タイトル	平均対数偏差の数学的性質にかんする覚書
著者	木村，和範；KIMURA，Kazunori
引用	季刊北海学園大学経済論集，65(1・2)：1-10
発行日	2017-09-30

《研究ノート》

平均対数偏差の数学的性質にかんする覚書

木　村　和　範

〈要旨〉

平均対数偏差（MLD）は非負の値をとり，

$$MLD=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log m_A-\log a_i)\geqq 0$$

ただし，m_A は a_i の相加平均

と表わすことができる。この非負性の証明には，「相加平均相乗平均の不等式の証明問題」にたいする解法を援用すればよい。本稿では，平均対数偏差が正の値になる場合とゼロになる場合に分けて，$MLD\geqq 0$を証明するために，マクローリン型不等式のひとつを援用した。

相加平均と相乗平均の２つの平均にかんする大小関係の証明はそれじたい，旧聞に属するが，証明の過程で誘導した平均対数偏差の新たな定義式

$$MLD=\log m_A-\log m_G$$

ただし，m_G は a_i の相乗平均

は，これまでに知られていた定義式を使用するよりも簡便に平均対数偏差をあたえる。

〈Summary〉

In the present paper examining a Maclaurinian type of inequality, the author demonstrates the non-negativity of the value calculated by a formula of mean logarithmic deviation（MLD）, *i. e.*,

$$MLD=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log m_A-\log a_i),$$

where m_A denotes the arithmetic mean of a series of a_i.

A new formula of MLD derived in order to demonstrate non-negativity, $MLD=\log m_A-\log m_G$, where m_G denotes the geometric mean of the same series, can more easily calculate MLD than other well-known formulae.

はじめに

平均対数偏差（mean logarithmic deviation：*MLD*）は，いわゆる「見かけ上」の所得格差を検出するための指標として活用される(1)。大きい数値を小さい数値で表現する対数変換は，より小さい数値の変動に敏感である。しかし，このことが，所得分析にとって実質的な意味をどの程度もっているかについては，疑義が提起されている(2)。このような指摘を重く見て，原系列を対数変換する必要がない標準偏差（σ）を，年齢階級別に

$$\sigma=\sum_{i=1}^{m}\frac{k_i}{N}\sigma$$

ただし，σ は全年齢階級（全世帯）の所得分布の標準偏差，N は総世帯数，m は年齢階級の個数，k_i は第 i 年齢階級に落ちる世帯数

と分解し，さらにまた，σ の定義式を

$$\sigma=\sum_{i=1}^{m}\frac{k_i}{N}\sigma_i+\sum_{i=1}^{m}\frac{k_i}{N}(\sigma-\sigma_i)$$

ただし，σ_i は第 i 年齢階級の所得分布の標準偏差

と変形した。この第2の分解式は標準偏差を級内変動（右辺第1項）と級間変動（右辺第2項）に分ける分解式である。これらの分解式などをミクロデータ（全国消費実態調査，1989年～2004年の4ヶ年分，二人以上世帯・単身世帯）に適用して，言われるように格差が「見かけ上」であるかどうかを検討した(3)。

(1)　内閣府『平成18年版　経済財政白書―成長条件が復元し，新たな成長を目指す日本経済―』256頁以降。

(2)　Sen, Amartya, *On Economic Inequality*, Expanded Ed., with James E. Foster, Oxford, 1997.（鈴村興太郎・須加晃一訳『不平等の経済学』東洋経済新報社，2000年，36頁以下。）

