タイトル	Mathematica で線形代数を～学生が理解を深める教材の研究～
著者	速水，孝夫；HAYAMI，Takao；米田，力生；YONEDA，Rikio
引用	北海学園大学学園論集(172)：81-96
発行日	2017-06-25

Mathematicaで線形代数を

～学生が理解を深める教材の研究～

速　水　孝　夫
米　田　力　生

1．はじめに

大学において，線形代数学の授業を担当することが多いが，学生の課題や試験の答案などを見ていると，行列の計算に習熟していない学生が散見される．高校の数学において，現在実施しているカリキュラムから，「行列」や「一次変換」がなくなった．以前の高校数学のカリキュラムでは，主に２次行列の深い演算に関わる部分が扱われていた．しかし，「３次正方行列を学ばずして，２次正方行列だけで行列の学びを終わらせるならば，高校では行列を一切学ばずに大学で一から学んだ方がいい」という極論すぎる意見が日本には根強くあって，それに押されるような形になってしまったと，芳沢氏の著書[8]の第7.4章にも指摘されている．以前の学園論集[6]においても若干指摘させていただいたが，これらが姿を消したことは，行列の演算のみならず平面図形の移動や変換などの指導に大きな禍根を残したと言ってもよいであろう．

そのせいもあって，大学の線形代数学の授業においては，行列の演算はほとんどの学生の場合，はじめて学ぶことになり，苦手意識を持つ学生も以前に比べると若干多くなっているような気もする．一方で，北海学園大学のコンピュータ実習室には，現在数式処理ソフト「Mathematica」のライセンスが何台か導入されていて，こういったソフトも使って，数学の「線形代数」などの授業で学んだ内容を再確認してみるのも面白いだろう．

もちろん，「数学」の授業で学んだ基本事項を理解したり，自分で手を動かして計算ができるようになることは当然大切で，必須なことであるが，コンピュータソフトを使うことにより，実際に勉強した定理やさまざまな性質などが，どのように成立しているのかを見ていくのは，学生が線形代数への興味や理解を深めるのにも役に立つであろう．実際，線形代数に出てくる様々な計算の中には，理論的にはそうなることが分かっていても，手計算ではとても手におえないものも出てくる．その際にも，コンピュータソフトを用いた計算は役に立つと思う．

この報文では,「線形代数学」の題材を例にとり，学生が大学で勉強した線形代数について内容の理解を深めるための「Mathematica」のプログラミングの例を紹介したい．特に新しい結果を含むものではないが，学生が理解を深めるための教材の一助になればと思い，まとめてみることにした．線形代数学の基本事項も多少紹介しているが，詳しくは線形代数学のテキスト（何でもよいが，例えば[3]，[1]など）を適宜参照していただければと思う．また,「Mathematica」の使い方や基本的な入力方法などについては，目的を「線形代数学」に絞っているため省略したが，実際の説明が書かれた本（[7]，[4]）や,「Mathematica」のヘルプ等も参照していただければと思う．さらに，[7]において,「Mathematica」の最新版 ver.10 について，高校数学から大学初年度の数学までオールインワンの内容について紹介されている．なお，線形代数と「Mathematica」について詳しく書かれている本（[5]や，少し古いが[2]など）も参考になるだろう．

2．基本演算など

基本的な事項は例えば，[7]，[4]なども参考にするとよい．入力は，平面ベクトル(x, y)は{x，y}と入力し，空間ベクトル(x, y, z)は{x, y, z}のように入力すればよい（一般のn項ベクトルも同様）．行列については，例えば(2, 3)行列$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$は{{a, b, c}, {d, e, f}}と入力すればよい．以下に基本演算についてまとめておく．

（1）入力例と基本演算

(a) 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の入力（入力はAとする）

In[1]: = A = {{1，2，3}，{-4，5，-6}，{7，8，9}}；

（入力の最後にセミコロン；をつけると，計算はするが結果は出力されない）

(b) Aを行列の形で表示　In[2]:= MatrixForm[A]

(c) (3, 2)型のゼロ行列　In[3]:= Table[0，{i，3}，{j，2}]

(d) 3次の単位行列　In[4]:= IdentityMatrix[3]

(e) 1,2,3を対角成分とする対角行列　In[5]:= DiagonalMatrix[{1, 2, 3}]

