\Delta Stat}_{Inter}C_j}^{\text{級間変動}}+\overbrace{{}^{\Delta Stat}_{Classis}C_j}^{\text{人口動態効果}} \qquad (2\text{-}3)$$

(3)　全年齢階級の変動と年齢階級別変動の関係

全年齢階級の変動を寄与分表示型の様式で示せば，以下のようになる。

$$\sum{}^{\Delta Stat}C_j=\overbrace{\sum{}^{\Delta Stat}_{Intra}C_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{\sum{}^{\Delta Stat}_{Inter}C_j}^{\text{級間変動}}+\overbrace{\sum{}^{\Delta Stat}_{Classis}C_j}^{\text{人口動態効果}} \qquad (2\text{-}4)$$

これは，統合型の表示形式による次式と同値である。

$$\sum{}^{\Delta Stat}V=\overbrace{\sum{}^{\Delta Stat}_{Intra}V}^{\text{級内変動}}+\overbrace{\sum{}^{\Delta Stat}_{Inter}V}^{\text{級間変動}}+\overbrace{\sum{}^{\Delta Stat}_{Classis}V}^{\text{人口動態効果}} \qquad (2\text{-}1)[\text{再掲}]$$

他方で，全年齢階級の変動を要因別に，寄与分表示型の様式で示せば，(2-4)式右辺の各項は以下のようになる。

級内変動：

$$\sum{}^{\Delta Stat}_{Intra}C_j=\overbrace{{}^{\Delta Stat}_{Intra}C_1}^{\text{第1年齢階級}}+\cdots+\overbrace{{}^{\Delta Stat}_{Intra}C_j}^{\text{第}j\text{年齢階級}}+\cdots+\overbrace{{}^{\Delta Stat}_{Intra}C_m}^{\text{第}m\text{年齢階級}} \qquad (2\text{-}5)$$

級間変動：

$$\sum{}^{\Delta Stat}_{Inter}C_j=\overbrace{{}^{\Delta Stat}_{Inter}C_1}^{\text{第1年齢階級}}+\cdots+\overbrace{{}^{\Delta Stat}_{Inter}C_j}^{\text{第}j\text{年齢階級}}+\cdots+\overbrace{{}^{\Delta Stat}_{Inter}C_m}^{\text{第}m\text{年齢階級}} \qquad (2\text{-}6)$$

人口動態効果

$$\sum{}^{\Delta Stat}_{Classis}C_j=\overbrace{{}^{\Delta Stat}_{Classis}C_1}^{\text{第1年齢階級}}+\cdots+\overbrace{{}^{\Delta Stat}_{Classis}C_j}^{\text{第}j\text{年齢階級}}+\cdots+\overbrace{{}^{\Delta Stat}_{Classis}C_m}^{\text{第}m\text{年齢階級}} \qquad (2\text{-}7)$$

3．人口動態効果の数学的性質

(1)　数式の共通性（平均対数偏差（別解），相加平均，標準偏差，分散，対数分散）

表2に掲げた平均対数偏差（ただし，別解），相加平均，標準偏差，分散，対数分散の5つの統計量にかんする全年齢階級の人口動態効果，および年齢階級別の人口動態効果を見れば，2時点における統計量の相加平均（$\overline{MLD}, \overline{\bar{x}}, \overline{\sigma}, \overline{\sigma^2}, \overline{LV}$）が，年齢階級別世帯シェアの変動 ($\Delta p_j$) にたいする被乗数であることが分かる。この5つの相加平均は，いずれも2時点における，それぞれの統計値集団（所得分布）から一意的に算出される。

ここで，比較時点と基準時点における統計量を一般に

$$\begin{cases} {}^{t}Stat \\ {}^{0}Stat \end{cases}$$

とおくと，2時点におけるその統計量の相加平均は

$$\overline{Stat}=\frac{1}{2}({}^{t}Stat+{}^{0}Stat)$$

であり，この相加平均（Δp_j の係数）は統計

(5)　Polya, George, *Mathematics and Plausible Reasoning, Volume 1, Induction and Analogy in Mathematics*, Princeton 1954（柴垣和三雄訳『数学における発見はいかになされるか』〈第1〉（帰納と類比）丸善，1959年，12頁）

量ごとに，データセットに固有の定数と見なすことができる。一般に，年齢階級別人口動態効果（${}^{\Delta Stat}_{Classis}C_j$）は，この定数（$\overline{Stat}$）と年齢階級別世帯シェアの変化（$\Delta p_j$）の積（$\overline{Stat}\cdot\Delta p_j$）としてあたえられ，全年齢階級の人口動態効果（$\sum {}^{\Delta Stat}_{Classis}V$）は，その積の総計（積和）である。すなわち，

$$\sum {}^{\Delta Stat}_{Classis}V=\sum_{j=1}^{m}\overline{Stat}\cdot\Delta p_j \qquad (3\text{-}1)$$

(3-1)式を整理すれば，以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&\sum {}^{\Delta Stat}_{Classis}V\left(=\sum {}^{\Delta Stat}_{Classis}C_j\right)\\
&=\sum_{j=1}^{m}\overline{Stat}\cdot\Delta p_j \qquad (3\text{-}1)\text{［再掲］}\\
&=\overline{Stat}\sum_{j=1}^{m}\Delta p_j\\
&=\overline{Stat}\sum_{j=1}^{m}({}^t p_j-{}^0 p_j)\\
&=\overline{Stat}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{{}^t k_j}{{}^t N}-\frac{{}^0 k_j}{{}^0 N}\right)\\
&=\overline{Stat}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^t k_j}{{}^t N}-\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^0 k_j}{{}^0 N}\right)\\
&=\overline{Stat}\left[\left\{\frac{1}{{}^t N}({}^t k_1+\cdots+{}^t k_j\cdots+{}^t k_m)\right\}-\left\{\frac{1}{{}^0 N}({}^0 k_1+\cdots+{}^0 k_j\cdots+{}^0 k_m)\right\}\right]\\
&=\overline{Stat}\left(\frac{1}{{}^t N}{}^t N-\frac{1}{{}^0 N}{}^0 N\right)\\
&\qquad\qquad (\because\ \ {}^t N={}^t k_1+\cdots+{}^t k_j\cdots+{}^t k_m,\\
&\qquad\qquad\quad {}^0 N={}^0 k_1+\cdots+{}^0 k_j\cdots+{}^0 k_m)\\
&=\overline{Stat}\times(1-1)\\
&=0 \qquad (3\text{-}2)
\end{aligned}$$

(3-2)式は，平均対数偏差（ただし，別解），相加平均，標準偏差，分散，対数分散にかんする全年齢階級の人口動態効果が，一般的にゼロであることを示している(6)。

⑵　人口動態効果の特質

年齢階級別世帯シェアの変動の大きさ（Δp_j）がたとえ同程度であろうとも，個別の年齢階級のすべてのΔp_jにたいして等しく乗ぜられる定数（$\overline{Stat}$）は統計量ごとに異なるので，当該年齢階級による全年齢階級の人口動態効果への寄与分は，同一のデータセットであろうとも，統計量ごとに異なる。