(3)　木村和範『格差は「見かけ上」か』（シリーズ社会・経済を学ぶ）日本経済評論社，2013年。標準偏差の分解式については，34頁および37頁を参照。

［献辞］

北海学園大学経済学部の教員を執筆者とする「現代経済政策シリーズ」に続けて「シリーズ社会･経済を学ぶ」が完結し，現在，新企画の検討が進行中と聞いている。日本経済評論社から発刊された，これらのシリーズにそれぞれ単著を執筆した教員のうち，最近になって，小林真之教授，高原一隆教授，小田清教授，奥田仁教授，笠嶋修次教授が相次いで停年を迎え，ご退職なさった。まさに「人事有代謝　往来成古今（人事，代謝あり，往来，古今をなす）」（孟浩然）である。本学経済学会は，在職中のご貢献とご労苦にたいする感謝の意を込めて，紀要（『経済論集』）を退職記念号として刊行した。5人の教授とともに2つのシリーズの刊行プロジェクトに参画した者としては，万障を繰り合わせて，記念号に投稿すべきではあったが，諸般の事情で叶わず，礼を失することになった。このことをお詫びするとともに，これまでに頂戴したご厚誼に衷心より感謝の意を表する。併せてご多幸とご壮健を祈念して，上記第2シリーズにおける拙著の叙述を補うべく執筆した覚書を，謹んで5人の名誉教授に捧げる。

そこでは，すべての所得が均等に分布しているときに（すべての所得がその統計系列の相加平均に一致するときに），平均対数偏差がゼロになることだけは指摘しているが[4]，平均対数偏差の数学的性質にまで踏み込んだ叙述はない。本稿では，個別値がいずれも正のときに，平均対数偏差が非負（non-negative）となり（$MLD \geqq 0$），すべての個別値が同一の値となるときには，等号が成立すること（$MLD=0$）を一般的に証明し，旧著の不十分性を補う。

１．平均対数偏差の定義式

任意の正数 $a_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$ の系列の相加平均を m_A とおくと，

$$m_A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i \qquad (1)$$

である[5]。平均対数偏差（MLD）は，系列をなす各項の値にかんする相加平均(m_A)を対数変換した値から，各項の値(a_i)の対数変換値を減じてもとめた

$$\log m_A-\log a_i$$

ただし，対数の底は１以上とする

の相加平均と定義される。すなわち，MLD は，

$$MLD=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log m_A-\log a_i) \qquad (2)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log m_A-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log a_i$$

$$=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\log m_A-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log a_i$$

$$=\log m_A-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log a_i \qquad (2)'$$

であたえられる。定義式（(2)式）から誘導される(2)′式によれば，平均対数偏差のとりうる値は，

① $\log m_A-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log a_i>0$ 　のとき，$MLD>0$

② $\log m_A-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log a_i=0$ 　のとき，$MLD=0$

③ $\log m_A-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log a_i<0$ 　のとき，$MLD<0$

の３通りが考えられる。しかし，③は成立せず，一般に，

$$MLD \geqq 0 \qquad (3)$$

となり，平均対数偏差の値は非負である。そして，等号の成立条件は，すべての a_i について，

$$a_i=m_A$$

となるときに限られる。換言すれば，個々の項の値がすべてその系列の相加平均と同一の値となるとき，すなわち分布が完全に均等であるとき，(3)式において等号が成立する。以下，項を改めて，(3)式を証明する。

２．平均対数偏差の再定義

平均対数偏差の定義式を変形した(2)′式を次のようにすれば，新たな定義式を誘導する

(4)　同上書，14-15頁。

(5)　相加平均を定義する(1)式の適用には，一般に，a_i は正である必要はない。任意の実数の系列にたいして適用可能である。しかし，本稿がその数学的性質を考察する平均対数偏差の計算には，各項の値を対数変換することから，対数変換の対象となる各項は（対数の）真数条件（正数であること）を満たさなければならない。このために，本項では，系列を構成する各項の値を正数とした。

ことができる。

$$MLD=\log m_A-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log a_i \qquad (2)'[再掲]$$

$$=\log m_A-\frac{1}{n}(\log a_1+\log a_2+\cdots\cdots+\log a_n)$$

$$=\log m_A-\frac{1}{n}\log(a_1\cdot a_2\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot a_n)$$

$$=\log m_A-\log(a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdots\cdot a_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$=\log m_A-\log\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdots\cdot a_n} \qquad (4)$$

ここで，a_i の系列の相乗平均を m_G とおくと，

$$m_G=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdots\cdot a_n} \qquad (5)$$

