タイトル	所得格差の変動にたいする人口動態効果の計測
著者	木村，和範；KIMURA，Kazunori
引用	季刊北海学園大学経済論集，66(1)：29-53
発行日	2018-06-30

《論説》

所得格差の変動にたいする人口動態効果の計測

木　村　和　範*

〈要旨〉

人口動態効果の検出に使用される平均対数偏差の差の要因分解法を応用して，２時点間の相加平均の差および同じく２時点間の標準偏差の差を，①級内変動，②級間変動，③人口動態効果の３つに要因分解した。

〈Abstract〉

Applying the statistical technique of decomposition of the differences between two mean logarithmic deviations at different time points, the author decomposes the differences between arithmetic means into three elements: intra-variation, inter-variation and the effect of population ageing. Using the same technique, he then decomposes the differences between two standard deviations into the same kind of three elements.

〈叙述の順序〉

*　本学名誉教授，本学経済学部客員教授

はじめに

所得 x にかんする統計系列が，たとえば年齢を量的標識として m 個の年齢階級に分割されているものとする。この系列にかんして，基準時点（0）における所得分布の平均対数偏差（mean logarithmic deviation：MLD）を ${}^{0}MLD$ とし，比較時点（t）の平均対数偏差を ${}^{t}MLD$ とする。このとき，それぞれの平均対数偏差は，級内変動を $\sum_{Intra} V$，級間変動を $\sum_{Inter} V$ とすれば，次のように分解される。

$$
{}^{t}MLD = \sum_{Intra}{}^{t}V + \sum_{Inter}{}^{t}V
$$

$$
{}^{0}MLD = \sum_{Intra}{}^{0}V + \sum_{Inter}{}^{0}V
$$

ここで和の記号（∑）を用いたのは，各変動がすべての年齢階級にかんする変動の合計としてあたえられるからである。

また，2 時点間の平均対数偏差の差 ΔMLD をとると，

$$
\Delta MLD = {}^{t}MLD - {}^{0}MLD
$$

は，①級内変動 ($\sum^{\Delta MLD}_{Intra} V$)，②級間変動 ($\sum^{\Delta MLD}_{Intra} V$)，③人口動態効果($\sum^{\Delta MLD}_{Classis} V$)に分解することができ，

$$
\Delta MLD = \sum^{\Delta MLD}_{Intra} V + \sum^{\Delta MLD}_{Inter} V + \sum^{\Delta MLD}_{Classis} V
$$

となることが，ムッカジーとショロックスによって解明されている(1)。平均対数偏差の変動にたいして果たすこの第 3 項（人口動態効果）の寄与分は「見かけ上」の格差を示すと言われることがある(2)。

平均対数偏差の差を要因分解したムッカジーとショロックスの見解を検討し，人口動態効果が計測する格差は，「見かけ上」ではなく，実質的な格差であることを，かつて指摘したことがある(3)。また，平均対数偏差が原系列の対数変換を前提とすることについて，アマルティア・センの見解を紹介して，対数変換は，大きな値の数量の変動よりも，むしろ小さな値の数量の変動に鋭敏であり，高額所得者層の所得変化にたいしては感度が低く，そのこともあって，対数変換前の原系列分布と変換後の分布とではその形状が著しく異なることを指摘して，対数変換の有効性に疑義を述べた(4)。そして，原系列の対数変換を不要とする標準偏差の要因分解式を誘導して，所得格差の統計解析を試みた。

しかし，旧著（『格差は「見かけ上」か：所得分布の統計解析』日本経済評論社　2013 年 3 月）では説明が粗である箇所もある。一つは，平均対数偏差が

$$
MLD \geqq 0
$$

となることを数学的に証明していなかったこ

---

(1)　Moohkerjee, D. and Shorrocks, A. F., “A Decomposition Analysis of the Trend in UK Income Inequality,” *The Economic Journal*, Vol. 92, 1982. この論文では，人口動態効果のことを「年齢効果（Age Effect）」と言っているが，それが「見かけ上」の格差をもたらすとの叙述は見当らない。

(2)　『2006（平成 18）年　経済財政白書―成長条件が復元し，新たな成長を目指す日本経済―』（内閣府）は，「所得格差を示す指数の動向を見る際には，高齢化といった人口動態の影響を把握する必要もある。ジニ係数で表される所得格差の長期的な上昇傾向については，人口構造の高齢化の進展により見かけ上所得格差が拡大している可能性もある。」と述べ（262 頁），ジニ係数による所得格差分析を補うべく，平均対数偏差によって人口動態効果を計測している（263 頁，353 頁）。

(3)　木村和範『格差は「見かけ上」か：所得分布の統計解析』日本経済評論社　2013 年（以下，木村［2013］），第 1 章「平均対数偏差と「見かけ上」の格差」（初出：杉森滉一・木村和範・金子治平・上藤一郎編著『社会の変化と統計情報』（現代社会と統計　Ⅰ）北海道大学出版会，2009 年　第 6 章「所得格差の統計的計測―平均対数偏差と「見かけ上」の格差―」）

(4)　木村［2013］，第 2 章「所得分布の要因分解式とその応用可能性」（とくに 28 頁以下）。

とである[(5)]。また，旧著では，２時点間の標準偏差の差の要因分解について，より詳細な要因分解式が誘導されておらず，統計解析手法が伴うべき数学的エレガンスの点では欠陥もある。本稿は，これらの不備を補うことを目的とする。

旧著刊行後，５年を経て，２時点間における平均対数偏差の要因分解式の誘導を応用すれば，対数変換する以前の原系列についてもとめた①２時点間の総平均（相加平均）の差にかんする要因分解式と②総変動（標準偏差）の差にかんする要因分解式を誘導できることが，ようやく分った。総平均（相加平均）の差，そして総変動（標準偏差）の差もまた，級内変動，級間変動，人口動態効果に分解されるのである。

本稿は上記の要因分解を取り上げる。さらに，新たに誘導した要因分解式を旧著の分析で活用したミクロデータ（全国消費実態調査(1989 年，1994 年，1999 年，2004 年)，二人以上世帯と単身世帯の年間収入）に応用して，所得格差の統計解析を行う。この統計解析をそのものとして見れば，用いた統計の鮮度が落ちているために，現実分析と言うにはためらいを禁じえない。要因分解式の応用例，あるいは旧著における計算結果の検算を示したにすぎない。

１．平均対数偏差とその要因分解[(6)]

⑴　任意の１時点における平均対数偏差（*MLD*）の要因分解

総世帯数を N とする世帯所得の分布にかんする統計系列 $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ が m 個のグループ（年齢階級）に分割されるとき，第 j 番目の階級に落ちる世帯の数を k_j とおく。階級別の世帯数 $(k_1, k_2, \cdots, k_j, \cdots, k_m)$ の総和 $(k_1+k_2+\cdots+k_j+\cdots+k_m)$ は，階級別にグループ分けする前と同様に，N である。

以下で取り上げる平均対数偏差とは，N 個の項からなる系列の相加平均 $\bar{x}$ を対数変換した $\log\bar{x}$ と系列を構成する各項の値 x_i を対数変換した $\log x_i$ の差 $(\log\bar{x}-\log x_i)$ の相加平均であり，次式で定義される。

$$MLD=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\log\bar{x}-\log x_i) \qquad (1\text{-}1)$$

これを変形すれば，次のようになる。

$$\begin{aligned}MLD&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log\bar{x}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log x_i\\&=\frac{1}{N}\cdot N\log\bar{x}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log x_i \qquad (1\text{-}2)\end{aligned}$$

以下では(1–2)式の第１項と第２項をそれぞれ分けて取上げ，最終的に(1–2)式を級内変動と級間変動に要因分解する。

①　(1–2)式第１項：

$$\frac{1}{N}\cdot N\log\bar{x}$$

原系列が m 個のグループ（階級）に分割されているとき，第 j 番目の階級の個数を，一般に，k_j で表せば，系列を構成する項の総数 N は，次のようになる。

(5)　平均対数偏差が非負となることにかんする，マクローリン型の不等式を援用した証明については，木村和範「平均対数偏差の数学的性質にかんする覚書」『経済論集』（北海学園大学）第 65 巻第１・２合併号，2017 年。

(6)　以下の叙述は，「不平等，格差の分析手法　対数標準偏差　シュロックス分解」（http://takamasa.at.webry.info/200805/article_1.html, accessed on Jan. 18, 2018）によるところが大きい。記して，感謝の意を表す。なお，本稿における叙述の統一性を図るために，文字や記号を変えたほか，適宜，引用者の責任で表記を変えた。上記タイトル中の「対数標準偏差」は，平均対数偏差とも言われている。

$$N = k_1 + k_2 + \cdots + k_j + \cdots + k_m = \sum_{j=1}^{m} k_j \quad (1\text{-}3)$$

したがって，(1-3)式を(1-2)式第 1 項に代入すれば，以下のようになる。

$$\frac{1}{N} \cdot N \cdot \log \bar{x}$$

$$= \frac{1}{N} \times \left(\sum_{j=1}^{m} k_j\right) \times \log \bar{x}$$

$$= \frac{1}{N} \overbrace{(k_1 + k_2 + \cdots\cdots + k_j + \cdots\cdots + k_m)}^{m\text{個(第1階級から第}m\text{階級まで)}} \times \log \bar{x}$$

$$= \frac{1}{N} \overbrace{(k_1 \log \bar{x} + k_2 \log \bar{x} + \cdots\cdots + k_j \log \bar{x} + \cdots\cdots + k_m \log \bar{x})}^{m\text{個(第1階級から第}m\text{階級まで)}}$$

$$= \overbrace{\frac{k_1}{N} \log \bar{x} + \frac{k_2}{N} \log \bar{x} + \cdots\cdots + \frac{k_j}{N} \log \bar{x} + \cdots\cdots \frac{k_m}{N} \log \bar{x}}^{m\text{個(第1階級から第}m\text{階級まで)}} \quad (1\text{-}4)$$

② (1-2)式第 2 項：

$$-\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \log x_i$$

総個数を N とする個別値 x_i は，m 個の階級に分割されている。上述したように，一般に，第 j 番目の階級の個数は k_j であるから，(1-2)式第 2 項は次のようになる。

$$-\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \log x_i$$

$$= -\frac{1}{N} \overbrace{\left(\sum_{i=1}^{k_1} \log x_i + \sum_{i=1}^{k_2} \log x_i + \cdots\cdots + \sum_{i=1}^{k_j} \log x_i + \cdots\cdots + \sum_{i=1}^{k_m} \log x_i\right)}^{m\text{個(第1階級から第}m\text{階級まで)}}$$

$$= \overbrace{-\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k_1} \log x_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k_2} \log x_i - \cdots\cdots - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k_j} \log x_i - \cdots\cdots - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k_m} \log x_i}^{m\text{個(第1階級から第}m\text{階級まで)}}$$

$$= \overbrace{-\frac{k_1}{N} \cdot \frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^{k_1} \log x_i - \frac{k_2}{N} \cdot \frac{1}{k_2} \sum_{i=1}^{k_2} \log x_i - \cdots\cdots - \frac{k_j}{N} \cdot \frac{1}{k_j} \sum_{i=1}^{k_j} \log x_i - \cdots\cdots - \frac{k_m}{N} \cdot \frac{1}{k_m} \sum_{i=1}^{k_m} \log x_i}^{m\text{個(第1階級から第}m\text{階級まで)}} \quad (1\text{-}5)$$

(1-4) 式 [(1-2) 式 第 1 項] と (1-5) 式 [(1-2)式第 2 項] により，(1-2)式で表された平均対数偏差は以下のようになる。

MLD

$$= \frac{1}{N} \cdot N \log \bar{x} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \log x_i \quad (1\text{-}2)[\text{再掲}]$$

$$= \overbrace{\frac{k_1}{N} \log \bar{x} + \frac{k_2}{N} \log \bar{x} + \cdots\cdots + \frac{k_j}{N} \log \bar{x} + \cdots\cdots + \frac{k_m}{N} \log \bar{x}}^{\text{第1項((1-4)式)}}$$

$$\overbrace{-\frac{k_1}{N} \cdot \frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^{k_1} \log x_i - \frac{k_2}{N} \cdot \frac{1}{k_2} \sum_{i=1}^{k_2} \log x_i - \cdots\cdots - \frac{k_j}{N} \cdot \frac{1}{k_j} \sum_{i=1}^{k_j} \log x_i - \cdots\cdots - \frac{k_m}{N} \cdot \frac{1}{k_m} \sum_{i=1}^{k_m} \log x_i}^{\text{第2項((1-5)式)}}$$

$$= \left(\frac{k_1}{N} \log \bar{x} - \frac{k_1}{N} \cdot \frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^{k_1} \log x_i\right)$$

$$+ \left(\frac{k_2}{N} \log \bar{x} - \frac{k_2}{N} \cdot \frac{1}{k_2} \sum_{i=1}^{k_2} \log x_i\right) + \cdots\cdots$$

$$+ \left(\frac{k_j}{N} \log \bar{x} - \frac{k_j}{N} \cdot \frac{1}{k_j} \sum_{i=1}^{k_j} \log x_i\right) + \cdots\cdots$$

$$+ \left(\frac{k_m}{N} \log \bar{x} - \frac{k_m}{N} \cdot \frac{1}{k_m} \sum_{i=1}^{k_m} \log x_i\right) \quad (1\text{-}6)$$