また，世帯シェアの変動（Δp_j）がゼロになる階級（世帯シェアが２時点とも同一の値となる階級）については，年齢階級別の人口動態効果はゼロとなるが，現実には，年々，年齢階級別世帯シェアは変化するから，年齢階級別の人口動態効果が限りなくゼロに近づくことはありえても，ちょうどゼロになる年齢階級が必ず存在すると想定することは，現実的ではない。この点で，年齢階級別人口動態効果は，つねにゼロとなる全年齢階級の人口動態効果とは異なっている。

年齢階級別の人口動態効果は，世帯シェアの変動（Δp_j）だけを計測したのではない。それは，①年齢階級別級内変動および②級間変動とともに，２時点間における全年齢階級の所得変化（総変動）にたいして世帯シェアの変動がもたらした年齢階級別寄与分を構成する。統計量が通貨単位のつく名数としてあたえられるとき，人口動態効果もまた名数である。これにたいして，比率が無名数（無次元量）であるために，比率の差としてあたえられる世帯シェアの変動（Δp_j）は，つねに無名数である。所得の原系列が対数変換されていてもこのことは変わらない。要するに，年齢階級別人口動態効果とは，２時点間における所得分布の変化を$\overline{Stat}$に固定し，それ

(6)　木村［2018］において誘導した，全年齢階級における平均対数偏差の人口動態効果（表２参照）

$$\sum {}^{\Delta Stat}_{Classis}V=\sum_{j=1}^{m}\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j \qquad (*)$$

は，本稿で「別解」とした平均対数偏差の要因分解式とは異なり，Δp_jにたいする被乗数が単一ではなく，$\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}$という３つの項からなり，すべての年齢階級について同一の値とはならない。したがって，この３項からなる（Δp_jの）被乗数は，すべての年齢階級に共通する定数ではない。(*)式がゼロになるかどうかの検討については，今後の課題とする。

表 4 (a)　世帯主の年齢階級別年間収入（2009 年）

	25 歳未満	25 歳～29 歳	30 歳～34 歳	35 歳～39 歳	40 歳～44 歳	45 歳～49 歳
世帯シェア(抽出率調整済)	0.0156 4006	0.0405 4486	0.0642 1431	0.0814 4736	0.0799 3947	0.0793 9689
年間収入(千円)	2,703	3,809	4,887	5,756	6,632	7,415

	50 歳～54 歳	55 歳～59 歳	60 歳～64 歳	65 歳～69 歳	70 歳～74 歳	75 歳以上
世帯シェア(抽出率調整済)	0.0868 789	0.1011 5569	0.1179 1863	0.1146 3637	0.0956 2965	0.1225 978
年間収入(千円)	7,901	7,267	5,387	4,699	4,093	3,643

(参考)全年齢階級	世帯シェア(抽出率調整済)	1.0000 0000
	年間収入(千円)	5,532

出所：『平成 21 年　全国消費実態調査報告』第 1 巻　家計収支編　第 43 表　世帯主の年齢階級別 1 世帯当たり 1 か月間の収入と支出（付表 1 ）

表 4 (b)　世帯主の年齢階級別年間収入（2014 年）

	25 歳未満	25 歳～29 歳	30 歳～34 歳	35 歳～39 歳	40 歳～44 歳	45 歳～49 歳
世帯シェア(抽出率調整済)	0.0139 2660	0.0334 8926	0.0505 5066	0.0574 9522	0.0852 7536	0.0795 8239
年間収入(千円)	2,714	4,101	4,931	5,941	6,441	6,959

	50 歳～54 歳	55 歳～59 歳	60 歳～64 歳	65 歳～69 歳	70 歳～74 歳	75 歳以上
世帯シェア(抽出率調整済)	0.0823 1370	0.0930 9369	0.1068 2765	0.1282 2426	0.1169 9700	0.1522 2419
年間収入(千円)	7,462	7,140	5,453	4,712	4,057	3,423

(参考)全年齢階級	世帯シェア(抽出率調整済)	1.0000 0000
	年間収入(千円)	5,331

出所：『平成 26 年　全国消費実態調査報告』第 1 巻　家計収支編（その 1　用途分類）第 43 表　世帯主の年齢階級別 1 世帯当たり 1 か月間の収入と支出（付表 2 ）

と世帯シェアの変化とを関連付けて，年齢階級別寄与分を計測する指標である。それは，無次元量であるとは限らない。このことは，全年齢階級の人口動態効果にも当てはまる。

4．計算例―全国消費実態調査―

世帯別年間収入にかんする単一時点のミクロデータおよび 2 時点のミクロデータがなければ，平均対数偏差，標準偏差，分散，対数分散について誘導した要因分解式を応用して，所得分布を統計的に解析することは不可能である。しかし，相加平均の要因分解は別である。表 1 と表 2 における相加平均の要因分解式が示すように，年齢階級別の平均年間収入（相加平均）と世帯シェアがあれば，ミクロデータがなくても要因分解が可能である。全国消費実態調査結果には，総世帯や勤労世帯などの世帯類型別年間収入にかんする全年齢階級の相加平均および年齢階級別相加平均が表章されている。また，抽出率調整済みの世帯数分布も表章されている（本稿末尾の付表 1，付表 2 参照）。本稿では，2009(平成 21) 年（基準時点とする）と 2014(平成 26) 年（比較時点とする）にかんする 2 か年分の年間収入を拾い上げて，要因分解を試みる。世帯類型ごとに表章されている統計のなかから，総世帯だけを取り上げる。それは，本節の主たる目的が所得格差の統計解析というよりもむしろ，相加平均にかんする要因分解式の応用例を示すことにあるからである。

以下では，このために作成した統計表について，その要点を述べる。表 4 (a) (b) は付表 1 と付表 2 から，世帯シェアと平均年収を

表 5　世帯主の年齢階級別年間収入の変化（2009 年～2014 年）　（千円）

	全世帯	25 歳未満	25 歳~29 歳	30 歳~34 歳	35 歳~39 歳	40 歳~44 歳	45 歳~49 歳	50 歳~54 歳	55 歳~59 歳	60 歳~64 歳	65 歳~69 歳	70 歳~74 歳	75 歳以上
増　減（変　化）	－201	11	292	44	185	－191	－456	－439	－127	66	13	－36	－220

注記：表 4 (a) (b)にもとづく。増減は，比較時点（2014 年）における年間収入から基準時点（2009 年）の年間収入を減じた値。

表 6　年間収入の差の要因分解（2009 年～2014 年）　（千円）

	全世帯	25 歳未満	25 歳~29 歳	30 歳~34 歳	35 歳~39 歳	40 歳~44 歳	45 歳~49 歳	50 歳~54 歳	55 歳~59 歳	60 歳~64 歳	65 歳~69 歳	70 歳~74 歳	75 歳以上
級　内　変　動	－100	0	11	3	13	－16	－36	－37	－12	7	2	－4	－30
級　間　変　動	－101	－3	－18	－14	－27	－1	20	20	－7	－30	－26	－18	3
人口動態効果	0	－9	－38	－74	－130	29	1	－25	－44	－60	74	116	161
合　　計	－201	－3	－7	－12	－14	－17	－16	－17	－20	－23	－24	－21	－28