である。この(5)式を(4)式に代入すると，平均対数偏差の新たな定義式として，

$$MLD=\log m_A-\log m_G \qquad (6)$$

が誘導される。

以上に述べたように，平均対数偏差は，系列をなす各項の値の相加平均の対数変換値から，同じ系列の誘導統計値である相乗平均の対数変換値を減じた値であると再定義することができる。このことから，平均対数偏差が非負の値をとることを証明するには，さしあたり(6)式おける，底を1以上とする対数（たとえば常用対数や自然対数）の2つの真数 m_A（相加平均）と m_G（相乗平均）において，

$$m_A-m_G\geqq 0$$

すなわち

$$m_A\geqq m_G \qquad (7)$$

が成立すること（相加平均は相乗平均よりも小さくないこと）を証明すればよい。底が1以上の場合，２つの対数の大小関係は，その真数の大小関係と一致するからである。

正の２数（α，β）について，その相加平均 $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ と相乗平均 $\left(\sqrt{\alpha\beta}\right)$ の大小関係が

$$\frac{\alpha+\beta}{2}\geqq\sqrt{\alpha\beta}$$

であることは，よく知られている[(6)]。

しかし，項数を n (≧3) まで拡張して，一般に，系列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ において

相加平均≧相乗平均

が成立することにかんする証明問題は，「相

---

(6) $$\frac{\alpha+\beta}{2}\geqq\sqrt{\alpha\beta} \qquad (*)$$

ただし，$0\leqq\alpha\leqq\beta$

の辺々を平方し，その差をとり整理すれば，次のようになる。

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\alpha\beta}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)-\alpha\beta$$

$$=\frac{1}{4}(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)-\frac{4}{4}\alpha\beta$$

$$=\frac{1}{4}(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)$$

$$=\frac{1}{4}(\alpha-\beta)^2 \qquad (**)$$

$\alpha=\beta$ のとき，(**)式はゼロであり，$\alpha<\beta$ のとき，(**)式は正である。すなわち，

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\alpha\beta}\right)^2\geqq 0$$

よって，

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\geqq\left(\sqrt{\alpha\beta}\right)^2 \qquad (***)$$

したがって，(***)式は

$$\frac{\alpha+\beta}{2}\geqq\sqrt{\alpha\beta}$$

となり，(*)式が証明された。

なお，等号の成立条件は

$$\alpha=\beta$$

である。

q. e. d.

加相乗平均の不等式の証明問題」として，つとに有名であり，２数の場合に較べて複雑である。この問題にたいしてはさまざまな証明の仕方がある。以下ではそのなかでも「エレガント」と言われている（マクローリン型不等式を援用した）証明[(7)] を参照して，(7)式を証明する。そして，それにもとづいて，平均対数偏差の数学的性質を解明する。

3．平均対数偏差の数学的性質

（1）平均対数偏差の非負性

$$m_A \geqq m_G \qquad (7)\text{［再掲］}$$

を証明するために，

$$x = \frac{a_i}{m_A} - 1 \qquad (8)$$

とおき，マクローリン型不等式のひとつである

$$e^x \geqq x+1 \qquad (9)$$

ただし，eは自然対数の底

なお，等号の成立条件は，$x=0$である（このとき，左辺$=e^0=1$となり，右辺$=0+1=1$となるからである）。

を想起する[(8)]。

(7)「相加相乗平均の不等式とそのエレガントな証明」(http://www.mathtrain.jp/amgm, accessed on May 6, 2017）を参照。マクローリン型不等式によらない証明としては，たとえば，春日正文編『公式集』(科学振興社モノグラフ　3 訂版　24)，科学振興社，1989 年，50 頁以下参照。また，数学的帰納法による証明については「n 変数の相加平均と相乗平均の関係の証明（特殊な数学的帰納法)」(http://examist.jp/mathematics/expression-proof/n-soukasoujyou-syoumei/, accessed on June 4, 2017）を参照。

(8)　マクローリン型不等式のひとつである(9)式は，n回微分可能な関数$f(x)$にかんするマクローリンの定理

$$f(x)=f(0)x+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \qquad (*)$$

ただし，$0<\theta<1$

から誘導される。

上記したマクローリンの定理において，$f(x)=e^x$とおくと，(*)式は

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots \qquad (**)$$

となる（「不等式の証明とマクローリン展開との関係について」(http://www.saga-ed.jp/kenkyu_chousa/h16/15koukousugaku/rink1.htm, accessed on May 17, 2017）参照)。