(1-6) 式は，系列全体の平均対数偏差 MLD が m 個の階級別に計算された寄与分の総和として，あたえられることを示している。(1-6)式により，この MLD にたいする第 j 階級の寄与分を示す一般項 $({}^{MLD}C_j)$ は

$${}^{MLD}C_j = \frac{k_j}{N} \log \bar{x} - \frac{k_j}{N} \cdot \frac{1}{k_j} \sum_{i=1}^{k_j} \log x_i \quad (1\text{-}7)$$

であることが示される。(1-7)式を整理すれば，以下のようになる。

${}^{MLD}C_j$

$$= \frac{k_j}{N} \log \bar{x} - \frac{k_j}{N} \cdot \frac{1}{k_j} \sum_{i=1}^{k_j} \log x_i \quad (1\text{-}7)[\text{再掲}]$$

$$= \frac{k_j}{N} \left(\log \bar{x} - \frac{1}{k_j} \sum_{i=1}^{k_j} \log x_i\right)$$

$$= \frac{k_j}{N} \left\{\left(\log \bar{x} - \frac{1}{k_j} \sum_{i=1}^{k_j} \log x_i\right) + (\log \bar{x}_j - \log \bar{x}_j)\right\}$$

$$(\because \quad \log \bar{x}_j - \log \bar{x}_j = 0)$$

$$= \frac{k_j}{N} \left\{(\log \bar{x} - \log \bar{x}_j) + \left(\log \bar{x}_j - \frac{1}{k_j} \sum_{i=1}^{k_j} \log x_i\right)\right\}$$

$$=\frac{k_j}{N}\left\{(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)+\frac{1}{k_j}\left(k_j\cdot\log\bar{x}_j-\sum_{i=1}^{k_j}\log x_i\right)\right\}$$

$$=\frac{k_j}{N}\left[(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)+\frac{1}{k_j}\left\{\overbrace{(\log\bar{x}_j+\cdots+\log\bar{x}_j)}^{k_j\text{個}}-\sum_{i=1}^{k_j}\log x_i\right\}\right]$$

$$=\frac{k_j}{N}(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)$$
$$+\frac{k_j}{N}\cdot\frac{1}{k_j}\left\{\overbrace{(\log\bar{x}_j+\cdots+\log\bar{x}_j)}^{k_j\text{個}}-\overbrace{(\log x_1+\cdots+\log x_{k_j})}^{k_j\text{個}}\right\}$$

$$=\frac{k_j}{N}(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)$$
$$+\frac{k_j}{N}\cdot\frac{1}{k_j}\left\{\overbrace{(\log\bar{x}_j-\log x_1)+\cdots+(\log\bar{x}_j-\log x_{k_j})}^{k_j\text{個}}\right\}$$

$$=\frac{k_j}{N}(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)+\frac{k_j}{N}\cdot\frac{1}{k_j}\sum_{i=1}^{k_j}(\log\bar{x}_j-\log x_i) \quad (1\text{-}8)$$

(1-8)式第1項は，対数変換した総平均（相加平均）と階級別の（同じく対数変換した）平均（相加平均）との乖離を，当該階級のシェア（k_j/N）をウェイトとして計測している。したがって，これは級間変動の指標と見なすことができる。

他方で，(1-8) 式第2項の数理的意味を考察するために，ここで平均対数偏差が

$$MLD=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\log\bar{x}-\log x_i) \quad (1\text{-}1)\text{［再掲］}$$

で定義されることを想起する。そうすると，(1-8)式第2項を構成する

$$\frac{1}{k_j}\sum_{i=1}^{k_j}(\log\bar{x}_j-\log x_i)$$

は，第 j 階級の平均対数偏差 MLD_j であることが分かる。これは，級内変動の指標である。

以上により，(1-7)式は，

$$^{MLD}C_j$$
$$=\frac{k_j}{N}\log\bar{x}-\frac{k_j}{N}\cdot\frac{1}{k_j}\sum_{i=1}^{k_j}\log x_i \quad (1\text{-}7)\text{［再掲］}$$

$$=\frac{k_j}{N}(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)+\frac{k_j}{N}\cdot\underbrace{\frac{1}{k_j}\sum_{i=1}^{k_j}(\log\bar{x}_j-\log x_i)}_{\text{第}j\text{階級の平均対数偏差}MLD_j} \quad (1\text{-}8)\text{［再掲］}$$

$$=\overbrace{\frac{k_j}{N}(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)}^{\text{級間変動（第}j\text{階級）}}+\overbrace{\frac{k_j}{N}\cdot MLD_j}^{\text{級内変動（第}j\text{階級）}} \quad (1\text{-}8)'$$

と表記することができる。

これまでの考察により，系列全体の平均対数偏差にたいする第 j 階級の寄与分は，当該階級のシェアをウェイトとする級間変動と級内変動の2つに要因分解されることが分かる。本稿における表記の統一性を図るために，(1-8)′式の第1項と第2項の順序を入れ替えて，これを新たに

$$^{MLD}C_j=\overbrace{\frac{k_j}{N}\cdot MLD_j}^{\text{級内変動（第}j\text{階級）}}+\overbrace{\frac{k_j}{N}(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)}^{\text{級間変動（第}j\text{階級）}} \quad (1\text{-}9)$$

と表記することにする。

ここで，階級別のシェア (k_j/N) を p_j とおくと，(1-9)式は

$$^{MLD}C_j=\overbrace{p_j\cdot MLD_j}^{\text{級内変動（第}j\text{階級）}}+\overbrace{p_j(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)}^{\text{級間変動（第}j\text{階級）}} \quad (1\text{-}9)'$$

である。

(1-9)′式は，系列全体の変動を示す平均対数偏差（MLD）にたいする第 j 階級の寄与分であり，各年齢階級の寄与分の総和がもたらす総変動（全年齢階級の平均対数偏差）は(1-9)式および(1-9)′式から以下のようになる。

$$MLD=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}\cdot MLD_j}^{\text{級内変動（全年齢階級）}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)}^{\text{級間変動（全年齢階級）}} \quad (1\text{-}10)$$

$$=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot MLD_j}^{\text{級内変動（全年齢階級）}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}p_j(\log\bar{x}-\log\bar{x}_j)}^{\text{級間変動（全年齢階級）}} \quad (1\text{-}10)'$$

(2)　2 時点間における平均対数偏差の差 ($\varDelta MLD$) の要因分解

基準時点（0）と比較時点（t）における平均対数偏差は，(1-10)式により，それぞれ，次のようになる。

基準時点：

$$
{}^{0}MLD = \sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\cdot{}^{0}MLD_j + \sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}(\log{}^{0}\overline{x} - \log{}^{0}\overline{x}_j)
$$

比較時点：

$$
{}^{t}MLD = \sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}\cdot{}^{t}MLD_j + \sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}(\log{}^{t}\overline{x} - \log{}^{t}\overline{x}_j)
$$

2 時点間の平均対数偏差の差 $\varDelta MLD$ は，以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\varDelta MLD \\
&= {}^{t}MLD - {}^{0}MLD \\
&= \left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}\cdot{}^{t}MLD_j + \sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}(\log{}^{t}\overline{x} - \log{}^{t}\overline{x}_j)\right\} \\
&\quad - \left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\cdot{}^{0}MLD_j + \sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}(\log{}^{0}\overline{x} - \log{}^{0}\overline{x}_j)\right\} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}\cdot{}^{t}MLD_j - \sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\cdot{}^{0}MLD_j\right) \\
&\quad + \left[\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}(\log{}^{t}\overline{x} - \log{}^{t}\overline{x}_j)\right\} - \left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}(\log{}^{0}\overline{x} - \log{}^{0}\overline{x}_j)\right\}\right]
\end{aligned} \tag{1-11}
$$

(1-11)式は，$\varDelta MLD$ がすべての階級の寄与分からなり，各寄与分の総和であることを示している。ここで，$\varDelta MLD$ にたいする第 j 階級の寄与分 (${}^{\varDelta MLD}C_j$) にかんする項だけを抽出すると，次式を得る。

$$
\begin{aligned}
&{}^{\varDelta MLD}C_j \\
&= \left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}\cdot{}^{t}MLD_j - \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\cdot{}^{0}MLD_j\right) \\
&\qquad + \left\{\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}\cdot(\log{}^{t}\overline{x} - \log{}^{t}\overline{x}_j) - \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\cdot(\log{}^{0}\overline{x} - \log{}^{0}\overline{x}_j)\right\}
\end{aligned} \tag{1-12}
$$

(1-12)式を展開するために，任意の実数について成立する次の恒等式

$$
\begin{aligned}
&a_1b_1 - a_2b_2 \\
&\equiv \frac{1}{2}(a_1+a_2)(b_1-b_2) + \frac{1}{2}(a_1-a_2)(b_1+b_2)
\end{aligned} \tag{1-13}
$$

ここに，$a_i \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}$（ただし，$i=1,2$）

を用いる[7]。

以下では，(1-12)式を第 1 項と第 2 項に分けて，それぞれを①と②で整理し，その後，③で 2 項を合算して，$\varDelta MLD$ の要因分解式と $\varDelta MLD$ にたいする年齢階級別の寄与分 (${}^{\varDelta MLD}C_j$) にかんする要因分解式を誘導する。

①　(1-12)式第 1 項：

$$
\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}\cdot{}^{t}MLD_j - \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\cdot{}^{0}MLD_j
$$

---

(7)　(1-13)式は，平均対数偏差の差だけでなく，以下で取上げる相加平均の差および標準偏差の差を要因分解するときの要である（脚注 6 に掲げた「不平等，格差の分析手法，対数標準偏差　シュロックス分解」参照）。(1-13)式の証明は以下のとおり。

(1-13)式の右辺

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(a_1b_1 - a_1b_2 + a_2b_1 - a_2b_2) + \frac{1}{2}(a_1b_1 + a_1b_2 - a_2b_1 - a_2b_2) \\
&= \frac{1}{2}(a_1b_1 - a_1b_2 + a_2b_1 - a_2b_2 + a_1b_1 + a_1b_2 - a_2b_1 - a_2b_2) \\
&= \frac{1}{2}(2a_1b_1 - 2a_2b_2) \\
&= a_1b_1 - a_2b_2 \\
&= \text{(1−13)式の左辺}
\end{aligned}
$$

q. e. d.

ここで取り上げた恒等式については任意の実数を前提したが，複素数 ($a_1 \in \mathbb{C}, a_2 \in \mathbb{C}, b_1 \in \mathbb{C}, b_2 \in \mathbb{C}$ の場合）においても成立する。これを証明するために，

$$
\begin{cases}
a_1 = A + Bi \\
a_2 = C + Di \\
b_1 = E + Fi \\
b_2 = G + Hi
\end{cases}
$$

(1-12)式第1項において，

$$\begin{cases} \dfrac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}=a_1 \\ {}^{t}MLD_j=b_1 \\ \dfrac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}=a_2 \\ {}^{0}MLD_j=b_2 \end{cases} \tag{1-14}$$

とおく。

(1-14)式を(1-12)式第1項［(1-15)式とする］に代入すると，(1-13)式（証明済みの恒等式），すなわち

$$a_1b_1-a_2b_2$$
$$\equiv\frac{1}{2}(a_1+a_2)(b_1-b_2)+\frac{1}{2}(a_1-a_2)(b_1+b_2) \quad \text{(1-13)[再掲]}$$

により(1-15)式は以下のようになる。

$$\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}\cdot{}^{t}MLD_j-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\cdot{}^{0}MLD_j \quad \text{(1-15)}$$
［(1-12)式第1項］

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}+\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)({}^{t}MLD_j-{}^{0}MLD_j)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)({}^{t}MLD_j+{}^{0}MLD_j)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}+\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)({}^{t}MLD_j-{}^{0}MLD_j)$$
$$+\frac{1}{2}({}^{t}MLD_j+{}^{0}MLD_j)\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right) \quad \text{(1-15)}'$$

(1-15)′式において，第1項を構成する

$$\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}+\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)$$