注記：表 4 (a) (b)にもとづく。

抜き書きした統計表である。表 5 には，表 4 (a) (b)にもとづいて，2009 年から 2014 年までの 5 年間における年間収入の変化を表章した。表 6 は，表 2 に記した相加平均の差（$\Delta\bar{x}$）にかんする要因分解式にもとづいて，5 年間における年間収入にかんする分布の変化を①級内変動，②級間変動，③人口動態効果の 3 要因に分解した計算表である。

総世帯の年間収入の変化を概観するには，これらの表だけでは，分かりにくい。視覚に訴えるために，各表にもとづいて，グラフを作成した。以下では，次頁以降に掲げたグラフ（図 1 ～図 5 ）について概説する。

図 1 は， 2 か年（2009 年と 2014 年）における年齢階級別の世帯シェアを示し，図 2 は，基準時点（2009 年）から比較時点（2014 年）までの 5 年間における世帯シェアの変化を示している。図 2 において，正の値を示す年齢階級は，比較時点でシェアが基準時点におけるよりも大きくなった階級である。

図 3 は，全世帯（全年齢階級）および世帯年齢階級別の年間収入にかんする所得分布を示している。図 4 は，年間収入の増減についてである。全世帯（全年齢階級）では， 5 年間で 20 万 1000 円（月額 1 万 6750 円）が減少したことを示す。年齢階級別に見ると，年間収入が増加したのは，①25 歳未満，②25 歳～29 歳，③30 歳～34 歳，④35 歳～39 歳，⑤60 歳～64 歳，⑥65 歳～69 歳の階級であることが分かる（ただし，①25 歳未満は 1 万 1000 円（月額約 917 円）の増加であり，⑥65 歳～69 歳は 1 万 3000 円（月額約 1083 円）の増加であり，横ばいといってもよい)。これにたいして，年間収入が減少した階級は，①40 歳～44 歳，②45 歳～49 歳，③50 歳～54 歳，④55 歳～59 歳，⑤70 歳～74 歳，⑥75 歳以上である。とくに②45 歳～49 歳では 45 万 6000 円（月額 3 万 8000 円)，③50 歳～54 歳では 43 万 9000 円（月額約 3 万 5683 円）の収入減となった。

このような年間収入の変化が世帯シェアの変化と相まって，年齢階級別の 3 つの寄与分（級内変動，級間変動，人口動態効果）はどのようになったのか。これを示したのが，図 5 である。全年齢階級にかんする人口動態効果の数学的意味については，すでに述べた。その値がゼロであることは，図 5 にも表示されている。全年齢階級の所得変化（－201 千円）は，級内変動（－100 千円)，級間変動（－101 千円)，人口動態効果（ 0 千円）の 3 つに分解され，この合計は，表 5 に表章された全世帯（全年齢階級）の年間収入の減少額（－201 千円）と一致する（図 4 参照)。全年齢階級の年間収入の変化は，実質的には級内

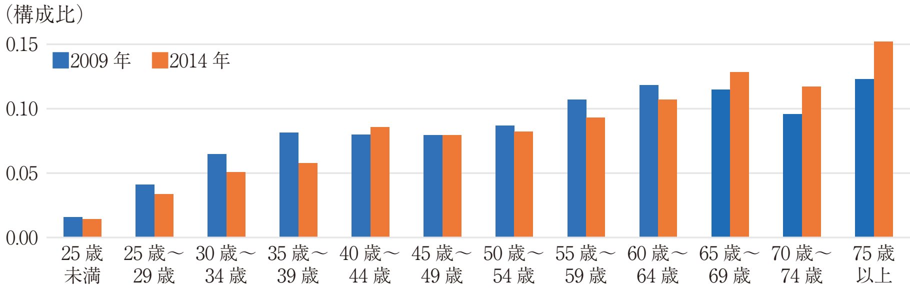

図 1　世帯主の年齢階級別シェア（総世帯，2009 年，2014 年）

出所：表 4 (a) (b)

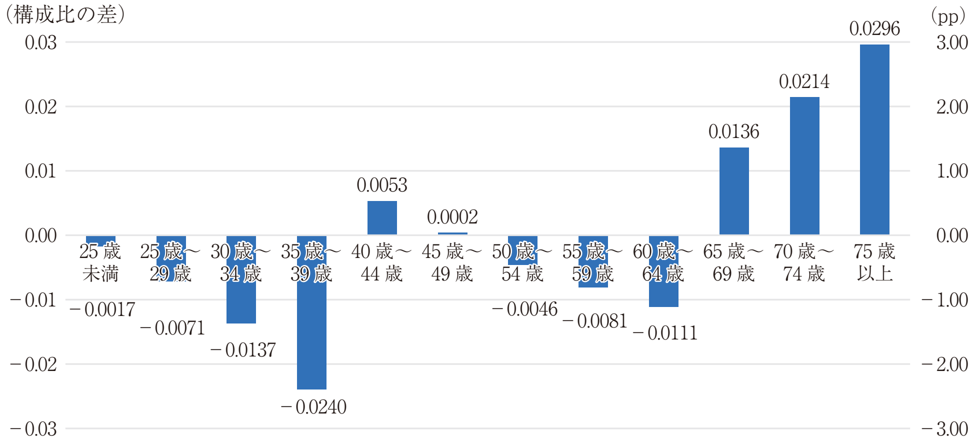

図 2　年齢階級別世帯シェアの変化（総世帯，2009 年〜2014 年）

注記：図中の数字は構成比の差を示す（これを 100 倍すれば，パーセントポイント（pp）を得る）。
出所：表 4 (a) (b)

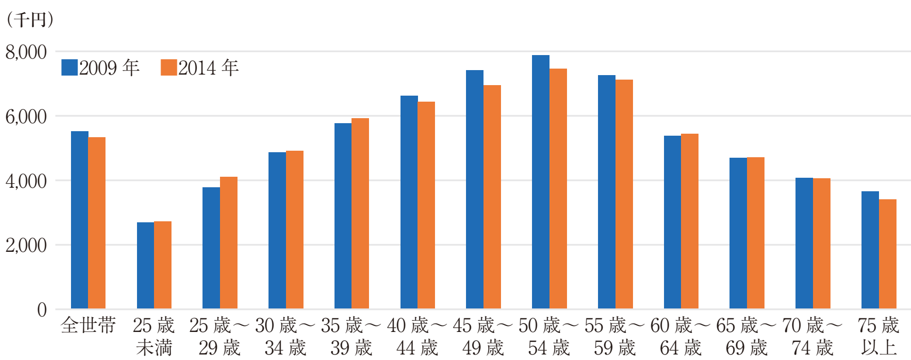

図 3　世帯主の年齢階級別年間収入（総世帯，2009 年，2014 年）

出所：表 4 (a) (b)