したがって，(**）式からは以下のようなマクローリン型不等式が誘導される（下方の不等式ほど強くなり，その右辺の値は左辺の値に近づくが，いずれの誘導式においても等号の成立条件は$x=0$である)。

$$\begin{aligned}
&e^x \geqq 1 \quad (\text{ただし，}x\geqq 0)\\
&e^x \geqq 1+x \quad (\text{ただし，}x\in\mathbb{R}) \qquad (***)\\
&e^x \geqq 1+x+\frac{x^2}{2!} \quad (\text{ただし，}x\geqq 0)\\
&e^x \geqq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!} \quad (\text{ただし，}x\in\mathbb{R})\\
&\quad\vdots\\
&e^x \geqq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^{10}}{10!} \qquad (****)\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

本文で，証明に用いたマクローリン型不等式は(***)式である。

なお，以下を付言する。たとえば，$x=1$のとき，(****)式にたいしてさらに項を増やし，Excel for Mac (Version 15.35)（以下，Excel）で計算すれば，

$$e^1 \geqq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{16!}$$
$$=2.71828\ 18284\ 5904$$

となり，e（自然対数の底）の値（2.71828 18284 59045 23536……）の小数第 14 位まで一致した値があたえられる。さらに上式に$\frac{1}{17!}$を加算すれば，Excel はeの近似値として，2.71828 18284 5905をあたえる。それ以上，項を増やしても，Excel があたえるeの近似値に変化はない。そして，これは，Excel が関数の値としているeの値（2.71828 18284 5905）と一致する。

(8)式を(9)式の x に代入すると，

$$e^{\frac{a_i}{m_A}-1} \geqq \left(\frac{a_i}{m_A}-1\right)+1$$

ゆえに

$$e^{\frac{a_i}{m_A}-1} \geqq \frac{a_i}{m_A} \tag{10}$$

となる。ここで，(10)式の i にたいして $i=1$ から $i=n$ までを代入して，n 本の式を作り，それらの式について辺々を掛け合わせると，次式をうる。

$$e^{\frac{a_i}{m_A}-1} \geqq \frac{a_i}{m_A} \qquad (10)［再掲］$$

$$e^{\frac{a_1}{m_A}-1} \cdot e^{\frac{a_2}{m_A}-1} \geqq \frac{a_1}{m_A} \cdot \frac{a_2}{m_A}$$

$$e^{\frac{a_1}{m_A}-1} \cdot e^{\frac{a_2}{m_A}-1} \cdot e^{\frac{a_3}{m_A}-1} \geqq \frac{a_1}{m_A} \cdot \frac{a_2}{m_A} \cdot \frac{a_3}{m_A}$$

$$\vdots$$

$$e^{\frac{a_1}{m_A}-1} \cdot e^{\frac{a_2}{m_A}-1} \cdot \cdots\cdots \cdot e^{\frac{a_n}{m_A}-1} \geqq \frac{a_1}{m_A} \cdot \frac{a_2}{m_A} \cdot \cdots\cdots \cdot \frac{a_n}{m_A}$$

$$e^{\left\{\left(\frac{a_1}{m_A}-1\right)+\left(\frac{a_2}{m_A}-1\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{m_A}-1\right)\right\}} \geqq \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}{{m_A}^n} \tag{11}$$

$$e^{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{m_A}-n\right)} \geqq \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}{{m_A}^n} \tag{12}$$

ここで，相加平均の定義式

$$m_A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (1)［再掲］$$

を変形すれば，

$$n = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{m_A} \tag{1$''$}$$

となる。この(1)″式を(12)式の左辺に代入すると

$$e^{(n-n)} \geqq \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}{{m_A}^n} \tag{13}$$

となる。

ゆえに

$$e^0 \geqq \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}{{m_A}^n} \tag{13$'$}$$

$$1 \geqq \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}{{m_A}^n} \qquad (\because e^0=1) \tag{14}$$