は，第 j 階級にかんする2時点のシェアの相加平均 $\bar{p}$ である。

また，同じく(1-15)′式の第1項を構成する

$${}^{t}MLD_j-{}^{0}MLD_j$$

は，第 j 階級にかんする2時点間の平均対数偏差の差 ΔMLD_j である。

さらに，(1-15)′式の第2項を構成する

$$\frac{1}{2}({}^{t}MLD_j+{}^{0}MLD_j)$$

は，第 j 階級にかんする2時点における2つの平均対数偏差の相加平均 $\overline{MLD}_j$ である。

そして，同じく(1-15)′式の第2項を構成する

$$\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}$$

は，第 j 階級にかんする2時点間のシェアの差 Δp_j である。

以上を整理すれば，以下のようになる。

とおく（ただし，i は虚数単位）。このとき，

$$\begin{aligned} a_1b_1&=(A+Bi)(E+Fi)\\ &=AE+AFi+BEi+BFi^2\\ &=(AE-BF)+(AF+BE)i \end{aligned}$$

となる。同様に，次式を得る。

$$\begin{aligned} a_1b_2&=(AG-BH)+(AH+BG)i\\ a_2b_1&=(CE-DF)+(CF+DE)i\\ a_2b_2&=(CG-DH)+(CH+DG)i \end{aligned}$$

以上の4本の数式を，(1−13)式の右辺を変形した

$$\frac{1}{2}(a_1b_1-a_1b_2+a_2b_1-a_2b_2+a_1b_1+a_1b_2-a_2b_1-a_2b_2)$$

に代入し，整理すると，

$$\{(AE-BF)+(AF+BE)i\}-\{(CG-DH)+(CH+DG)i\}=a_1b_1-a_2b_2$$

となる。

以上から，(1−13)式は実数だけでなく，複素数について成立することが証明される。

q. e. d.

$$\begin{cases} \bar{p}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{{}^tk_j}{{}^tN}+\dfrac{{}^0k_j}{{}^0N}\right) \\ \Delta MLD_j={}^tMLD_j-{}^0MLD_j \\ \overline{MLD}_j=\dfrac{1}{2}({}^tMLD_j+{}^0MLD_j) \\ \Delta p_j=\dfrac{{}^tk_j}{{}^tN}-\dfrac{{}^0k_j}{{}^0N} \end{cases} \qquad (1\text{-}16)$$

(1-16)式を(1-15)′式（(1-12)式第 1 項［(1-15)式］の誘導式）に代入すれば，以下のようになる。

$$\frac{{}^tk_j}{{}^tN}\cdot{}^tMLD_j-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\cdot{}^0MLD_j \qquad (1\text{-}15)［再掲］$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^tMLD_j-{}^0MLD_j)$$

$$+\frac{1}{2}({}^tMLD_j+{}^0MLD_j)\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right) \qquad (1\text{-}15)'［再掲］$$

$$=\bar{p}\ \Delta MLD_j+\overline{MLD}_j\,\Delta p_j \qquad (1\text{-}17)$$

これが(1-12)式第 1 項である。

② (1-12)式第 2 項：

$$\frac{{}^tk_j}{{}^tN}\cdot(\log{}^t\bar{x}-\log{}^t\bar{x}_j)-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\cdot(\log{}^0\bar{x}-\log{}^0\bar{x}_j)$$

ΔMLD にたいする第 j 階級の寄与分にかんする項だけを抽出した(1-12)式の第 2 項を整理する。そのために，(1-12)式第 1 項を整理するときと同様の手法を用いて，

$$a_1b_1-a_2b_2$$

$$\equiv\frac{1}{2}(a_1+a_2)(b_1-b_2)+\frac{1}{2}(a_1-a_2)(b_1+b_2) \qquad (1\text{-}13)［再掲］$$

における a_1, b_1, a_2, b_2 を次のようにおく。

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{{}^tk_j}{{}^tN} \\ b_1=\log{}^t\bar{x}-\log{}^t\bar{x}_j \\ a_2=\dfrac{{}^0k_j}{{}^0N} \\ b_2=\log{}^0\bar{x}-\log{}^0\bar{x}_j \end{cases} \qquad (1\text{-}18)$$

(1-18)式を(1-12)式第 2 項［(1-19)式とする］に代入すると，(1-13)式により(1-19)式は以下のようになる。

$$\frac{{}^tk_j}{{}^tN}\cdot(\log{}^t\bar{x}-\log{}^t\bar{x}_j)-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\cdot(\log{}^0\bar{x}-\log{}^0\bar{x}_j) \qquad (1\text{-}19)$$

［(1-12)式第 2 項］

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{(\log{}^t\bar{x}-\log{}^t\bar{x}_j)-(\log{}^0\bar{x}-\log{}^0\bar{x}_j)\}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{(\log{}^t\bar{x}-\log{}^t\bar{x}_j)+(\log{}^0\bar{x}-\log{}^0\bar{x}_j)\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{(\log{}^t\bar{x}-\log{}^0\bar{x})-(\log{}^t\bar{x}_j-\log{}^0\bar{x}_j)\}$$

$$+\frac{1}{2}\{(\log{}^t\bar{x}-\log{}^t\bar{x}_j)+(\log{}^0\bar{x}-\log{}^0\bar{x}_j)\}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right) \qquad (1\text{-}20)$$

後のために，(1-12)式第 1 項を整理したときと同様に（(1-16)式参照)，

$$\begin{cases} \bar{p}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{{}^tk_j}{{}^tN}+\dfrac{{}^0k_j}{{}^0N}\right) \\ \Delta p_j=\dfrac{{}^tk_j}{{}^tN}-\dfrac{{}^0k_j}{{}^0N} \end{cases} \qquad (1\text{-}21)$$

とおく。

ここで，(1-20)式第 1 項を構成する $(\log{}^t\bar{x}-\log{}^0\bar{x})$ と $(\log{}^t\bar{x}_j-\log{}^0\bar{x}_j)$ の数理的意味を考える。

$$\log{}^t\bar{x}-\log{}^0\bar{x}$$

は，比較時点と基準時点における総平均（相加平均）をそれぞれ対数変換したときの差 $\Delta\log\bar{x}$ であり，また，同じく(1-20)式第 1 項を構成する

$$\log {}^t\overline{x}_j - \log {}^0\overline{x}_j$$

は，２時点間におけるそれぞれの階級別の相加平均を対数変換したときの差 $\Delta\log\overline{x}_j$ である。

以上を整理すると，

$$\begin{cases} \Delta\log\overline{x} = \log {}^t\overline{x} - \log {}^0\overline{x} \\ \Delta\log\overline{x}_j = \log {}^t\overline{x}_j - \log {}^0\overline{x}_j \end{cases} \tag{1-22}$$

となる。

これまでの叙述を参照して，(1-19)式［(1-12)式第２項］と同値の関係にある次式

$$\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{(\log {}^t\overline{x}-\log {}^0\overline{x})-(\log {}^t\overline{x}_j - \log {}^0\overline{x}_j)\}$$
$$+\frac{1}{2}\{(\log {}^t\overline{x}-\log {}^t\overline{x}_j)+(\log {}^0\overline{x}-\log {}^0\overline{x}_j)\}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)$$
(1-20)［再掲］

を整理する。そのために，以下では(1-20)式を第１項と第２項に分けて考察する。

(i)　(1-20)式第１項：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{(\log {}^t\overline{x}-\log {}^0\overline{x})-(\log {}^t\overline{x}_j-\log {}^0\overline{x}_j)\}$$

上式は，(1-21)式と(1-22)式により，以下のように書き直すことができる。

$$\overline{p}(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j) \tag{1-23}$$

(ii)　(1-20)式第２項：

$$\frac{1}{2}\{(\log {}^t\overline{x}-\log {}^t\overline{x}_j)+(\log {}^0\overline{x}-\log {}^0\overline{x}_j)\}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)$$

上式を(1-24)式として，整理する。

$$\frac{1}{2}\{(\log {}^t\overline{x}-\log {}^t\overline{x}_j)+(\log {}^0\overline{x}-\log {}^0\overline{x}_j)\}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right) \tag{1-24}$$

$$=\frac{1}{2}\{(\log {}^t\overline{x}+\log {}^0\overline{x})-(\log {}^t\overline{x}_j+\log {}^0\overline{x}_j)\}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)$$

$$=\left\{\frac{1}{2}(\log {}^t\overline{x}+\log {}^0\overline{x})-\frac{1}{2}(\log {}^t\overline{x}_j+\log {}^0\overline{x}_j)\right\}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right) \tag{1-24$'$}$$

(1-24)′式の第１項を構成する

$$\frac{1}{2}(\log {}^t\overline{x}+\log {}^0\overline{x})$$

は２つの時点における対数変換後の総平均（相加平均）の相加平均であるから，

$$\overline{\log\overline{x}}=\frac{1}{2}(\log {}^t\overline{x}+\log {}^0\overline{x})$$

と表すことができる。同じく(1-24)′式の第１項を構成する

$$\frac{1}{2}(\log {}^t\overline{x}_j+\log {}^0\overline{x}_j)$$

は２つの時点における第 j 階級にかんする対数変換後の相加平均の相加平均であるから，

$$\overline{\log\overline{x}_j}=\frac{1}{2}(\log {}^t\overline{x}_j+\log {}^0\overline{x}_j)$$

と表すことができる。

以上から，(1-24)′式［(1-20)式第２項］は，

$$(\overline{\log\overline{x}}-\overline{\log\overline{x}_j})\Delta p_j \tag{1-25}$$

$$\left(\because\quad \Delta p_j=\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)$$

と書き直すことができる。

ここで，(i)において(1-20)式第１項から誘導した

$$\overline{p}(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)$$
(1-23)［再掲］

と(ii)において(1-20)式第２項から誘導した

$$(\overline{\log\overline{x}}-\overline{\log\overline{x}_j})\Delta p_j$$
(1-25)［再掲］

を合算する。これにより，(1-19)式から誘導された(1-20)式は以下のようになる。

$$\frac{{}^tk_j}{{}^tN}\cdot(\log {}^t\overline{x}-\log {}^t\overline{x}_j)-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\cdot(\log {}^0\overline{x}-\log {}^0\overline{x}_j)$$
(1-19)［再掲］

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^t k_j}{{}^t N}+\frac{{}^0 k_j}{{}^0 N}\right)\{(\log{}^t\bar{x}-\log{}^0\bar{x})-(\log{}^t\bar{x}_j-\log{}^0\bar{x}_j)\}$$

$$+\frac{1}{2}\{(\log{}^t\bar{x}-\log{}^t\bar{x}_j)+(\log{}^0\bar{x}-\log{}^0\bar{x}_j)\}\left(\frac{{}^t k_j}{{}^t N}-\frac{{}^0 k_j}{{}^0 N}\right)$$

(1-20)［再掲］

$$=\overbrace{\bar{p}(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)}^{\text{(i)による[(1-23)式]}}+\overbrace{(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j})\Delta p_j}^{\text{(ii)による[(1-25)式]}}$$

(1-26)

③　(1-12)式の第 1 項と第 2 項の合算

①で誘導した(1-12)式第 1 項［(1-17)式］

$$\bar{p}\Delta MLD_j+\overline{MLD}_j\,\Delta p_j$$

(1-17)［再掲］

と，②で誘導した(1-12)式第 2 項［(1-26)式］

$$\bar{p}(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)+(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j})\Delta p_j$$

(1-26)［再掲］

を合算すれば，ΔMLD にたいする第 j 階級の寄与分を示す(1-12)式は以下のようになる。

$${}^{\Delta MLD}C_j$$

$$=\left(\frac{{}^t k_j}{{}^t N}\cdot{}^t MLD_j-\frac{{}^0 k_j}{{}^0 N}\cdot{}^0 MLD_j\right)$$

$$+\left\{\frac{{}^t k_j}{{}^t N}\cdot(\log{}^t\bar{x}-\log{}^t\bar{x}_j)-\frac{{}^0 k_j}{{}^0 N}\cdot(\log{}^0\bar{x}-\log{}^0\bar{x}_j)\right\}$$

(1-12)［再掲］

$$=\overbrace{\bar{p}\Delta MLD_j+\overline{MLD}_j\,\Delta p_j}^{\text{①：(1-12)式第 1 項((1-17)式)}}$$

$$+\overbrace{\bar{p}(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)+(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j})\cdot\Delta p_j}^{\text{②：(1-12)式第 2 項((1-26)式)}}$$

$$=\bar{p}\Delta MLD_j+\bar{p}(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)$$

$$+\overline{MLD}_j\,\Delta p_j+(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j})\cdot\Delta p_j$$

$$=\bar{p}\Delta MLD_j+\bar{p}(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)$$

$$+\{\overline{MLD}_j+(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j})\}\Delta p_j$$

$$=\overbrace{\bar{p}\Delta MLD_j}^{\text{階級シェアの変動を固定したときの級内変動の差の寄与分(第 }j\text{ 階級)}}$$

$$+\overbrace{\bar{p}(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)}^{\text{階級シェアを固定したときの級間変動の差の寄与分(第 }j\text{ 階級)}}$$

$$+\overbrace{\{\overline{MLD}_j+(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j})\}\Delta p_j}^{\text{級内変動を固定し，階級別の級間変動を固定したときの階級シェアの差の寄与分(第 }j\text{ 階級)}}$$