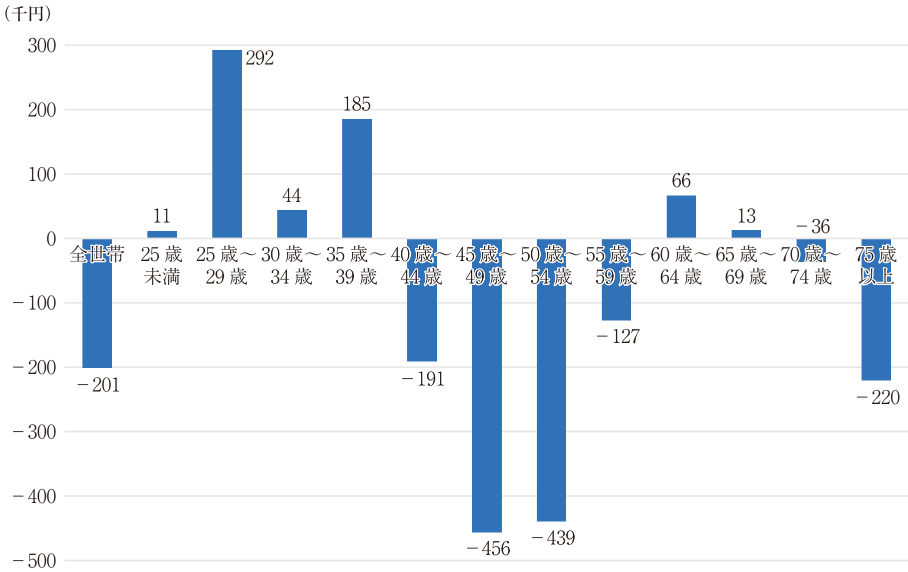

図 4　2009 年から 2014 年までの年間収入の増減

出所：表 5

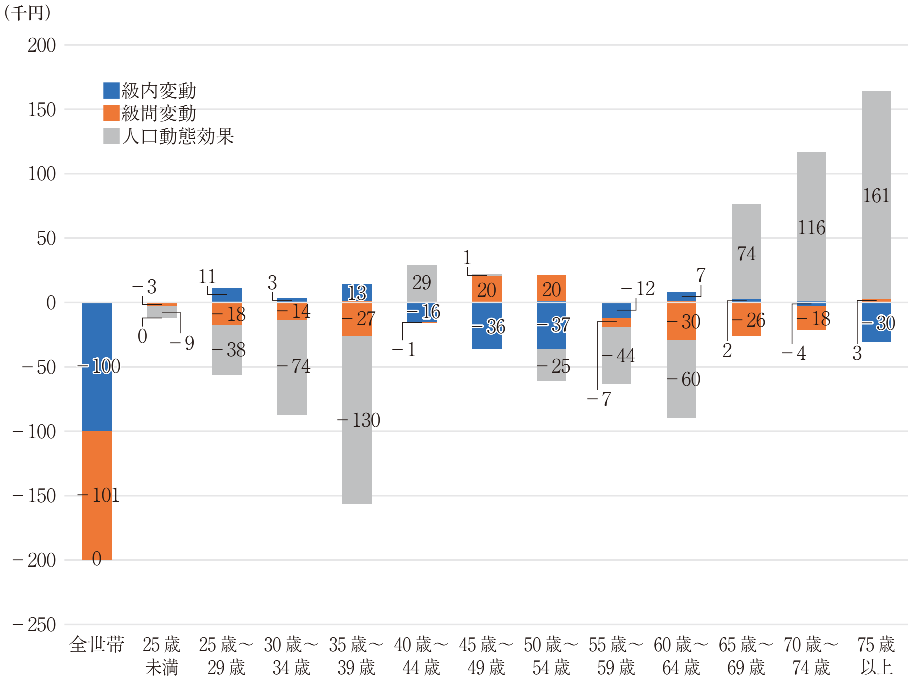

図 5　年齢階級別年間収入の差にかんする要因分解（2009 年～2014 年，総世帯）

出所：表 6

表 7　年齢階級別世帯シェアの変化（比率の差）と人口動態効果（千円）（2009 年～2014 年）

	25 歳未満	25 歳～29 歳	30 歳～34 歳	35 歳～39 歳	40 歳～44 歳	45 歳～49 歳
年齢階級別世帯シェアの増減(①)	−0.0017 1347	−0.0070 5560	−0.0136 6365	−0.0239 5214	0.0053 3589	0.0001 8550
人口動態効果(②)	−9	−38	−74	−130	29	1

	50 歳～54 歳	55 歳～59 歳	60 歳～64 歳	65 歳～69 歳	70 歳～74 歳	75 歳以上
年齢階級別世帯シェアの増減(①)	−0.0045 6520	−0.0080 6200	−0.0110 9098	0.0135 8789	0.0213 6734	0.0296 2639
人口動態効果(②)	−25	−44	−60	74	116	161

(参考)全年齢階級	世帯シェアの増減(①)	0.0000 0000
	人口動態効果(②)	0

注記：①は表 4 (a) (b) にもとづき，②は表 6 にもとづく。

変動と級間変動の 2 つの要因に分解されるだけである。

次に，図 5 が示す年齢階級別の 3 つの寄与分のうち，人口動態効果に着目する。そして，全年齢階級にかんする平均年間収入の差分（−201 千円）にたいして，年齢階級別世帯シェアの変化がもたらした寄与分について考察する。

年齢階級別の人口動態効果は，年齢階級別の寄与分の一部を構成し，他の 2 つの年齢階級別の寄与分（級内変動と級間変動）と相まって，全年齢階級についての平均年間収入の変化に実質的に寄与している（表 3 参照）。その寄与分は，「見かけ上」の値ではない。年齢階級別の人口動態効果をそのものとして見れば，それは，その値が大きいほど，当該年齢階級では世帯シェアが増大したことを意味する。しかし，単なる世帯シェアの変化を示すのではなく，所得変化と関連づけて世帯シェアの変動を計測するということのうちに，年齢階級別人口動態効果の特質がある。これらのことは，すでに述べた。

年齢階級別世帯シェアの変化と年齢階級別の人口動態効果との間の，そのような関係をさらに考察するために，上に表 7 を掲げる。図 6（次頁）は，表 7 に表章した 2 変量データをプロットした散布図である。この 2 変量データの相関係数（r）は 1.0000 であり，正の完全相関を示している。