${m_A}^n > 0$ であるから，両辺に ${m_A}^n$ を乗ずれば，(14)式は

$${m_A}^n \geqq a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \tag{15}$$

となる。この(15)式について，辺々の n 乗根をとると，次式をうる。

$$m_A \geqq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \tag{16}$$

相乗平均の定義式

$$m_G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots\cdots\cdots \cdot a_n} \qquad (5)［再掲］$$

を(16)式の右辺に代入すると，(16)式は

$$m_A \geqq m_G \tag{17}$$

となる。

底が1より大きいときには，(17)式における両辺の対数をとっても，その大小関係は変わらない。真数の大小関係は維持される。このことはすでに述べた。ゆえに，(17)式は

$$\log m_A \geqq \log m_G \tag{18}$$

と同値である。したがって，

$$\log m_A - \log m_G \geqq 0 \tag{19}$$

ここに

$$MLD = \log m_A - \log m_G \qquad (6)［再掲］$$

であるから，平均対数偏差の値は，非負である。以上により，

$$MLD \geqq 0 \qquad (3)［再掲］$$

が証明された。

q. e. d.

（2）平均対数偏差がゼロとなる条件

新たに誘導した平均対数偏差の定義式

$$MLD=\log m_A-\log m_G \qquad (6)［再掲］$$

において，

$$MLD=0 \qquad (20)$$

が成立する条件を考察する。この条件は，(6)式において

$$\log m_A-\log m_G=0 \qquad (21)$$

が成立する条件，すなわち

$$\log m_A=\log m_G \qquad (21)'$$

が成立する条件と同一である。

(21)′式は

$$m_A=m_G \qquad (22)$$

と同値である。したがって，(20)式の成立条件は，(22)式の成立条件と同一である。

そこで，(20)式の成立条件を示すために，この(22)式の辺々を n 乗して，

$$m_A{}^n=m_G{}^n \qquad (23)$$

を得ることにする。これを変形した

$$1=\frac{m_G{}^n}{m_A{}^n} \qquad (24)$$

の右辺の分子は，相乗平均 m_G の n 乗であるから，(24)式は

$$1=\frac{(\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n})^n}{m_A{}^n}$$

$$=\frac{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}{m_A{}^n} \qquad (25)$$

と書き直すことができる。この(25)式の右辺は，マクローリン型不等式から誘導された

$$e^{\left\{\left(\frac{a_1}{m_A}-1\right)+\left(\frac{a_2}{m_A}-1\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{m_A}-1\right)\right\}}\geqq\frac{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}{m_A{}^n} \qquad (11)［再掲］$$

の右辺と同じであり，このために，(11)式右辺の値は1に等しい。

したがって，(22)式が成立していれば，(23)式，(24)式，(25)式のすべてが成立しているので，(11)式は，少なくとも

$$e^{\left\{\left(\frac{a_1}{m_A}-1\right)+\left(\frac{a_2}{m_A}-1\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{m_A}-1\right)\right\}}\geqq 1 \qquad (11)'$$

と書き直すことができる。

ここで改めて

$$\log m_A-\log m_G=0 \qquad (21)［再掲］$$

の成立条件が(22)式から誘導された

$$1=\frac{m_G{}^n}{m_A{}^n} \qquad (24)［再掲］$$

であることを想起すると，平均対数偏差がゼロとなる条件を提示するために，(11)′式において等号が成立して，その左辺の値が1となる，すなわち

$$e^{\left\{\left(\frac{a_1}{m_A}-1\right)+\left(\frac{a_2}{m_A}-1\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{m_A}-1\right)\right\}}=1\left(\equiv\frac{m_G{}^n}{m_A{}^n}\right) \qquad (26)$$

となるのはどのような場合であるかを明らかにすればよいことが分かる。このために，指数の性質により，その左辺の「べき」がゼロになるとき，

$$e^0=1$$

であることを想起する。これにより，(26)式が成立するための条件は，同式左辺の「べき」がゼロであること，すなわち

$$\left(\frac{a_1}{m_A}-1\right)+\left(\frac{a_2}{m_A}-1\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{m_A}-1\right)=0 \qquad (27)$$