(1-27)

(1-27)式は 2 時点間の平均対数偏差の差 ΔMLD にたいする第 j 階級の寄与分であるから，m 個からなるすべての階級の寄与分を求めるには，(1-27)式を $j=1,2,\cdots,m$ について合算すればよい。したがって，次のようになる。

$$\Delta MLD=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}\Delta MLD_j}^{\text{級内変動の差の寄与分(全年齢階級)}}$$

$$+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)}^{\text{級間変動の差の寄与分(全年齢階級)}}$$

$$+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\{\overline{MLD}_j+(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j})\}\Delta p_j}^{\text{階級シェアの差の寄与分(全年齢階級)}}$$

(1-28)

以上により，平均対数偏差の 2 時点間における変動 (ΔMLD) は，①級内変動，②級間変動，③構成要素のシェアの変動の 3 つに要因分解される。この第 3 の要因は「人口動態効果」といわれている。

2．相加平均とその要因分解

⑴　任意の 1 時点における相加平均（総平均）($\bar{x}$)の要因分解

ここでも，前と同様に総世帯数を N とする世帯別の所得分布にかんする統計系列 $(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ が m 個のグループ（年齢階級別）に分割されている。このとき，第 j 番目の階級に落ちる世帯の数を k_j とおく。階級別の世帯数 $(k_1,k_2,\cdots,k_m)$ の総和は，階級別にグループ分けする前と同様に，N である。したがって，m 個のグループに分割した原系列の総世帯 N は

$$N=\sum_{j=1}^{m}k_j \tag{2-1}$$

である。

総世帯の平均所得 $\bar{x}$（総平均）は次式のように相加平均としてあたえられる。

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i \qquad (2\text{-}2)$$

これを，級内変動と級間変動に要因分解するために，次の恒等式から数式展開を始める(8)。

$$\bar{x}\equiv\bar{x} \qquad (2\text{-}3)$$

$$=\bar{x}\times\frac{1}{N}\times N$$

$$=\bar{x}\times\frac{1}{N}\times\sum_{i=1}^{m}k_i$$

（(2-1)式参照）

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{k_i}{N}\bar{x}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{k_i}{N}\bar{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{k_j}{N}\bar{x}_j-\sum_{i=1}^{m}\frac{k_j}{N}\bar{x}_j$$

$$\left(\because\quad \sum_{i=1}^{m}\frac{k_j}{N}\bar{x}_j-\sum_{i=1}^{m}\frac{k_j}{N}\bar{x}_j=0\right)$$

$$=\overbrace{\sum_{i=1}^{m}\frac{k_j}{N}\bar{x}_j}^{\text{級内変動（全年齢階級）}}+\overbrace{\sum_{i=1}^{m}\frac{k_j}{N}(\bar{x}-\bar{x}_j)}^{\text{級間変動（全年齢階級）}} \qquad (2\text{-}4)$$

(2-4)式は，総平均（ここでは相加平均）$\bar{x}$ が，階級シェア(k_j/N)をウェイトとする$\bar{x}_j$（級内変動）の寄与分と，同じく階級シェア(k_j/N)をウェイトとする$(\bar{x}-\bar{x}_j)$（級間変動）の寄与分に要因分解されることを示している。

総平均にかんする上述の要因分解式は，m個の年齢階級の総和である。(2-4)式を参照すれば，第j番目の階級の寄与分$({}^{\bar{x}}C_j)$は次式であたえられることが分かる。

$${}^{\bar{x}}C_j=\overbrace{\frac{k_j}{N}\bar{x}_j}^{\text{級内変動（第}j\text{階級）}}+\overbrace{\frac{k_j}{N}(\bar{x}-\bar{x}_j)}^{\text{級間変動（第}j\text{階級）}} \qquad (2\text{-}5)$$

(2)　2時点間における相加平均（総平均）の差$(\Delta\bar{x})$の要因分解

基準時点（0）における所得分布の相加平均（総平均）を${}^0\bar{x}$とし，比較時点（t）については，これを${}^t\bar{x}$とおくと，それぞれの時点における総平均は，(2-4)式により以下の

---

(8)　$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$　(2-2)［再掲］

は，以下のようにも分解できる（木村和範［2013：35頁]。

第j階級の相加平均$\bar{x}_j$は

$$\bar{x}_j=\frac{1}{k_j}\sum_{i=1}^{k_j}x_i$$

$$\therefore\quad \bar{x}_j\cdot k_j=\sum_{i=1}^{k_j}x_i \qquad ①$$

すべての世帯所得の総計$(x_1+x_2+\cdots+x_N)$は，①式より

$$\sum_{i=1}^{N}x_i=\sum_{j=1}^{m}\bar{x}_j\cdot k_j \qquad ②$$

となる。この両辺に

$$\frac{1}{N}$$

を乗ずれば，②式は

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m}\bar{x}_j\cdot k_j$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}\bar{x}_j \qquad ③$$

となる。この③式もまた相加平均の分解式である。

なお，以下では後の議論のために相加平均の要因分解式による階級別シェアの復元について付言しておく（4．の脚注10参照)。

相加平均の定義により，

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i \qquad ④$$

であるから，③式と④式から

$$\bar{x}=\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{N}\bar{x}_j \qquad ⑤$$

となる。よって，系列全体の相加平均$\bar{x}$にたいする第j階級の寄与分${}^{\bar{x}}C_j$は

$${}^{\bar{x}}C_j=\frac{k_j}{N}\bar{x}_j \qquad ⑥$$

である。⑥式を変形して，

$$\frac{k_j}{N}=\frac{{}^{\bar{x}}C_j}{\bar{x}_j} \qquad ⑦$$

とすれば，第j階級の寄与分${}^{\bar{x}}C_j$とその階級の相加平均$\bar{x}_j$が既知のとき，⑦式により階級別シェアを算出することができる。

ようになる。

$$\text{基準時点：}{}^{0}\overline{x}=\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}{}^{0}\overline{x}_j+\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}({}^{0}\overline{x}-{}^{0}\overline{x}_j)$$

$$\text{比較時点：}{}^{t}\overline{x}=\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}{}^{t}\overline{x}_j+\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}({}^{t}\overline{x}-{}^{t}\overline{x}_j)$$

2 時点間の総平均の差を $\Delta\overline{x}$ とおくと，次式を得る。

$$\Delta\overline{x}$$

$$={}^{t}\overline{x}-{}^{0}\overline{x} \tag{2-6}$$

$$=\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}{}^{t}\overline{x}_j+\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}({}^{t}\overline{x}-{}^{t}\overline{x}_j)\right\}-\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}{}^{0}\overline{x}_j+\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}({}^{0}\overline{x}-{}^{0}\overline{x}_j)\right\} \tag{2-7}$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}{}^{t}\overline{x}_j-\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}{}^{0}\overline{x}_j\right)+\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}({}^{t}\overline{x}-{}^{t}\overline{x}_j)-\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}({}^{0}\overline{x}-{}^{0}\overline{x}_j)\right\} \tag{2-7$'$}$$

ここで，m 個の階級による寄与分の総和をあたえる(2-7)′式から第 j 番目の階級を抽出すると，その階級の寄与分 (${}^{\Delta\overline{x}}C_j$) が得られ，それは次式となる。

$${}^{\Delta\overline{x}}C_j=\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}{}^{t}\overline{x}_j-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}{}^{0}\overline{x}_j\right)+\left\{\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}({}^{t}\overline{x}-{}^{t}\overline{x}_j)-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}({}^{0}\overline{x}-{}^{0}\overline{x}_j)\right\} \tag{2-8}$$

(2-8)式を展開するために，すでに証明した恒等式

$$a_1b_1-a_2b_2$$

$$\equiv\frac{1}{2}(a_1+a_2)(b_1-b_2)+\frac{1}{2}(a_1-a_2)(b_1+b_2) \tag{1-13［再掲］}$$

を活用する。改めて(2-8)式第 1 項［(2-9)式とする］

$$\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}{}^{t}\overline{x}_j-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}{}^{0}\overline{x}_j \tag{2-9}$$

および，(2-8)式第 2 項［(2-10)式とする］

$$\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}({}^{t}\overline{x}-{}^{t}\overline{x}_j)-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}({}^{0}\overline{x}-{}^{0}\overline{x}_j) \tag{2-10}$$

を抜き書きすると，(2-9)式と(2-10)式のいずれもが，恒等式(1-13)式の左辺と同様の形式になっているからである。

そこで，(2-9) 式［(2-8) 式第 1 項］を変形するために，(1-13)式において

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} \\ b_1={}^{t}\overline{x}_j \\ a_2=\dfrac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N} \\ b_2={}^{0}\overline{x}_j \end{cases} \tag{2-11}$$

とおき，また(2-10)式［(2-8)式第 2 項］を変形するために，(1-13)式において

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} \\ b_1={}^{t}\overline{x}-{}^{t}\overline{x}_j \\ a_2=\dfrac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N} \\ b_2={}^{0}\overline{x}-{}^{0}\overline{x}_j \end{cases} \tag{2-12}$$

とおくことにする。

ここで，(2-8) 式第 1 項［(2-9) 式］に(2-11)式を代入し，他方で，(2-8)式第 2 項［(2-10)式］に(2-12)式を代入する。そして，これらを証明済みの(1-13)式によって整理すれば，(2-8)式は以下のようになる。

$${}^{\Delta\overline{x}}C_j$$

$$=\overbrace{\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}{}^{t}\overline{x}_j-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}{}^{0}x_j}^{\text{(2-8)式第 1 項［(2-9)式］}}+\overbrace{\left\{\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}({}^{t}\overline{x}-{}^{t}\overline{x}_j)-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}({}^{0}\overline{x}-{}^{0}x_j)\right\}}^{\text{(2-8)式第 2 項［(2-10)式］}} \tag{2-8［再掲］}$$

$$=\overbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}+\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)({}^{t}\overline{x}_j-{}^{0}\overline{x}_j)+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)({}^{t}\overline{x}_j+{}^{0}\overline{x}_j)}^{\text{(2-8)式第 1 項［(1-13)式による］}}$$

$$+\overbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}+\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)\{({}^{t}\overline{x}-{}^{t}\overline{x}_j)-({}^{0}\overline{x}-{}^{0}\overline{x}_j)\}+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)\{({}^{t}\overline{x}-{}^{t}\overline{x}_j)+({}^{0}\overline{x}-{}^{0}\overline{x}_j)\}}^{\text{(2-8)式第 2 項［(1-13)式による］}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^t\overline{x}_j-{}^0\overline{x}_j)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{({}^t\overline{x}-{}^t\overline{x}_j)-({}^0\overline{x}-{}^0\overline{x}_j)\}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^t\overline{x}_j+{}^0\overline{x}_j)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{({}^t\overline{x}-{}^t\overline{x}_j)+({}^0\overline{x}-{}^0\overline{x}_j)\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^t\overline{x}_j-{}^0\overline{x}_j)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{({}^t\overline{x}-{}^t\overline{x}_j)-({}^0\overline{x}-{}^0\overline{x}_j)\}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)[({}^t\overline{x}_j+{}^0\overline{x}_j)+\{({}^t\overline{x}-{}^t\overline{x}_j)+({}^0\overline{x}-{}^0\overline{x}_j)\}]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^t\overline{x}_j-{}^0\overline{x}_j)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{({}^t\overline{x}-{}^t\overline{x}_j)-({}^0\overline{x}-{}^0\overline{x}_j)\}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^t\overline{x}+{}^0\overline{x})$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^t\overline{x}_j-{}^0\overline{x}_j)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{({}^t\overline{x}-{}^0\overline{x})-({}^t\overline{x}_j-{}^0\overline{x}_j)\}$$
$$+\frac{1}{2}({}^t\overline{x}+{}^0\overline{x})\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right) \tag{2-13}$$

ここに，

$$\frac{{}^tk_j}{{}^tN} \text{ および } \frac{{}^0k_j}{{}^0N}$$

における N はそれぞれの時点における系列の項の総数，k は第 j 番目のグループに落ちる項数（世帯数）であり，比率 k/N はそれぞれの時点における当該グループのシェア（構成比）であるから，この２時点におけるシェアを足して，２で割れば，２時点における第 j 階級のシェアの相加平均 $\overline{p}_j$ をうる。したがって，

$$\overline{p}_j=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right) \tag{2-14}$$

と書くことができる。また，

$$\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}$$

は２時点における第 j 階級の構成比の差 Δp_j を示し，

$$\Delta p_j=\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N} \tag{2-15}$$