このことは，次のように説明できる。図 6 における横軸の値 (Δp_j) は，年齢階級別の世帯シェア変化を示す。他方，同じ図 6 における縦軸の値 $\left({}^{\Delta\bar{x}}C_j\right)$ は，相加平均の差にかんする年齢階級別人口動態効果を示す。縦軸の値 $\left({}^{\Delta\bar{x}}C_j\right)$ は，どの年齢階級についても，横軸の値 (Δp_j) の $\bar{\bar{x}}$（2 時点における全年齢階級の平均年間収入の相加平均）倍である ($\bar{\bar{x}}\cdot\Delta p_j$)。2 変量の組 $\left(\Delta p_j,\ {}^{\Delta\bar{x}}C_j\right)$ は線形関係にあり，両軸の数値にかんする関係式は次式である。

$$ {}^{\Delta\bar{x}}C_j=\bar{\bar{x}}\cdot\Delta p_j $$

$\bar{\bar{x}}>0$ であるから，より厳密には 2 変量は正比例関係にある。

表 4 (b) より ${}^{t}\bar{x}=5331^{(千円)}$，また表 4 (a) より ${}^{0}\bar{x}=5532^{(千円)}$ であるから，次のようになる。

$$ \bar{\bar{x}}=\frac{1}{2}(5331+5532)^{(千円)}=5431.5^{(千円)} $$

よって，2 変量の組をなす全データは

$$ {}^{\Delta\bar{x}}C_j=5431.5\times\Delta p_j $$

の上に落ちる。このために，相関係数は

$r=1.0000$

となり，関連データの組 $\left(\Delta p_j, {}^{\Delta\bar{x}}C_j\right)$ は正の完全相関の関係にある(7)。

(7)　木村和範「相関係数の数学的性質にかんする一考察」『経済論集』（北海学園大学）第 65 巻第 3 号，2017 年。

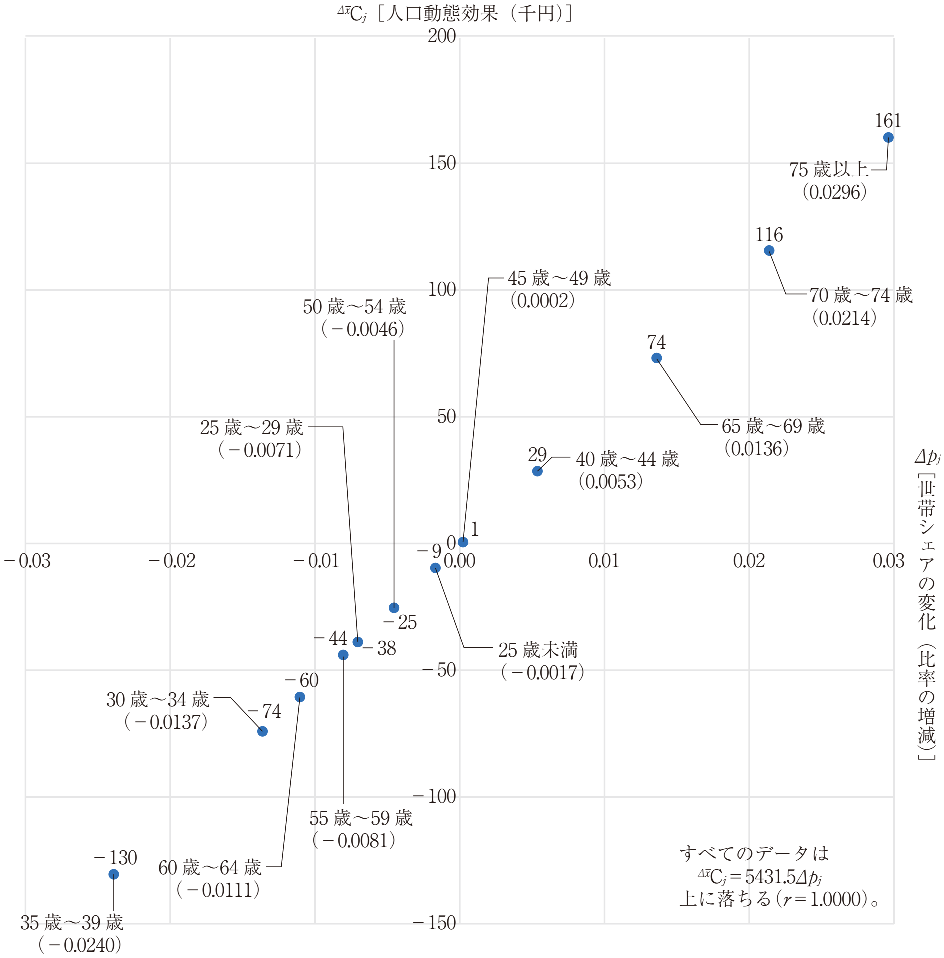

図 6　年齢階級別世帯シェアの変化（横軸：比率の増減）と年齢階級別人口動態効果（縦軸：千円）（2009 年～2014 年）

注記：●の上（または下）の数字は年齢階級別人口動態効果を示し，（　）内数字は世帯シェアの増減を示す（小数第 5 位四捨五入，その 100 倍がパーセントポイント）。

出所：表 7

む　す　び

本稿では，人口動態効果に着目して，人口構成の変化と所得分布の関係を考察した。その要点と今後の課題を述べて，擱筆する。

2 時点における統計量（平均対数偏差（別解），相加平均，標準偏差，分散，対数分散）の差から算出される全年齢階級の人口動態効果 $\sum {}^{\Delta Stat}_{Classis}V$ は，年齢階級別の人口動態効果 ${}^{\Delta Stat}_{Classis}C_j$ の総和 ($\sum {}^{\Delta Stat}_{Classis}C_j$) である。ここでは，$\sum {}^{\Delta Stat}_{Classis}V$ を全人口動態効果（total effect of population ageing），あるいは総合人口動態効果（whole effect of population ageing）ということにする。

他方で，年齢階級ごとに算出される人口動態効果 ${}^{\Delta Stat}_{Classis}C_j$ を個別人口動態効果（partial effect of population ageing）ということにする。これは，全（総合）人口動態効果 ($\sum {}^{\Delta Stat}_{Classis}V$) にたいする寄与分であり，かつ，それぞれが $\sum {}^{\Delta Stat}_{Classis}V$ の構成要素であるから，要素人口

動態効果（constituent effect of population ageing）といってもよい。このとき，次式を得る。

$$\overbrace{\sum {}_{Classis}^{\Delta Stat}V}^{\text{全(総合)人口動態効果}}$$

$$=\overbrace{{}_{Classis}^{\Delta Stat}C_1+\cdots+{}_{Classis}^{\Delta Stat}C_j+\cdots+{}_{Classis}^{\Delta Stat}C_m}^{\text{個別(要素)人口動態効果}(m\text{ 個})}$$