であることが分かる。

(27)式が成立するには，一般に任意の a_i において，

$$\frac{a_i}{m_A}-1=0 \qquad (28)$$

となることが必要かつ十分な条件である。

(27)式の成立条件である(28)式を変形すれば,

$$\frac{a_i}{m_A}=1 \tag{29}$$

をうる。(29)式を変形すると，次式を得る。

$$a_i=m_A \tag{30}$$

以上により,

$$e^{\left\{\left(\frac{a_1}{m_A}-1\right)+\left(\frac{a_2}{m_A}-1\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{m_A}-1\right)\right\}}=1\left(\equiv\frac{{m_G}^n}{{m_A}^n}\right) \quad (26)［再掲］$$

が成立する条件は,

$$a_i=m_A \quad (30)［再掲］$$

であることが明らかになり，平均対数偏差がゼロとなるときの条件，すなわち

$$m_A=m_G \quad (22)［再掲］$$

が成立するときの条件が明示された(vice versa)。

q. e. d.

マクローリン型不等式を媒介として，平均対数偏差がゼロとなるときの条件は以上のとおりである。なお，(30)式を所得分布に適用して分ることは，全世帯の所得すべてがその系列の相加平均に等しくなるような均等分布の場合に，平均対数偏差がゼロになるということである。また，平均対数偏差が大きい値になるにつれて，所得格差は大きい。

おわりに

平均対数偏差は，級内変動と級間変動に要因分解することができる。また，２時点間の平均対数偏差の差をとれば，その増減にたいする①級内変動と②級間変動の寄与が計測される他に，③系列の階級別項数の変動が果たす寄与も計測できると言われている。所得分布の統計解析においては，この第３の寄与を「人口動態効果」と言う。

高齢化が進むこの国において，格差の拡大に果たす人口構成の変動効果を計測するために平均対数偏差が使用されるのは，この「人口動態効果」を計測できると考えられているからである。

しかし，所得格差の統計的計測指標として，このような機能を果たすとされる平均対数偏差の数学的性質については，寡聞にして，明証的な叙述が見当たらない。すべての世帯所得 a_i が相加平均 m_A に一致するとき（均等分布のとき）に，平均対数偏差がゼロとなることは，平均対数偏差の定義式

$$MLD=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log m_A-\log a_i) \quad (2)［再掲］$$

から直感的に分かり，自明であるとしても，不均等分布の場合には，どのような値をとるのか，正数のみか，あるいは負数も算出されうるのかということは，必ずしも明確になっていないのではあるまいか。

このような問題関心から，本稿では，平均対数偏差が非負の値をとることの数学的証明を取り上げた。この証明は，相加平均と相乗平均の大小関係にかんする証明に帰着する。この証明にはさまざまな解法が存在している。このことを勘案すれば，平均対数偏差の非負性の証明についても，すでに先行研究がありうること，そして，平均対数偏差の非負性が周知の事柄に属すことの可能性は否定できない。しかしながら，平均対数偏差を統計的解析手法とする所得格差の分析が,「見かけ上」の格差の検出を目的とすることにあるという現状に鑑みて，改めて平均対数偏差の数学的性質を確認しておきたい。

本稿が措定した課題の検討においては，平均対数偏差を再定義する過程で誘導した

$$MLD=\log m_A-\log m_G \quad (6)［再掲］$$

を用いた。このことについて，以下を付言して擱筆する。(6)式を変形すると，

$$MLD=\log\frac{m_A}{m_G} \qquad (6)'[再掲]$$

をうる。相加平均（m_A）と相乗平均（m_G）が表計算ソフトによって簡単に算出できることを勘案すれば，本稿における証明の過程で誘導した(6)式あるいは(6)′式のほうが，平均対数偏差の定義式

$$MLD=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log m_A-\log a_i) \qquad (2)[再掲]$$

あるいは，上式から誘導される

$$MLD=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{m_A}{a_i} \qquad (2)''$$