と表すことができる。

他方で，

$${}^t\overline{x}-{}^0\overline{x}$$

は２時点間の総平均（相加平均）の差 $\Delta\overline{x}$ であり，また，

$${}^t\overline{x}_j-{}^0\overline{x}_j$$

は２時点間における第 j 階級の相加平均の差 $\Delta\overline{x}_j$ であるから，それぞれを次のように書くことができる。

$$\begin{cases}\Delta\overline{x}={}^t\overline{x}-{}^0\overline{x}\\ \Delta\overline{x}_j={}^t\overline{x}_j-{}^0\overline{x}_j\end{cases} \tag{2-16}$$

さらにまた，${}^t\overline{x}$ と ${}^0\overline{x}$ の合計を２で割れば，２時点における相加平均の相加平均 $\bar{\bar{x}}$ を得ることができるから，

$$\bar{\bar{x}}=\frac{1}{2}({}^t\overline{x}+{}^0\overline{x}) \tag{2-17}$$

と書くことができる。

(2-14)式から(2-17)式までをまとめれば，以下のようになる。

$$\begin{cases} \bar{p}_j = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{{}^t k_j}{{}^t N} + \dfrac{{}^0 k_j}{{}^0 N}\right) \\ \Delta p_j = \dfrac{{}^t k_j}{{}^t N} - \dfrac{{}^0 k_j}{{}^0 N} \\ \Delta \bar{x} = {}^t\bar{x} - {}^0\bar{x} \\ \Delta \bar{x}_j = {}^t\bar{x}_j - {}^0\bar{x}_j \\ \bar{\bar{x}} = \dfrac{1}{2}({}^t\bar{x} + {}^0\bar{x}) \end{cases} \qquad (2\text{-}18)$$

(2-8) 式 か ら 誘 導 さ れ る (2-13) 式 に, (2-18)式を代入すれば，次式を得る。

$$^{\Delta\bar{x}}C_j$$

$$= \left(\frac{{}^t k_j}{{}^t N}{}^t\bar{x}_j - \frac{{}^0 k_j}{{}^0 N}{}^0\bar{x}_j\right) + \left\{\frac{{}^t k_j}{{}^t N}({}^t\bar{x} - {}^t\bar{x}_j) - \frac{{}^0 k_j}{{}^0 N}({}^0\bar{x} - {}^0\bar{x}_j)\right\}$$

(2-8)［再掲］

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{{}^t k_j}{{}^t N} + \frac{{}^0 k_j}{{}^0 N}\right)({}^t\bar{x}_j - {}^0\bar{x}_j)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{{}^t k_j}{{}^t N} + \frac{{}^0 k_j}{{}^0 N}\right)\{({}^t\bar{x} - {}^0\bar{x}) - ({}^t\bar{x}_j - {}^0\bar{x}_j)\}$$

$$+ \frac{1}{2}({}^t\bar{x} + {}^0\bar{x})\left(\frac{{}^t k_j}{{}^t N} - \frac{{}^0 k_j}{{}^0 N}\right) \qquad (2\text{-}13)［再掲］$$

$$= \overbrace{\bar{p}_j\,\Delta\bar{x}_j}^{\text{階級シェアの変動を固定したときの級内変動の差の寄与分(第}j\text{階級)}}$$

$$+ \overbrace{\bar{p}_j\,(\Delta\bar{x} - \Delta\bar{x}_j)}^{\text{階級シェアの変動を固定したときの級間変動の差の寄与分(第}j\text{階級)}}$$

$$+ \overbrace{\bar{\bar{x}}\,\Delta p_j}^{\text{総変動(相加平均)を固定したときの階級シェアの差の寄与分(第}j\text{階級)}}$$

(2-19)

(2-19)式は，総平均（相加平均）の変化 $(\Delta\bar{x})$ にたいする第 j 階級の寄与分である。

総平均の変化は全年齢階級の寄与分の総和としてあたえられるから，$\Delta\bar{x}$ は次式で表すことができる。

$$\Delta\bar{x}$$

$$= {}^t\bar{x} - {}^0\bar{x} \qquad (2\text{-}6)［再掲］$$

$$= \left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^t k_j}{{}^t N}{}^t\bar{x}_j + \sum_{j=1}^{m}\frac{{}^t k_j}{{}^t N}({}^t\bar{x} - {}^t\bar{x}_j)\right\} - \left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{{}^0 k_j}{{}^0 N}{}^0\bar{x}_j + \sum_{j=1}^{m}\frac{{}^0 k_j}{{}^0 N}({}^0\bar{x} - {}^0\bar{x}_j)\right\}$$

(2-7)［再掲］

$$= \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\Delta\bar{x}_j}^{\text{級内変動の差の寄与分(全年齢階級)}}$$

$$+ \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j(\Delta\bar{x} - \Delta\bar{x}_j)}^{\text{級間変動の差の寄与分(全年齢階級)}}$$

$$+ \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{\bar{x}}\,\Delta p_j}^{\text{階級シェアの差の寄与分(全年齢階級)}} \qquad (2\text{-}20)$$

(2-20)式の第 1 項は，変動の指標を相加平均としたときに，系列を構成するグループ別（年齢階級別）の構成比（シェア）が一定であるときの級内変動を示している。第 2 項は，同じく年齢階級別のシェアが一定であるときの級間変動を示している。第 3 項は，2 時点間における総平均（相加平均）が一定のもとでのシェアの変動による寄与を示している。所得格差の統計解析にいう人口動態効果は，この第 3 項によって計測される。

以上により，所得格差の分析においては，2 時点間の相加平均の変化が，①級内変動，②級間変動，③人口動態効果に分解される。

3．標準偏差とその要因分解

⑴　任意の 1 時点における標準偏差(σ)の要因分解

これまでと同様に，総世帯数を N とする世帯別の所得分布にかんする統計系列 $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ が m 個のグループ（年齢階級別）に分割されているものとする。このとき，第 j 番目の階級に落ちる世帯の数を k_j とおく（このとき $N = \sum_{j=1}^{m} k_j$）。

ここで，全系列にかんする標準偏差（総変動）を σ とおく。第 j 番目の階級の標準偏差を σ_j とおく。このとき，標準偏差で計測される全世帯の所得にかんする総変動（総標準偏差）σ は，以下のように級内変動と級間変動に分解される[9]。

$$
\begin{aligned}
\sigma &\equiv \sigma \\
&= \sigma \times \frac{1}{N} \times N \\
&= \sigma \times \frac{1}{N} \times \sum_{j=1}^{m} k_j \\
&\qquad \left(\because \quad N = \sum_{j=1}^{m} k_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{k_j}{N} \sigma \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{k_j}{N} \sigma + \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{k_j}{N} \sigma_j - \sum_{j=1}^{m} \frac{k_j}{N} \sigma_j \right) \\
&\qquad \left(\because \quad \sum_{j=1}^{m} \frac{k_j}{N} \sigma_j - \sum_{j=1}^{m} \frac{k_j}{N} \sigma_j = 0 \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{k_j}{N} \sigma_j + \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{k_j}{N} \sigma - \sum_{j=1}^{m} \frac{k_j}{N} \sigma_j \right) \\
&= \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \frac{k_j}{N} \sigma_j}^{\text{級内変動（全年齢階級）}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \frac{k_j}{N} (\sigma - \sigma_j)}^{\text{級間変動（全年齢階級）}} \qquad (3\text{-}1)
\end{aligned}
$$

（3-1）式は，標準偏差 σ で計測される総変動が m 個の所得階級から計算される寄与分の総和であることを示している。したがって，第 j 階級の寄与分（${}^{\sigma}C_j$）は次式であたえられる。

$$
{}^{\sigma}C_j = \overbrace{\frac{k_j}{N} \sigma_j}^{\text{級内変動（第}j\text{階級）}} + \overbrace{\frac{k_j}{N} (\sigma - \sigma_j)}^{\text{級内変動（第}j\text{階級）}} \qquad (3\text{-}2)
$$

（9）（3-1）式を誘導する過程で得られる

$$\sigma = \sum_{j=1}^{m} \frac{k_j}{N} \sigma$$

により，総標準偏差 σ にたいする第 j 階級の寄与分 ${}^{\sigma}C_j$ は

$$ {}^{\sigma}C_j = \frac{k_j}{N} \sigma \qquad ⑧ $$

となる。これを変形すれば，

$$ \frac{k_j}{N} = \frac{{}^{\sigma}C_j}{\sigma} \qquad ⑨ $$

となる。したがって，第 j 階級の寄与分 ${}^{\sigma}C_j$ と総標準偏差 σ が既知であれば，階級別シェア（k_j/N）を復元することができる。

（2）　2 時点間における標準偏差の差（$\Delta\sigma$）の要因分解

基準時点（0）の標準偏差（総変動）を ${}^{0}\sigma$ とおき，比較時点（t）についても同様に ${}^{t}\sigma$ とおくと，それぞれの時点における標準偏差（総変動）は以下のようになる。

$$ \text{基準時点：}{}^{0}\sigma = \sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N} {}^{0}\sigma_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N} ({}^{0}\sigma - {}^{0}\sigma_j) $$

$$ \text{比較時点：}{}^{t}\sigma = \sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} {}^{t}\sigma_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} ({}^{t}\sigma - {}^{t}\sigma_j) $$

2 時点間の標準偏差（総変動）の差を $\Delta\sigma$ とおくと，次式を得る。

$$
\begin{aligned}
&\Delta\sigma \\
&= {}^{t}\sigma - {}^{0}\sigma \\
&= \left\{ \sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} {}^{t}\sigma_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} ({}^{t}\sigma - {}^{t}\sigma_j) \right\} \\
&\quad - \left\{ \sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N} {}^{0}\sigma_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N} ({}^{0}\sigma - {}^{0}\sigma_j) \right\} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} {}^{t}\sigma_j - \sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N} {}^{0}\sigma_j \right) \\
&\quad + \left\{ \sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} ({}^{t}\sigma - {}^{t}\sigma_j) - \sum_{j=1}^{m} \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N} ({}^{0}\sigma - {}^{0}\sigma_j) \right\} \qquad (3\text{-}3)
\end{aligned}
$$

ここで，m 個ある階級のなかから第 j 番目の階級を抽出すると，その階級の寄与分（${}^{\Delta\sigma}C_j$）として次式を得る。

$$
\begin{aligned}
&{}^{\Delta\sigma}C_j \\
&= \left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} {}^{t}\sigma_j - \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N} {}^{0}\sigma_j \right) + \left\{ \frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N} ({}^{t}\sigma - {}^{t}\sigma_j) - \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N} ({}^{0}\sigma - {}^{0}\sigma_j) \right\} \\
&\qquad (3\text{-}4)
\end{aligned}
$$

（3-4）式を整理するために，平均対数偏差と相加平均の要因分解で用いた，次の恒等式を再掲する。

$$
\begin{aligned}
&a_1 b_1 - a_2 b_2 \\
&\equiv \frac{1}{2}(a_1 + a_2)(b_1 - b_2) + \frac{1}{2}(a_1 - a_2)(b_1 + b_2) \\
&\qquad (1\text{-}13)\text{［再掲］}
\end{aligned}
$$

ここで，改めて(3-4)式第 1 項［(3-5)式とする］

$$\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}{}^{t}\sigma_j-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}{}^{0}\sigma_j \tag{3-5}$$

および，(3-4)式第 2 項［(3-6)式とする］

$$\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}({}^{t}\sigma-{}^{t}\sigma_j)-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}({}^{0}\sigma-{}^{0}\sigma_j) \tag{3-6}$$

を見ると，このいずれもが，恒等式(1-13)式の左辺と同様の形式であることが分かる。そこで，(3-5)式［(3-4)式第 1 項］において

$$\begin{cases}\dfrac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}=a_1\\ {}^{t}\sigma_j=b_1\\ \dfrac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}=a_2\\ {}^{0}\sigma_j=b_2\end{cases} \tag{3-7}$$

とおき，さらに，(3-6)式［(3-4)式第 2 項］おいて

$$\begin{cases}\dfrac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}=a_1\\ {}^{t}\sigma-{}^{t}\sigma_j=b_1\\ \dfrac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}=a_2\\ {}^{0}\sigma-{}^{0}\sigma_j=b_2\end{cases} \tag{3-8}$$