本稿では，上式左辺の全（総合）人口動態効果 $(\sum {}_{Classis}^{\Delta Stat}V)$ の数学的性質を検討して，それがゼロとなること，すなわち，

$$\sum {}_{Classis}^{\Delta Stat}V=0$$

であることを証明した。そして，全国消費実態調査結果（2009 年と 2014 年）が表章する年齢階級別年間収入の相加平均を用いて，全年齢階級の人口動態効果（$\sum {}_{Classis}^{\Delta \bar{x}}V$）がゼロになることを確かめた。木村［2018：47 頁］で取り上げた 2 時点間の標準偏差の変化にたいする全年齢階級の寄与分の計算式もまた，相加平均の要因分解式と基本的に異なるところはない。このため，2 時点における標準偏差の差分にたいする全年齢階級の人口動態効果（$\sum {}_{Classis}^{\Delta \sigma}V$）もまた，ゼロになるはずである。旧稿（木村［2018］）において一部の値が非ゼロとなったのは，復元した年齢階級別世帯シェアの値に内包された誤差によるものと考えられる。

他方で，定数 $\overline{Stat}$ と変数 Δp_j の積としてあたえられる個別（要素）人口動態効果 $({}_{Classis}^{\Delta Stat}C_j)$ は，年齢階級別世帯シェア (Δp_j) が増加するときには正，変化しない場合は 0，減少する場合は負の値となり，次のようになる。

$${}_{Classis}^{\Delta Stat}C_j \gtreqless 0$$

上式における等号の成立条件は，2 時点間における世帯シェアの変化の大きさが同一であること，すなわち

$${}^{t}p_j={}^{0}p_j$$

であり，換言すれば

$$\Delta p_j={}^{t}p_j-{}^{0}p_j=0$$

である。しかし，通常は，世帯シェアは，年々変化し，

$$\Delta p_j\neq 0$$

となり，

$${}_{Classis}^{\Delta Stat}C_j\neq 0$$

である。ただし，2 時点間における世帯シェアの変化が軽微であり，

$$\Delta p_j\fallingdotseq 0$$

となることは十分にありうる。たとえば，2009 年から 2014 年までの 5 年間における年齢階級シェアの変化を見ると，増減が±0.5 パーセントポイント（以下，パーセントポイントを pp と表わす）に満たない階級は 3 つあった（25 歳未満［−0.17 pp］；45 歳〜49 歳［+0.02 pp］；50 歳〜54 歳［−0.46 pp］（図 6 参照）。

2 時点間の世帯シェアの変化がゼロになり $(\Delta p_j=0)$，そのために Δp_j を乗数とし，2 時点における統計量の相加平均 $(\overline{Stat})$ を被乗数とする年齢階級別の個別（要素）人口動態効果（${}_{Classis}^{\Delta Stat}C_j$）がゼロ，すなわち

$${}_{Classis}^{\Delta Stat}C_j=\overline{Stat}\cdot\Delta p_j=0$$

となる可能性を否定できないことから，数学的には

$${}_{Classis}^{\Delta Stat}C_j \gtreqless 0$$

が成立する。しかし，世帯シェアの変化実態を勘案すれば，個別（要素）人口動態効果 $({}_{Classis}^{\Delta Stat}C_j)$ は次の 3 通りの値を取り得ると考えるのが現実的である。つねにゼロとなる全（総合）人口動態効果 $(\sum {}_{Classis}^{\Delta Stat}V)$ とは，この

点が異なっている。

$$\begin{cases} {}^{\Delta Stat}_{Classis}C_j > 0 \\ {}^{\Delta Stat}_{Classis}C_j \fallingdotseq 0 \\ {}^{\Delta Stat}_{Classis}C_j < 0 \end{cases}$$

個別（要素）人口動態効果（${}^{\Delta Stat}_{Classis}C_j$）は年齢階級別世帯シェアの変化が大きければ，それだけ大きくなり，小さくなれば小さい値になる。分解対象の統計量が通貨単位で計測されるとき，その統計量にかんする人口動態効果も通貨単位であたえられる。この場合，${}^{\Delta Stat}_{Classis}C_j$ は，年齢階級別世帯シェアの変化による寄与分を通貨単位で評価する指標としての機能を果たしている。個別（要素）人口動態効果は，統計量（平均対数偏差（別解），相加平均，標準偏差，分散，対数分散）にかんする年齢階級別の変化にたいして，級内変動および級間変動とともに，実質的に寄与している。それとともに，全（総合）人口動態効果にたいしても，実質的に寄与している。全（総合）人口動態効果がゼロになるということは，年齢階級別の人口動態効果（個別（要素）人口動態効果）が全年齢階級の人口動態効果（全（総合）人口動態効果）に寄与していないということではない。個別（要素）人口動態効果を１つずつ見れば，それは非ゼロの値の分だけ個別的に寄与している。個別（要素）人口動態効果の値が一般に非ゼロであることは，全（総合）人口動態効果が，つねにゼロになることと矛盾しない。これは，個別（要素）人口動態効果が，①一方では，年齢階級別寄与分の一部を構成し，②他方では，総変動にたいする寄与分の一部（全（総合）人口動態効果）を構成するという，寄与の階層性に起因する。この階層性は，二重性と言い換えてもよい。人口動態効果は，①個別（要素）人口動態効果でもあり，②全（総合）人口動態効果でもあるからである。

以上のように考えると，全所得階級の平均対数偏差を２時点で計算し，その差をとるとき，その差分は，級内変動，級間変動，人口動態効果の３つの要因に分解されるが，この３つの要因のうち，人口動態効果は「見かけ上」の格差を示す指標としての機能を果たすという見解にたいしては，その検討が提起される[(8)]。　（2018 年 7 月 11 日提出）

---

(8)　『2006（平成 18）年　経済財政白書』（内閣府，352 頁［付注 3-8　異時点間の平均対数偏差変化の要因分解］）では，平均対数偏差の差（ΔMLD）は以下のように要因分解され，「見かけ上」の格差（人口動態効果）の計測算式が示されている。なお，引用者による照会にたいする内閣府担当者からのメール（2009 年 2 月 23 日発信）にもとづいて，以下の第 5 項は公表内容とは変えた（『2006（平成 18）年　経済財政白書』（以下，『白書』という。）のウエッブサイト版では，以下の第 5 項は，印刷公刊されたときの第 2 項と同様に

$$\sum_{g=1}^{m}\bar{\alpha}_g\cdot\left\{\ln\left(\bar{Y}^{01}/Y_g^1\right)-\ln\left(\bar{Y}^{0}/Y_g^0\right)\right\}$$

となっている［http://www5.cao.go.jp/j-j/wp-je06/pdf/06-00603.pdf, accessed on June 29, 2018］）。

$$\begin{aligned} \Delta MLD = & \sum_{g=1}^{m}\bar{\alpha}_g\cdot\Delta MLD_g && \cdots \text{第1項} \\ & +\sum_{g=1}^{m}\bar{\alpha}_g\cdot\left\{\ln\left(\bar{Y}^{01}/Y_g^1\right)-\ln\left(\bar{Y}^{0}/Y_g^0\right)\right\} && \cdots \text{第2項} \\ & +\sum_{g=1}^{m}\overline{MLD}_g\cdot\Delta\alpha_g && \cdots \text{第3項} \\ & +\sum_{g=1}^{m}\overline{\ln}\left(\bar{Y}/Y_g\right)\cdot\Delta\alpha_g && \cdots \text{第4項} \\ & +\sum_{g=1}^{m}\bar{\alpha}_g\cdot\left\{\ln\left(\bar{Y}^{1}/\bar{Y}^{01}\right)-\ln\left(\bar{Y}^{0}/\bar{Y}^{0}\right)\right\} && \cdots \text{第5項} \end{aligned}$$