よりも，平均対数偏差の算出は簡便である（付録 計算例 参照）。

付録　計算例

1．数 値 例

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)=(1, 2, 3, 4, 5)$のとき，相加平均（$m_A$）と相乗平均（$m_G$）は以下のようになる。

$$m_A=\frac{1}{5}(1+2+3+4+5)=3.0$$

$$m_G=\sqrt[5]{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=\sqrt[5]{120}=2.60517\ 10847$$

2．$MLD=\log m_A-\log m_G$および

$MLD=\log\frac{m_A}{m_G}$による MLD の計算

上の数値例を代入すれば，以下のようになる（以下，対数の底は10とする）。

$$\begin{aligned}MLD&=\log m_A-\log m_G &①\\&=\log 3.0-\log 2.60517\ 10847\\&=0.47712\ 12547-0.41583\ 62492\\&=0.06128\ 50055\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}MLD&=\log\frac{m_A}{m_G} &①'\\&=\log\frac{3.0}{2.60517\ 10847}\\&=\log 1.15155\ 58489\\&=0.06128\ 50055\end{aligned}$$

以下で示すように，

$$MLD=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log m_A-\log a_i) \qquad ②$$

$$MLD=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{m_A}{a_i} \qquad ③$$

もまた，数値例にたいする平均対数偏差として①式および①′式から算出された値と同一の 0.06128 50055 をあたえる。しかし，①式または①′式による平均対数偏差の算出がより簡単であり，時間と労力を節約できる。このことは，改めて次項で述べる。

3．$MLD=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log m_A-\log a_i)$と

$MLD=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{m_A}{a_i}$による MLD の計算

計算のために，1．で述べた数値例について，表1（「平均対数偏差の計算例」）を作成する。

この表により，

$$\begin{aligned}MLD&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log m_A-\log a_i) &②\\&=0.06128\ 50055\end{aligned}$$

であることが分かる（二重下線をほどこした数値）。

また，

$$MLD=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{m_A}{a_i} \qquad ③$$

表 1　平均対数偏差の計算例

	x	$\log m_A$	$\log x$	$\log m_A - \log x$	$\log \frac{m_A}{x}$
	1	0.47712 12547	0.00000 00000	0.47712 12547	0.47712 12547
	2	0.47712 12547	0.30102 99957	0.17609 12591	0.17609 12591
	3	0.47712 12547	0.47712 12547	0.00000 00000	0.00000 00000
	4	0.47712 12547	0.60205 99913	−0.12493 87366	−0.12493 87366
	5	0.47712 12547	0.69897 00043	−0.22184 87596	−0.22184 87596
合　計	15			0.30642 50276	0.30642 50276
相加平均	3			0.06128 50055	0.06128 50055
相乗平均	2.60517 10847				

表 2　計算式別の平均対数偏差の値

①式 $\log m_A - \log m_G$	①′式 $\log \frac{m_A}{m_G}$	②式 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log m_A - \log a_i)$	③式 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log \frac{m_A}{a_i}$
0.06128 50055 10137 4	0.06128 50055 10137 4	0.06128 50055 10137 5	0.06128 50055 10137 5

$$= 0.06128\ 50055$$

であることが分かる（波線を施した数値）。

①式による計算では，原系列について相加平均と相乗平均を計算し，その後，それぞれを対数変換して減ずれば，平均対数偏差がもとめられる。それにたいして，表 1 が示すように②式または③式を援用する場合には，計算表が大きくなり，それだけ，計算作業が煩瑣になる。

なお，表 1 では，小数第 10 位までを示したが，Excel for Mac（Version 15.35）は小数第 16 位までの値を算出する。これを活用して，表 2（「計算式別の平均対数偏差の値」）には，同一の数値例について計算式別にもとめた平均対数偏差を表示する。この表により，①式および①′式の結果と②式および③式の結果とでは，小数第 16 位が異なっていることが分かる。Excel の内部処理がどのようになっているかは不明であるが，無理数になる対数が多くなるほど，計算誤差が生ずると考えられる。真数の個数が少ないほど，計算誤差を抑えうると期待できる。平均対数偏差を実際に計算する場合には，①式もしくは①′式の使用が望ましい。

(2017 年 5 月 10 日提出)