とおくことにする。

(3-7)式を(3-5)式［(3-4)式第 1 項］に，そして(3-8)式を(3-6)式［(3-4)式第 2 項］に，それぞれ代入して，(1-13)式を援用すると，2 時点間の総変動（標準偏差）の差を $\Delta\sigma$ とおいたとき，その差分にたいする第 j 番目の階級の寄与分を示す(3-4)式は，以下のようになる。

$$\begin{aligned}&{}^{\Delta\sigma}C_j\\ &=\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}{}^{t}\sigma_j-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}{}^{0}\sigma_j\right)+\left\{\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}({}^{t}\sigma-{}^{t}\sigma_j)-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}({}^{0}\sigma-{}^{0}\sigma_j)\right\}\end{aligned} \tag{3-4［再掲］}$$

$$\begin{aligned}
&=\overbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}+\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)({}^{t}\sigma_j-{}^{0}\sigma_j)+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)({}^{t}\sigma_j+{}^{0}\sigma_j)}^{\text{(3-4)式第1項((1-13)式による)}}\\
&\quad+\overbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}+\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)\{({}^{t}\sigma-{}^{t}\sigma_j)-({}^{0}\sigma-{}^{0}\sigma_j)\}+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)\{({}^{t}\sigma-{}^{t}\sigma_j)+({}^{0}\sigma-{}^{0}\sigma_j)\}}^{\text{(3-4)式第2項((1-13)式による)}}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}+\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)({}^{t}\sigma_j-{}^{0}\sigma_j)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}+\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)\{({}^{t}\sigma-{}^{t}\sigma_j)-({}^{0}\sigma-{}^{0}\sigma_j)\}\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)({}^{t}\sigma_j+{}^{0}\sigma_j)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)\{({}^{t}\sigma-{}^{t}\sigma_j)+({}^{0}\sigma-{}^{0}\sigma_j)\}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}+\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)({}^{t}\sigma_j-{}^{0}\sigma_j)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}+\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)\{({}^{t}\sigma-{}^{t}\sigma_j)-({}^{0}\sigma-{}^{0}\sigma_j)\}\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)[({}^{t}\sigma_j+{}^{0}\sigma_j)+\{({}^{t}\sigma-{}^{t}\sigma_j)+({}^{0}\sigma-{}^{0}\sigma_j)\}]\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}+\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)({}^{t}\sigma_j-{}^{0}\sigma_j)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}+\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)\{({}^{t}\sigma-{}^{0}\sigma)-({}^{t}\sigma_j-{}^{0}\sigma_j)\}\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)({}^{t}\sigma+{}^{0}\sigma)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}+\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)({}^{t}\sigma_j-{}^{0}\sigma_j)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}+\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)\{({}^{t}\sigma-{}^{0}\sigma)-({}^{t}\sigma_j-{}^{0}\sigma_j)\}\\
&\quad+\frac{1}{2}({}^{t}\sigma+{}^{0}\sigma)\left(\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}\right)
\end{aligned} \tag{3-9}$$

ここで，

$$\frac{{}^{t}k_j}{{}^{t}N}\ \text{および}\ \frac{{}^{0}k_j}{{}^{0}N}$$

における N はそれぞれの時点における系列の項の総数（全世帯数），k は第 j 番目の年齢階級に落ちる世帯数であり，上記した 2 つの比率はそれぞれの時点における当該階級の

シェアを示している。この2つの比率を足して，2で割れば，2時点における第j階級のシェアの相加平均$\bar{p}_j$が得られる。したがって，

$$\bar{p}_j=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right) \tag{3-10}$$

と書くことができる。また，

$$\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}$$

は2時点における第j階級のシェアの変化Δp_jを示すから，

$$\Delta p_j=\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N} \tag{3-11}$$

と表すことができる。

他方で，

$${}^t\sigma-{}^0\sigma$$

は2時点間の全世帯にかんする総変動（総標準偏差）の差$\Delta\sigma$であり，そして，

$${}^t\sigma_j-{}^0\sigma_j$$

は2時点間における第j階級の標準偏差の差$\Delta\sigma_j$であるから，それぞれを次のように書くことができる。

$$\begin{cases}\Delta\sigma={}^t\sigma-{}^0\sigma\\ \Delta\sigma_j={}^t\sigma_j-{}^0\sigma_j\end{cases} \tag{3-12}$$

さらにまた，${}^t\sigma$と${}^0\sigma$の合計を2で割れば，標準偏差で計測した2時点間の総変動の相加平均$\bar{\sigma}$を得ることができるから，

$$\bar{\sigma}=\frac{1}{2}({}^t\sigma+{}^0\sigma) \tag{3-13}$$

と書くことができる。

(3-10)式から(3-13)式までをまとめれば，以下のようになる。

$$\begin{cases}\bar{p}_j=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\\ \Delta p_j=\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\\ \Delta\sigma={}^t\sigma-{}^0\sigma\\ \Delta\sigma_j={}^t\sigma_j-{}^0\sigma_j\\ \bar{\sigma}=\frac{1}{2}({}^t\sigma+{}^0\sigma)\end{cases} \tag{3-14}$$

(3-4)式から誘導した(3-9)式に，(3-14)式を代入すれば，次式を得る。

$$\begin{aligned}&{}^{\Delta\sigma}C_j\\ &=\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}{}^t\sigma_j-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}{}^0\sigma_j\right)+\left\{\frac{{}^tk_j}{{}^tN}({}^t\sigma-{}^t\sigma_j)-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}({}^0\sigma-{}^0\sigma_j)\right\} \quad \text{(3-4)［再掲］}\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)({}^t\sigma_j-{}^0\sigma_j)\\ &\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}+\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right)\{({}^t\sigma-{}^0\sigma)-({}^t\sigma_j-{}^0\sigma_j)\}\\ &\quad+\frac{1}{2}({}^t\sigma+{}^0\sigma)\left(\frac{{}^tk_j}{{}^tN}-\frac{{}^0k_j}{{}^0N}\right) \quad \text{(3-9)［再掲］}\\ &=\overbrace{\bar{p}_j\,\Delta\sigma_j}^{\text{階級シェアの変動を固定したときの級内変動の差の寄与分(第}j\text{階級)}}\\ &\quad+\overbrace{\bar{p}_j\,(\Delta\sigma-\Delta\sigma_j)}^{\text{階級シェアの変動を固定したときの級間変動の差の寄与分(第}j\text{階級)}}\\ &\quad+\overbrace{\bar{\sigma}\Delta p_j}^{\text{総変動(標準偏差)を固定したときの階級シェアの差の寄与分(第}j\text{階級)}}\end{aligned} \tag{3-15}$$

(3-15)式は，総変動（全年齢階級にかんする標準偏差）の差にたいする第j階級の寄与分であるから，すべての階級の寄与分の合計は次式であたえられる。

$$\begin{aligned}&\Delta\sigma\\ &=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\Delta\sigma_j}^{\text{級内変動の差の寄与分(全年齢階級)}}\\ &\quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j(\Delta\sigma-\Delta\sigma_j)}^{\text{級間変動の差の寄与分(全年齢階級)}}\\ &\quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{\sigma}\Delta p_j}^{\text{階級シェアの差の寄与分(全年齢階級)}}\end{aligned} \tag{3-16}$$

(3-16)式の第 1 項は，系列を構成するグループ別の構成比（シェア）を固定したときの級内変動を示している。第 2 項は，同じく階級別のシェアを固定したときの級間変動を示している。第 3 項は，総変動を固定したもとでのシェアの変動による寄与分を示している。これは，所得格差の統計解析にいう人口動態効果を示している。

以上により，所得格差の分析においては，2 時点間の標準偏差の変動が，①級内変動，②級間変動，③人口動態効果に分解される。

4．級内変動・級間変動・人口動態効果の計測（計算例）── 標準偏差の要因分解式の応用 ──

1．平均対数偏差とその要因分解 で見たように，2 時点間における平均対数偏差の差は，①級内変動，②級間変動，③人口動態効果の 3 つに要因分解できる。平均対数偏差がこのような数学的性質をもち，人口動態効果を計測できることもあって，所得格差の統計解析用いられるのは，つとに明らかである。本稿で考察したように，2 時点間における総平均（相加平均）の差，および総変動（標準偏差）の差もまた，①級内変動，②級間変動，③人口動態効果に要因分解できる。

ここでは，本稿で誘導した要因分解式のうち，とくに標準偏差の要因分解式を活用して，所得格差の統計解析を行う。用いるデータは法政大学日本統計研究所を窓口として，かつて独立行政法人 統計センターから提供された全国消費実態調査にかんするミクロデータ(1989 年，1994 年，1999 年，2004 年の 4 回分，いずれも二人以上世帯および単身世帯の年間収入）である。提供されたミクロデータの利用期間終了後，当該データは返却し，また定めにより中間データもすべて廃棄したが，旧著には，後日の利用に供すべく，統計解析で用いた統計表を掲載している。その誘導統計値のうち，とくに階級シェアに復元手続きを施せば，相加平均と標準偏差にかんする要因分解式にたいして利用可能な数値を得ることができる(10)。ただし，以下では，旧著における統計解析との整合性を図るために，相加平均の差の要因分解式の応用は取り上げないことにする。

すでに誘導したように，2 時点間の標準偏差（全世帯の所得分布の総標準偏差）の差は以下のように要因分解される。

$$
\begin{aligned}
&\Delta\sigma \\
&= \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\,\Delta\sigma_j}^{\text{級内変動の寄与分(全年齢階級)}} \\
&\quad + \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j(\Delta\sigma-\Delta\sigma_j)}^{\text{級間変動の寄与分(全年齢階級)}} \\
&\quad + \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{\sigma}\Delta p_j}^{\text{シェアの変動の寄与分(全年齢階級)}} \qquad \text{(3-16)[再掲]}
\end{aligned}
$$

$\Delta\sigma$ にたいする第 j 階級の寄与分を ${}^{\Delta\sigma}C_j$ とおいたので，その式を以下に再掲する。

---

(10) 旧著では，年齢階級別人口シェアについては下 2 桁までの比率を表章した（木村［2013：162 頁-163 頁]，「付表 1(a) 人口シェア(1a)（二人以上世帯，1989 年～2004 年)」「付表 1(b) 人口シェア(1b)（単身世帯，1989 年～2004 年)」)。

しかし，これら 2 表の数値は，要因分解式の応用には粗すぎることから，標準偏差の差の要因分解には，次式（3．の脚注 9 における⑨式）を用いて人口シェアを復元した。

$$\frac{k_j}{N}=\frac{{}^{\sigma}C_j}{\sigma} \qquad \text{⑨[再掲]}$$

ここに，${}^{\sigma}C_j$ は総変動（総標準偏差）σ にたいする第 j 階級の寄与分を示す

他方で，相加平均の差の要因分解には，次式（2．の脚注 8 における⑦式）を用いれば，人口シェア (k_j/N) を復元できる。

$$\frac{k_j}{N}=\frac{{}^{\bar{x}}C_j}{\bar{x}_j} \qquad \text{⑦[再掲]}$$

ここに，${}^{\bar{x}}C_j$ は総平均（相加平均）$\bar{x}$ にたいする第 j 階級の寄与分，$\bar{x}_j$ は第 j 階級の相加平均を示す

表 1　標準偏差の差の要因分解（年間収入・二人以上世帯・全年齢階級）
(万円)

変化時点	標準偏差の差	級内変動	級間変動	人口動態効果
1989 年 -2004 年	28.19	2.84	25.37	−0.02
1989 年 -1994 年	55.34	38.01	17.35	−0.02
1994 年 -1999 年	−4.63	−11.63	7.00	0.00
1999 年 -2004 年	−22.52	−22.37	−0.15	0.00

(注記) 木村［2013：162 頁-163 頁］所載の「付表 1 (a) 人口シェア（1 a）(二人以上世帯，1989 年～2004 年)」を補正し，「付表 3 (a) 年間収入の分布の標準偏差（二人以上世帯，1989 年～2004 年)」を使用した。

表 2　標準偏差の差の要因分解（年間収入・単身世帯・全年齢階級）
(万円)

変化時点	標準偏差の差	級内変動	級間変動	人口動態効果
1989 年 -2004 年	28.17	12.84	15.32	0.01
1989 年 -1994 年	33.41	27.65	5.77	−0.01
1994 年 -1999 年	17.57	−4.81	22.36	0.02
1999 年 -2004 年	−22.81	−13.05	−9.76	0.00

(注記) 木村［2013：162 頁-163 頁］所載の「付表 1 (b) 人口シェア（1 b）(単身世帯，1989 年～2004 年)」を補正し，「付表 3 (b) 年間収入の分布の標準偏差（単身世帯，1989 年～2004 年)」を使用した。