(f) スカラー倍（例えば7倍）　In[6]:= 7 A

(g) 加法（行列Bがすでに定義されている場合）

In[7]:= A + B

(h) 減法　In[8]:= A - B

(i) 乗法　In[9]:= A. B

(k) ベキ乗（例えば4乗）　In[10]:= MatrixPower[A，4] （l）転置行列　In[11]:= Transpose[A]

（m）逆行列　In[12]:= Inverse[A]

（2）その他の変形

（a）行列Aの第i行を抜き出す（例えば第2行の場合）

In[13]:= A[[2]]

（b）行列Aの第j列を抜き出す（例えば第3列の場合）

In[14]:= Transpose[A][[3]]

（c）行列Aの$(i,\ j)$成分を抜き出す（例えば$(3,2)$成分の場合）

In[15]:= A[[3，2]]

（d）行列式　In[16]:= Det[A]

（3）特殊な行列の入力例

（a）$A_1=\begin{pmatrix}1&2&3&0&0\\0&1&2&3&0\\0&0&1&2&3\\4&0&0&1&2\\0&4&0&0&1\end{pmatrix}$　（b）$A_2=\begin{pmatrix}0&0&0&-1&1\\0&0&-1&1&0\\0&-1&1&0&0\\-1&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}$　（c）$A_3=\begin{pmatrix}1&0&0&2&0\\0&1&0&3&0\\0&0&1&4&0\\0&0&0&5&0\\0&0&0&6&1\end{pmatrix}$

（a）In[1]:= A1 = Table[Switch[i−j, 0, 1, −1, 2, −2, 3, 3, 4, _, 0]，{i, 5}，{j, 5}];
　　In[2]:= MatrixForm[A1]

（b）In[3]:= A2 = Table[Switch[i+j, 6, 1, 5, −1, _, 0]，{i，5}，{j，5}];
　　In[4]:= MatrixForm[A2]

（c）In[5]:= A3 = Transpose[ReplacePart[IdentityMatrix[5]，{2, 3, 4, 5, 6}，4]];
　　In[6]:= MatrixForm[A3]

ここで，例えば(b)の Switch[i+j, 6, 1, 5, −1, _, 0]は，行列A_2の$(i,\ j)$成分の$i+j$を評価して，$i+j=6$のときは1，$i+j=5$のときは-1，その他のとき（入力は_）は0を返すという意味である．これを Table コマンドを使って行列として配置している．また，ReplacePart[A, b, i]は行列Aのi行目をベクトル$\boldsymbol{b}$で置き換えた行列を返す．

（4）ベクトルの入力例と基本演算

以下は簡単のため，$\mathbb{R}^n$（$\mathbb{R}$上の数ベクトル空間）で話を進める．

$\boldsymbol{a}_1={}^t(1,1,-1,0)$，$\boldsymbol{a}_2={}^t(1,0,4,5)$，$\boldsymbol{a}_3={}^t(0,5,4,0)$，$\boldsymbol{a}_4={}^t(1,0,0,1)\in\mathbb{R}^4$とする．

In[1]: = a1 = {1, 1, −1, 0}; a2 = {1, 0, 4, 5}; a3 = {0, 5, 4, 0}; a4 = {1, 0, 0, 1};

（a）$3\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_3$ を計算する.

In[2]: = 3a1 + 2a2

補足 A．数ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対して，その内積を$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$と表す．また，$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$を $\boldsymbol{x}$ のノルムという．このとき，$\cos\theta=\dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|}$を満たす θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$が一意に定まり，これを $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ のなす角というのであった.

（b）内積$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$を求める.

In[3]: = a1. a2

Out[3]: = -3

（c）ノルムを求める.

In[4]: = Norm[a1]

Out[4]: =$\sqrt{3}$

In[5]: = Norm[a2]

Out[5]: =$\sqrt{42}$

（d）$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ のなす角 θ を求める.

In[6]: = N[ArcCos[a1. a2/(Norm[a1] Norm[a2])]]

Out[6]: = 1. 84135

ここで，N[expr]は式 expr の値を数値で与えるコマンドである.

（e）$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$ が 1 次独立かどうか，行列式を用いて判定する.

In[7]: = Det[{a1，a2，a3，a4}]

Out[7]: = 16

よって，$\det(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4)=16\neq0$ より，1 次独立である.

補足 B．m 個の n 項数行（または列）ベクトルが 1 次独立であるための必要十分条件は，それらのベクトルを行（または列）に持つ行列のランクが $\min(m, n)$に一致することである.