ただし，「母集団が全部で m のグループで構成され，第 g 階層の所得平均と平均対数偏差及び全体に占める比率をそれぞれ Y_g，MLD_g，α_g とする」。また，「母集団を m 年齢階層に区分したとして，$\bar{Y}^{01}=\sum_{g=1}^{m}\alpha_g^0\cdot Y_g^1$ は，年齢構成を時点 0 で固定した上での時点 1 における第 g 年齢階層の平均所得を表し，式中のバーは，それぞれの値の時点 0 及び 1 における平均値を表すものとする」（引用はいずれも『白書』352 頁）。

『白書』では，第 1 項が「年齢階層内効果」，第 2 項が「年齢階層間効果」，第 3 項から第 5 項までの 3 項が「人口動態効果」を意味すると述べている。しかし，次のように考えることはできないであろうか。

付表 1　世帯主の年齢階級別　1 世帯当たり 1 か月間の収入と支出（2009（平成 21）年調査結果部分）

収支項目	総世帯												
	平均	25 歳未満	25 歳～29 歳	30 歳～34 歳	35 歳～39 歳	40 歳～44 歳	45 歳～49 歳	50 歳～54 歳	55 歳～59 歳	60 歳～64 歳	65 歳～69 歳	70 歳～74 歳	75 歳以上
集計世帯数	55,089	318	1,164	3,131	4,743	4,935	4,893	5,341	6,301	7,090	6,495	5,093	5,586
世帯数分布(抽出率調整)	50,014,894	782,236	2,027,847	3,211,672	4,073,581	3,998,164	3,971,027	4,345,239	5,059,291	5,897,688	5,733,526	4,782,907	6,131,716
(1 万 分 比)	10,000	156	405	642	814	799	794	869	1,012	1,179	1,146	956	1,226
年間収入(千円)	5,532	2,703	3,809	4,887	5,756	6,632	7,415	7,901	7,267	5,387	4,699	4,093	3,643

出所：『平成 21 年　全国消費実態調査報告』第 1 巻　家計収支編　第 43 表　世帯主の年齢階級別 1 世帯当たり 1 か月間の収入と支出（https://www.e-stat.go.jp/stat-search/files?page=1&layout=datalist&tstat=000001037021&cycle=0&tclass1=000001037022&tclass2=000001038199&tclass3=000001038849&second2=1, accessed on June 22, 2018）

付表 2　世帯主の年齢階級別　1 世帯当たり 1 か月間の収入と支出（2014（平成 26）年調査結果部分）

収支項目	総世帯												
	平均	25 歳未満	25 歳～29 歳	30 歳～34 歳	35 歳～39 歳	40 歳～44 歳	45 歳～49 歳	50 歳～54 歳	55 歳～59 歳	60 歳～64 歳	65 歳～69 歳	70 歳～74 歳	75 歳以上
集計世帯数	54,208	201	963	2,107	3,649	4,985	4,713	4,687	5,162	6,578	7,317	6,322	7,527
世帯数分布(抽出率調整)	51,756,439	720,791	1,733,285	2,616,322	2,975,748	4,413,549	4,118,901	4,260,264	4,818,198	5,529,019	6,636,431	6,055,348	7,878,582
(1 万 分 比)	10,000	139	335	506	575	853	796	823	931	1,068	1,282	1,170	1,522
年間収入(千円)	5,331	2,714	4,101	4,931	5,941	6,441	6,959	7,462	7,140	5,453	4,712	4,057	3,423

出所：『平成 26 年　全国消費実態調査報告』第 1 巻　家計収支編（その 1　用途分類）第 43 表　世帯主の年齢階級別 1 世帯当たり 1 か月間の収入と支出（https://www.e-stat.go.jp/stat-search/files?page=1&layout=datalist&tstat=000001073908&cycle=0&tclass1=000001073965&tclass2=000001074840&tclass3=000001077457&second2=1, accessed on June 22, 2018）

第 2 項と第 5 項には $\overline{\alpha}_g$ が共通していること（2 項が同類項であること）に着目する。この 2 項を合算して，$\overline{\alpha}_g$ でくくり整理する（同類項を簡約する）と，次式を得る。

$$\underbrace{\sum_{g=1}^{m}\overline{\alpha}_g\cdot\left\{\ln\left(\overline{Y}^{01}/Y_g^1\right)-\ln\left(\overline{Y}^{0}/Y_g^0\right)\right\}}_{\text{第 2 項}}+\underbrace{\sum_{g=1}^{m}\overline{\alpha}_g\cdot\left\{\ln\left(\overline{Y}^{1}/\overline{Y}^{01}\right)-\ln\left(\overline{Y}^{0}/\overline{Y}^{0}\right)\right\}}_{\text{第 5 項}}$$

$$=\sum_{g=1}^{m}\overline{\alpha}_g\cdot\left[\left\{\ln\left(\overline{Y}^{01}/Y_g^1\right)-\ln\left(\overline{Y}^{0}/Y_g^0\right)\right\}+\left\{\ln\left(\overline{Y}^{1}/\overline{Y}^{01}\right)-\ln\left(\overline{Y}^{0}/\overline{Y}^{0}\right)\right\}\right]$$

$$=\sum_{g=1}^{m}\overline{\alpha}_g\cdot\left[\left\{\ln\left(\overline{Y}^{01}/Y_g^1\right)-\ln\left(\overline{Y}^{0}/Y_g^0\right)\right\}+\left\{\ln\left(\overline{Y}^{1}/\overline{Y}^{01}\right)-\ln 1\right\}\right]$$

$$=\sum_{g=1}^{m}\overline{\alpha}_g\cdot\left[\left\{\left(\ln\overline{Y}^{01}-\ln Y_g^1\right)-\left(\ln\overline{Y}^{0}-\ln Y_g^0\right)\right\}+\left\{\left(\ln\overline{Y}^{1}-\ln\overline{Y}^{01}\right)-0\right\}\right]$$

（対数の商と差の関係，および $\ln 1=0$ ($\ln 1\rightleftarrows e^0$) による。ただし e は自然対数の底）

$$=\sum_{g=1}^{m}\overline{\alpha}_g\cdot\left[\left\{-\ln Y_g^1-\left(\ln\overline{Y}^{0}-\ln Y_g^0\right)\right\}+\left(\ln\overline{Y}^{1}-0\right)\right]$$

$$=\sum_{g=1}^{m}\overline{\alpha}_g\cdot\left\{\left(\ln\overline{Y}^{1}-\ln\overline{Y}^{0}\right)-\left(\ln Y_g^1-\ln Y_g^0\right)\right\}$$

$$=\sum_{g=1}^{m}\overline{\alpha}_g\cdot\left(\Delta\ln\overline{Y}-\Delta\ln Y_g\right)\qquad ①$$