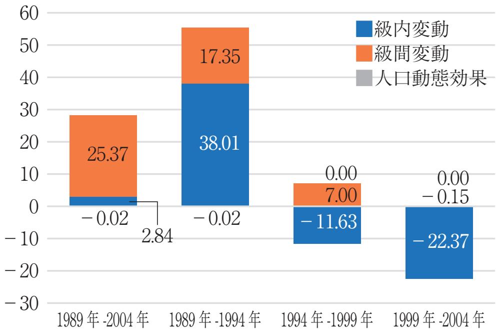


図 1　標準偏差の差の要因分解（年間収入・二人以上世帯・全年齢階級・万円）
(注記) 表 1 にもとづく。

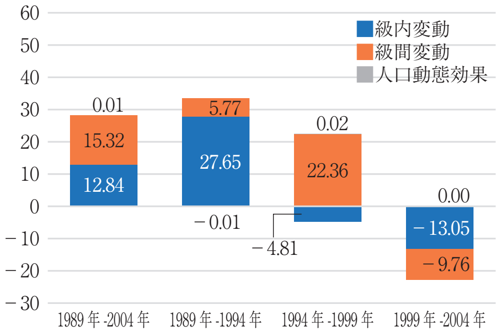


図 2　標準偏差の差の要因分解（年間収入・単身世帯・全年齢階級・万円）
(注記) 表 2 にもとづく。

$$
\begin{aligned}
&{}^{\Delta\sigma}C_j \\
=\ &\overbrace{\bar{p}_j\,\Delta\sigma_j}^{\text{級内変動の寄与分(第 } j \text{ 階級)}} \\
+\ &\overbrace{\bar{p}_j(\Delta\sigma-\Delta\sigma_j)}^{\text{級間変動の寄与分(第 } j \text{ 階級)}} \\
+\ &\overbrace{\bar{\sigma}\,\Delta p_j}^{\text{シェア変動の寄与分(第 } j \text{ 階級)}} \qquad (3\text{-}15)[\text{再掲}]
\end{aligned}
$$

表 1 と表 2 には，(3-15)式をミクロデータ（より厳密には復元したミクロデータ）に応用して，全年齢階級の標準偏差の寄与分を計算した結果を表章している。これらの表およびそれらをグラフで示した図 1 と図 2 を見ると，二人以上世帯についても単身世帯についても，全年齢階級にかんする総標準偏差の変化にたいする人口動態効果は，総じて，ほぼゼロになることが分かる[11]。

なお，表 1 と表 2 および図 1 と図 2 では，年齢階級別の寄与分が分からない。そこで，参考までに本稿の末尾には，(3-15)式を用いて，年齢階級ごとの寄与分を級内変動，級間変動，人口動態効果の 3 つの要因に分けたグラフ，およびその元になった数値を表章して掲げた（付図，付表)。

(11)　ゼロになることにかんする考察は別稿を期したい。

む す び

単一時点における平均対数偏差，相加平均，標準偏差は，それを要因分解しても級内変動と級間変動に分解されるにとどまる。人口動態効果（年齢階級別世帯のシェアの変化による格差の変動）を検出することはできない。しかし，それらの計測指標について 2 時点間の差をとれば，級内変動と級間変動に加えて，人口動態効果を検出することができる。この検出機能を果たすことから，所得格差の統計解析では，平均対数偏差や対数分散が用いられている。

平均対数偏差や対数分散による不平等度の統計的計測は，「社会的厚生との関連性が明確でないことや，不平等尺度がもつべき基本的な条件を十分には満たしていない」という欠陥を伴うことが指摘されている(12)。この見解は，平均対数偏差だけでなく，相加平均にたいしても標準偏差にたいしても妥当する。

このような指摘は，様々に開発・提案されてきた不平等度の計測指標の有効性にたいする検討をさらに深めることの必要性を提起している。この検討の重要性を理解してはいるが，本稿では，平均対数偏差の要因分解式を誘導し，さらにその誘導方式を応用して，相加平均と標準偏差のそれぞれについて，（2 時点間における差の）要因分解式を誘導した。

平均対数偏差およびその差の要因分解式は，すでに実用の段階に入り，旧聞に属することであるが，その誘導は必ずしも明証的ではない。この分解式を誘導した先駆者と見られるムッカージーとショロックスの論文では，紙幅の関係もあって，叙述が簡潔である。平均対数偏差の要因分解式の誘導にかんする有意義な情報を得たことから，本稿では，それをなぞり要因分解式を誘導した。他方で，相加平均の差および標準偏差の差の要因分解式の誘導は，寡聞にして，これまで提示されたかどうか不明である。そのために，平均対数偏差の要因分解法を応用して，相加平均と標準偏差についても検討した。旧著の補完を企図したからである。

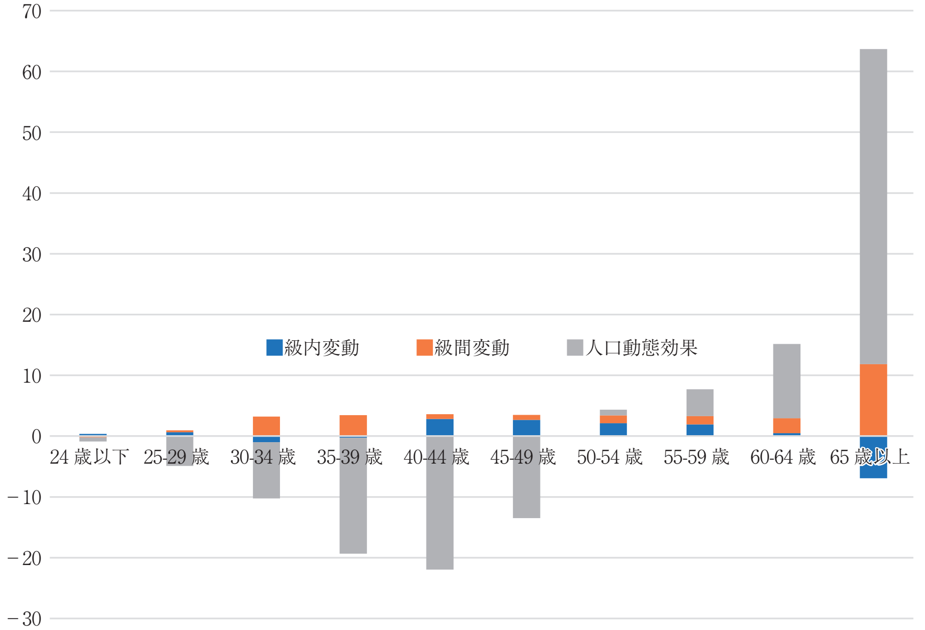
いったい，平均対数偏差は原系列の対数変換を前提する。しかし，本稿では対数変換することなく，2 時点間における相加平均の差ならびに標準偏差の差を要因分解しても人口動態効果が検出可能であることを述べた。このことは，格差分析における対数変換の有効性にかんする再考察の必要性を示唆するとともに，所得格差にかんする様々な計測指標の意義と限界にかんする検討を今後の課題として措定する。

(2018 年 4 月 27 日提出)

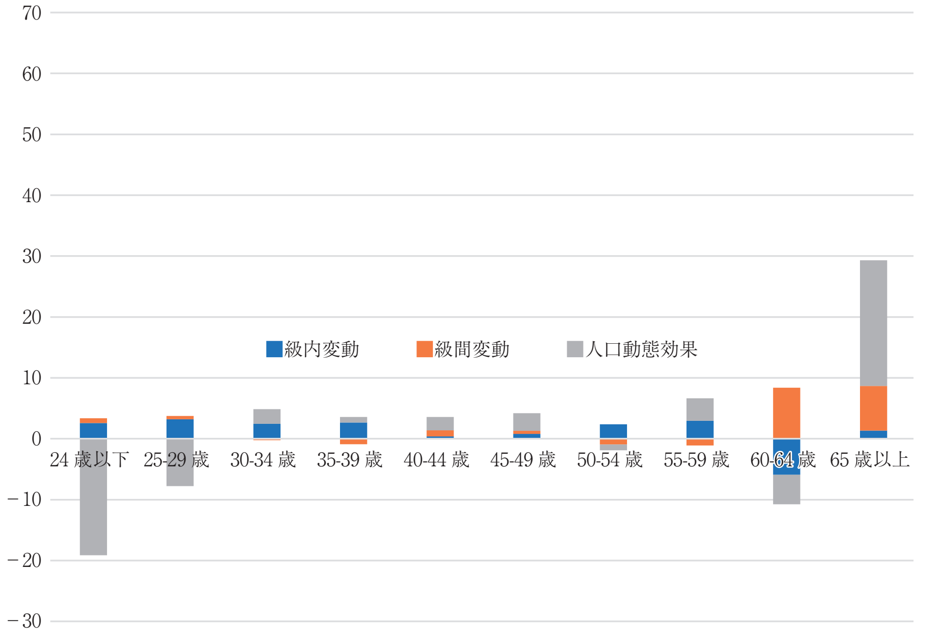
---

(12)　吉田有里「所得分配論議の再検討―世代別考察の必要性―」『甲南女子大学研究紀要』第 48 号（人間科学編）2012 年，70 頁（甲南女子大学　学術リポジトリ (konan-wu.repo.nii.sc.jp), accessed on Apr. 16，2018)。

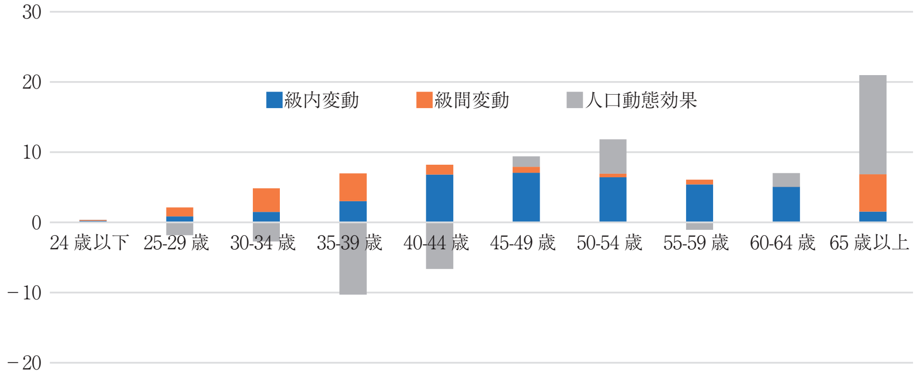
付図



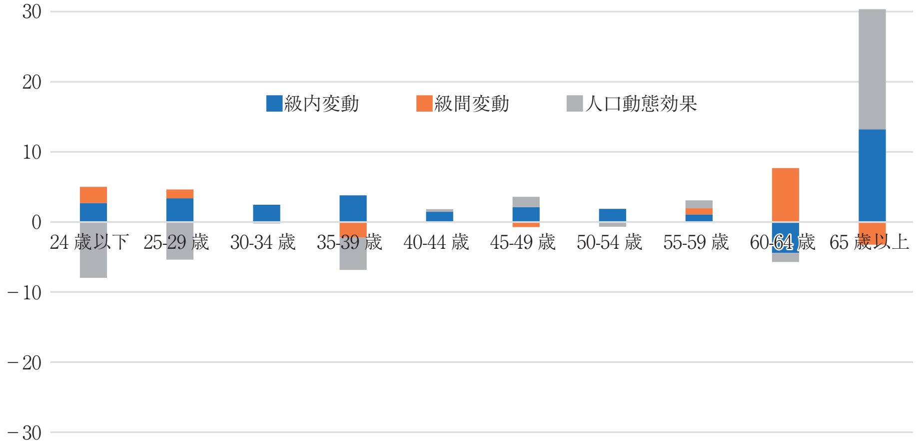
付図 1（a）　標準偏差の差にたいする年齢階級別寄与分　年間収入　二人以上世帯　1989 年～2004 年
（出所）付表 1（a）



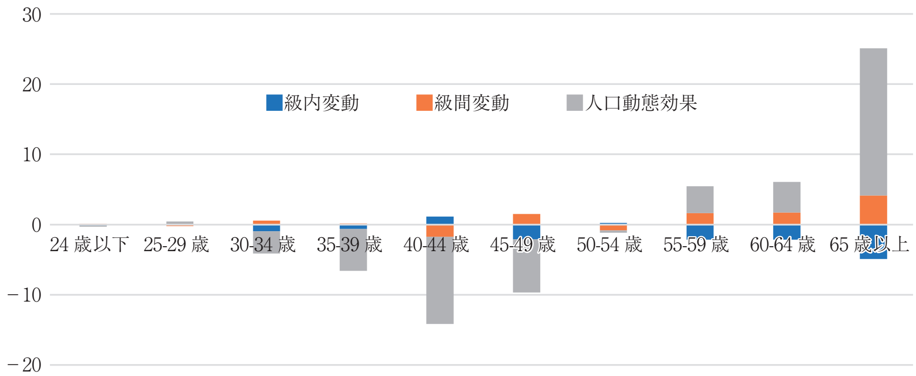
付図 1（b）　標準偏差の差にたいする年齢階級別寄与分　年間収入　単身世帯　1989 年～2004 年
（出所）付表 1（b）



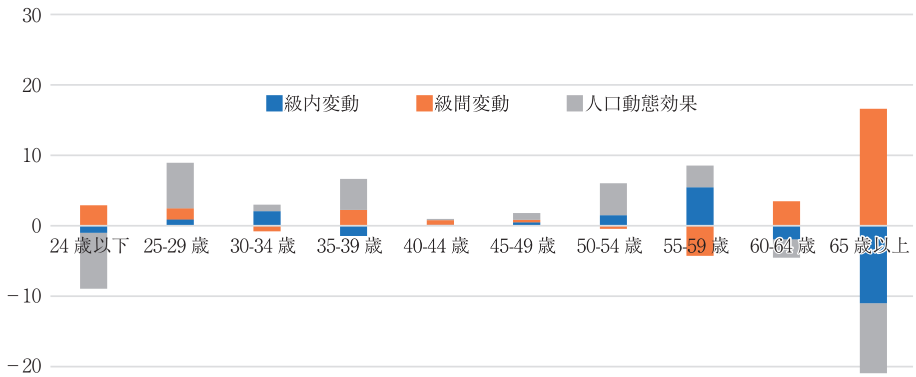
付図 2(a)　標準偏差の差にたいする年齢階級別寄与分　年間収入　二人以上世帯　1989 年〜1994 年
(出所) 付表 2 (a)



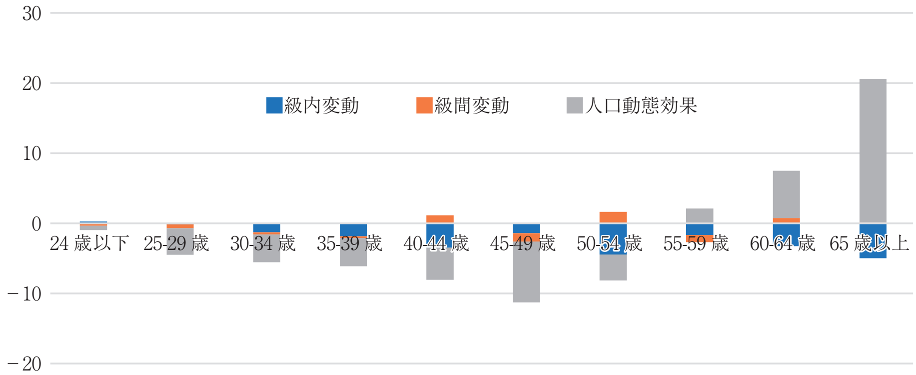
付図 2(b)　標準偏差の差にたいする年齢階級別寄与分　年間収入　単身世帯　1989 年〜1994 年
(出所) 付表 2 (b)



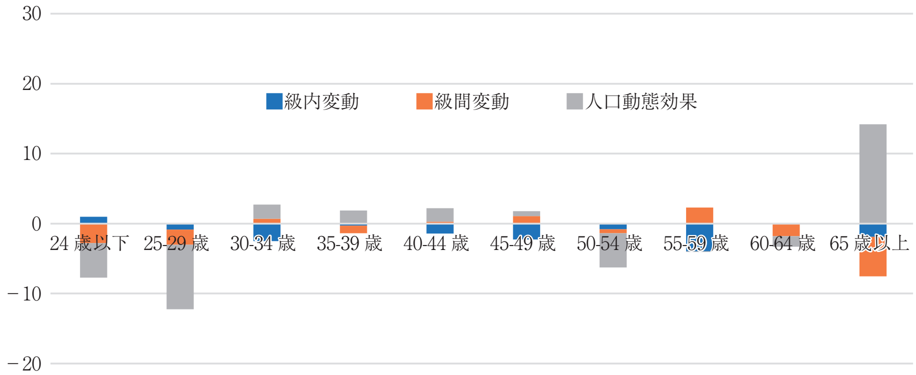
付図 3(a)　標準偏差の差にたいする年齢階級別寄与分　年間収入　二人以上世帯　1994 年〜1999 年
(出所) 付表 3 (a)



付図 3(b)　標準偏差の差にたいする年齢階級別寄与分　年間収入　単身世帯　1994 年〜1999 年
（出所）付表 3（b）



付図 4(a)　標準偏差の差にたいする年齢階級別寄与分　年間収入　二人以上世帯　1999 年〜2004 年
（出所）付表 4（a）



付図 4(b)　標準偏差の差にたいする年齢階級別寄与分　年間収入　単身世帯　1999 年〜2004 年
（出所）付表 4（b）

付表

付表 1(a)　標準偏差の差にたいする年齢階級別寄与分　年間収入　二人以上世帯（1989 年-2004 年）(万円)

	全年齢階級	24 歳以下	25-29 歳	30-34 歳	35-39 歳	40-44 歳	45-49 歳	50-54 歳	55-59 歳	60-64 歳	65 歳以上
級内変動	2.84	0.36	0.64	−0.99	−0.25	2.82	2.68	2.14	1.91	0.48	−6.95
級間変動	25.37	−0.20	0.32	3.21	3.47	0.80	0.80	1.26	1.39	2.48	11.85
人口動態効果	−0.02	−0.69	−4.90	−9.25	−19.11	−21.98	−13.51	0.97	4.42	12.20	51.83
合計	28.19	−0.54	−3.93	−7.03	−15.89	−18.36	−10.03	4.36	7.72	15.16	56.73
参考（付表 31(a)）	28.20	−0.54	−3.92	−7.03	−15.89	−18.36	−10.03	4.36	7.73	15.16	56.73

付表 1(b)　標準偏差の差にたいする年齢階級別寄与分　年間収入　単身世帯（1989 年-2004 年）(万円)

	全年齢階級	24 歳以下	25-29 歳	30-34 歳	35-39 歳	40-44 歳	45-49 歳	50-54 歳	55-59 歳	60-64 歳	65 歳以上
級内変動	12.84	2.57	3.21	2.44	2.68	0.40	0.80	2.38	2.95	−5.90	1.33
級間変動	15.32	0.79	0.52	−0.26	−0.91	0.96	0.49	−0.93	−1.10	8.39	7.36
人口動態効果	0.01	−19.11	−7.80	2.40	0.90	2.22	2.89	−0.95	3.71	−4.86	20.61
合計	28.17	−15.76	−4.07	4.58	2.67	3.58	4.18	0.50	5.55	−2.36	29.30
参考（付表 31(b)）	28.15	−15.76	−4.07	4.58	2.67	3.58	4.18	0.50	5.54	−2.36	29.29

付表 2(a)　標準偏差の差にたいする年齢階級別寄与分　年間収入　二人以上世帯（1989 年-1994 年）(万円)

	全年齢階級	24 歳以下	25-29 歳	30-34 歳	35-39 歳	40-44 歳	45-49 歳	50-54 歳	55-59 歳	60-64 歳	65 歳以上
級内変動	38.01	0.24	0.87	1.52	3.03	6.83	7.08	6.43	5.43	5.05	1.54
級間変動	17.35	0.11	1.26	3.32	3.95	1.41	0.83	0.50	0.66	0.01	5.30
人口動態効果	−0.02	0.02	−1.82	−2.74	−10.30	−6.63	1.51	4.89	−1.07	1.98	14.14
合計	55.34	0.37	0.31	2.10	−3.32	1.61	9.42	11.82	5.01	7.04	20.98
参考（付表 31(a)）	55.35	0.36	0.32	2.10	−3.32	1.61	9.42	11.82	5.02	7.04	20.98

付表 2(b)　標準偏差の差にたいする年齢階級別寄与分　年間収入　単身世帯（1989 年-1994 年）(万円)

	全年齢階級	24 歳以下	25-29 歳	30-34 歳	35-39 歳	40-44 歳	45-49 歳	50-54 歳	55-59 歳	60-64 歳	65 歳以上
級内変動	27.65	2.72	3.36	2.44	3.81	1.46	2.12	1.87	1.05	−4.41	13.23
級間変動	5.77	2.27	1.28	−0.08	−2.20	−0.01	−0.72	−0.12	0.90	7.70	−3.25
人口動態効果	−0.01	−7.97	−5.40	−0.15	−4.63	0.38	1.45	−0.59	1.11	−1.30	17.09
合計	33.41	−2.98	−0.75	2.21	−3.03	1.83	2.85	1.17	3.06	1.98	27.07
参考（付表 31(b)）	33.41	−2.98	−0.75	2.21	−3.03	1.84	2.85	1.17	3.06	1.98	27.07

付表 3(a)　標準偏差の差にたいする年齢階級別寄与分　年間収入　二人以上世帯（1994 年-1999 年）(万円)

	全年齢階級	24 歳以下	25-29 歳	30-34 歳	35-39 歳	40-44 歳	45-49 歳	50-54 歳	55-59 歳	60-64 歳	65 歳以上
級内変動	−11.63	−0.13	0.03	−0.95	−0.65	1.16	−2.12	0.24	−2.14	−2.16	−4.91
級間変動	7.00	0.10	−0.20	0.58	0.16	−1.74	1.50	−0.85	1.61	1.71	4.14
人口動態効果	0.00	−0.17	0.42	−3.19	−5.94	−12.44	−7.53	−0.31	3.82	4.38	20.96
合計	−4.63	−0.20	0.25	−3.56	−6.43	−13.02	−8.16	−0.92	3.30	3.92	20.19
参考（付表 31(a)）	−4.63	−0.20	0.25	−3.56	−6.43	−13.02	−8.16	−0.92	3.29	3.92	20.19

付表 3(b)　標準偏差の差にたいする年齢階級別寄与分　年間収入　二人以上世帯（1994 年-1999 年）(万円)

	全年齢階級	24 歳以下	25-29 歳	30-34 歳	35-39 歳	40-44 歳	45-49 歳	50-54 歳	55-59 歳	60-64 歳	65 歳以上
級内変動	−4.81	−1.01	0.90	2.07	−1.45	0.14	0.50	1.49	5.47	−1.93	−10.99
級間変動	22.36	2.93	1.55	−0.80	2.26	0.65	0.34	−0.41	−4.27	3.49	16.61
人口動態効果	0.02	−7.95	6.49	0.91	4.39	0.20	0.98	4.54	3.07	−2.59	−10.02
合計	17.57	−6.02	8.94	2.18	5.20	0.99	1.82	5.62	4.27	−1.03	−4.40
参考（付表 31(b)）	17.55	−6.01	8.94	2.18	5.20	0.99	1.81	5.62	4.27	−1.03	−4.40

付表 4(a)　標準偏差の差にたいする年齢階級別寄与分　年間収入　二人以上世帯（1999 年-2004 年）(万円)

	全年齢階級	24 歳以下	25-29 歳	30-34 歳	35-39 歳	40-44 歳	45-49 歳	50-54 歳	55-59 歳	60-64 歳	65 歳以上
級内変動	−22.37	0.26	−0.15	−1.29	−1.88	−3.47	−1.41	−4.47	−1.70	−3.26	−4.98
級間変動	−0.15	−0.38	−0.58	−0.32	−0.23	1.11	−1.21	1.63	−1.00	0.72	0.10
人口動態効果	0.00	−0.59	−3.76	−3.96	−4.03	−4.59	−8.68	−3.70	2.12	6.74	20.44
合計	−22.52	−0.71	−4.49	−5.57	−6.14	−6.95	−11.29	−6.54	−0.59	4.20	15.56
参考（付表 31(a)）	−22.52	−0.71	−4.49	−5.58	−6.14	−6.95	−11.30	−6.54	−0.59	4.21	15.56

付表 4(b)　標準偏差の差にたいする年齢階級別寄与分　年間収入　単身世帯（1999 年-2004 年）(万円)

	全年齢階級	24 歳以下	25-29 歳	30-34 歳	35-39 歳	40-44 歳	45-49 歳	50-54 歳	55-59 歳	60-64 歳	65 歳以上
級内変動	−13.05	0.99	−0.85	−2.51	−0.30	−1.42	−2.27	−0.84	−3.99	0.01	−1.88
級間変動	−9.76	−2.80	−2.19	0.70	−1.08	0.28	1.08	−0.55	2.27	−1.82	−5.65
人口動態効果	0.00	−4.95	−9.22	2.00	1.88	1.90	0.70	−4.91	−0.06	−1.50	14.17
合計	−22.81	−6.76	−12.26	0.19	0.50	0.76	−0.49	−6.29	−1.78	−3.31	6.63
参考（付表 31(b)）	−22.81	−6.76	−12.26	0.20	0.50	0.76	−0.49	−6.29	−1.79	−3.31	6.63

(注記)　本稿で誘導した要因分解式によるそれぞれの変動（級内変動，級間変動，人口動態効果）とその合計を表章した。最下欄の参考値の表番号は旧著（186 頁～187 頁）における付表（「総変動の差にかんする年齢階級別要因分解」）に対応している（この統計表にもとづくグラフは「図 4-2(a)(b) 総変動の差にたいする年齢階級別寄与分（二人以上世帯・単身世帯）」[旧著 99 頁]）。合計欄の数値と参考値の比較により，本稿で述べた要因分解式による年齢階級別寄与分の合計が，旧著で表章した計算値とほぼ同じ値をあたえることが分かる。