①式と表 2 に掲げた平均対数偏差の差の級間変動（全年齢階級，上段）

$$\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_i\cdot(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)$$

との間には，自然対数を使用するか，常用対数を使用するかという違いがある。そのために，両者の計算結果は異なるが，数学的には，同一と見ることができる。

他方で，第 3 項と第 4 項には $\Delta\alpha_g$ が共通し，2 項が同類項であることに着目する。上と同様に，同類項を簡約するために，2 項を合算して，$\Delta\alpha_g$ でくくり整理すると次式を得る。

$$\underbrace{\sum_{g=1}^{m}\overline{MLD}_g\cdot\Delta\alpha_g}_{\text{第 3 項}}+\underbrace{\sum_{g=1}^{m}\overline{\ln}\left(\overline{Y}/Y_g\right)\cdot\Delta\alpha_g}_{\text{第 4 項}}$$

$$=\sum_{g=1}^{m}\Delta\alpha_g\left\{\overline{MLD}_g+\overline{\ln}\left(\overline{Y}/Y_g\right)\right\}$$

$$=\sum_{g=1}^{m}\Delta\alpha_g\left\{\overline{MLD}_g+\left(\overline{\ln}\ \overline{Y}-\overline{\ln}\ Y_g\right)\right\}\qquad ②$$

ここで，表 2 の注記

$$\begin{cases}\overline{\log\overline{x}}=\dfrac{1}{2}(\log{}^{t}\overline{x}+\log{}^{0}\overline{x})\\[2ex]\overline{\log\overline{x}_j}=\dfrac{1}{2}(\log{}^{t}\overline{x}_j+\log{}^{0}\overline{x}_j)\end{cases}$$

を想起すれば，自然対数によるか，常用対数によるかの違いはあるが，②式の $\left(\overline{\ln}\ \overline{Y}-\overline{\ln}\ Y_g\right)$ と表 2 の $\left(\overline{\log\overline{x}}-\overline{\log\overline{x}_j}\right)$（木村［2018：38 頁］における(1-28)式も参照）とは，その趣旨において同様と考えることができる。

以上により，『白書』から上に引用した第 1 項が「年齢階層内効果」を意味することに変わりはないが，『白書』の第 2 項と第 5 項が「年齢階層間効果」を示し，第 3 項と第 4 項が「人口動態効果」を示すと考えることはできないであろうか。

正　誤　表

木村和範「所得格差の変動にたいする人口動態効果の計測」(『経済論集』(北海学園大学)第66巻第1号，2018年6月)

※$\overline{p}_j$とすべき箇所を$\overline{p}$と記した箇所等の訂正

頁・段	行	正	誤
35・右	8	加平均$\overline{p}_j$である。	加平均$\overline{p}$である。
36・左	1	$\overline{p}_j=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^t k_j}{{}^t N}+\frac{{}^0 k_j}{{}^0 N}\right)$	$\overline{p}=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^t k_j}{{}^t N}+\frac{{}^0 k_j}{{}^0 N}\right)$
	12	$\overline{p}_j\,\Delta MLD_j+\overline{MLD}_j\Delta p$	$\overline{p}\Delta MLD_j+\overline{MLD}_j\Delta p$
36・右	下11	$\overline{p}_j=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^t k_j}{{}^t N}+\frac{{}^0 k_j}{{}^0 N}\right)$	$\overline{p}=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^t k_j}{{}^t N}+\frac{{}^0 k_j}{{}^0 N}\right)$
37・左	下9	$\overline{p}_j\,(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)$	$\overline{p}(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)$
37・右	下7	$\overline{p}_j\,(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)$	$\overline{p}(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)$
38・左	4	$=\overbrace{\overline{p}_j\,(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)}^{\text{(ｉ)による[(1-23)式]}}+\cdots$	$=\overbrace{\overline{p}(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)}^{\text{(ｉ)による[(1-23)式]}}+\cdots$
	8	$\overline{p}_j\,\Delta MLD_j+\Delta p\overline{MLD}_j$	$\overbrace{\overline{p}\Delta MLD_j+\Delta p\overline{MLD}_j}$
	10	$=\overbrace{\overline{p}_j\,(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)}^{\text{(ｉ)による[(1-23)式]}}+\cdots$	$=\overbrace{\overline{p}(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)}^{\text{(ｉ)による[(1-23)式]}}+\cdots$
	下9	$=\overbrace{\overline{p}_j\,\Delta MLD_j+\Delta p\overline{MLD}_j}^{\text{①：(1-12)式第1項((1-17式))}}$	$=\overbrace{\overline{p}\Delta MLD_j+\Delta p\overline{MLD}_j}^{\text{①：(1-12)式第1項((1-17式))}}$
	下8	$+\overbrace{\overline{p}_j\,(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)+\cdots}^{\text{②：(1−12)式第2項((1-26式))}}$	$+\overbrace{\overline{p}(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)+\cdots}^{\text{②：(1-12)式第2項((1-26式))}}$
	下7	$=\overline{p}_j\,\Delta MLD_j+\overline{p}_j\,(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)$	$=\overline{p}\Delta MLD_j+\overline{p}(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)$
	下5	$=\overline{p}_j\Delta MLD_j+\overline{p}_j(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)$	$=\overline{p}\Delta MLD_j+\overline{p}(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)$
	下3	$=\quad\overbrace{\overline{p}_j\Delta MLD_j}^{\text{階級シェアの変動を固定したときの級内変動の差の寄与分（第}j\text{階級）}}$	$=\quad\overbrace{\overline{p}\Delta MLD_j}^{\text{階級シェアの変動を固定したときの級内変動の差の寄与分（第}j\text{階級）}}$
	下2	$+\quad\overbrace{\overline{p}_j(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)}^{\text{階級シェアの変動を固定したときの級間変動の差の寄与分（第}j\text{階級）}}$	$+\quad\overbrace{\overline{p}(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)}^{\text{階級シェアの変動を固定したときの級間変動の差の寄与分（第}j\text{階級）}}$
38・右	7	$\Delta MLD=\quad\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j\Delta MLD_j}^{\text{級内変動の差の寄与分（全年齢階級）}}$	$\Delta MLD=\quad\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}\Delta MLD_j}^{\text{級内変動の差の寄与分（全年齢階級）}}$
	8	$+\quad\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)}^{\text{級間変動の差の寄与分（全年齢階級）}}$	$+\quad\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\overline{p}(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)}^{\text{級間変動の差の寄与分（全年齢階級）}}$
46・左	下18	解析に用いられるのは，…	解析用いられるのは，…