補足 C．r 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ が 1 次独立で，これにベクトル $\boldsymbol{y}$ を加えた $r+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{y}$ が 1 次従属であれば，$\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ の 1 次結合として一意的に表すことができる.

（f）$\boldsymbol{b}={}^t(2, 1, 3, 4)$とする．$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+k_3\boldsymbol{a}_3+k_4\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{b}$ を満たす $k_1, k_2, k_3, k_4(\in\mathbb{R})$を求める.

In[8]: = b = {2，1，3，4};

In[9]: = g = k1 a1 + k2 a2 + k3 a3 + k4 a4 - b;

In[10]: = Solve[{g[[1]] == 0，g[[2]] == 0，g[[3]] == 0，g[[4]] == 0},
{k1，k2，k3，k4}]

Out[10]: = $\left\{\left\{\mathrm{k1}\to-\frac{1}{4},\ \mathrm{k2}\to\frac{7}{16},\ \mathrm{k3}\to\frac{1}{4},\ \mathrm{k4}\to\frac{29}{16}\right\}\right\}$

（g）$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$ から正規直交基底をつくる．

In[11]: = Orthogonalize[{a1，a2，a3，a4}]

Out[11]: = $\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ 0\right\},\ \left\{\frac{2}{\sqrt{39}},\ \frac{1}{\sqrt{39}},\ \sqrt{\frac{3}{13}},\ \frac{5}{\sqrt{39}}\right\},\right.$

$\left\{-\frac{47}{\sqrt{50583}},\ 55\sqrt{\frac{3}{16861}},\ \frac{118}{\sqrt{50583}},\ -\frac{85}{\sqrt{50583}}\right\},$

$\left.\left\{15\sqrt{\frac{3}{1297}},\ -\frac{20}{\sqrt{3891}},\ \frac{25}{\sqrt{3891}},\ -\frac{29}{\sqrt{3891}}\right\}\right\}$

※Orthogonalize[{ x_1, x_2, . . . }]はベクトル $\boldsymbol{x}_i$ を直交させることによって見付かる正規直交基底を返す．デフォルトでグラム・シュミット（Gram-Schmidt）基底を生成する．

また，a1，a2，a3，a4 はすでに入力済みとして，次のように Do 文を用いて入力しても，正規直交基が求まる：

In[12]: = Clear[b]　（b の定義をクリアにする）

In[13]: = aa = {a1, a2, a3, a4}; bb = Array[b, 4]; cc = Array[c, 4]; b[1] = aa[[1]]

In[14]: = Do[b[i]=aa[[i]]-Sum[(aa[[i]]. b[j]) b[j]/(b[j]. b[j]), {j, 1, i-1}]，{i, 2, 4}]

In[15]: = bb　（上で構成した直交系 b[1]，. . . ，b[4]を表示）

Out[14]: = $\left\{\{1, 1, -1, 0\}, \{2, 1, 3, 5\}, \left\{-\frac{47}{39}, \frac{55}{13}, \frac{118}{39}, -\frac{85}{39}\right\}, \left\{\frac{240}{1297}, -\frac{320}{3891}, \frac{400}{3891}, -\frac{464}{3891}\right\}\right\}$

In[15]: = Do[c[i] = b[i]/Sqrt[b[i]. b[i]]，{i，1，4}]　　（正規化する）

In[16]: = cc

（正規直交基の出力結果は省略する）

補足 D．$\mathbb{R}^n$ のベクトル$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$は 1 次独立とする．

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1,\quad \boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{a}_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_j)}{(\boldsymbol{b}_j,\boldsymbol{b}_j)}\boldsymbol{b}_j\quad (i=2, 3, \ldots, m)$$

とすると，直交系 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$ ができる．次に，$\boldsymbol{c}_i=\frac{1}{\|\boldsymbol{b}_i\|}\boldsymbol{b}_i$　$(i=1, 2, \ldots, m)$ とおけば，$\langle\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m\rangle=\langle\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_m\rangle$を満たす正規直交系$\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_m\}$ができる．この操作を，グラム・シュミット（Gram-Schmidt）の直交化法というのであった．

3．行列式，行列の基本変形

（a）行列式

定義に従った行列式

n 次正方行列 $A=(a_{ij})$に対して，その行列式は

$$|A|=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}\,\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

で定義される．Mathematica で定義に従った行列式について構成するには次のように入力するとよい．以下では，3 次行列の場合を紹介する．

In[1]:= MatrixForm[Array[a，{3，3}]]

In[2]:= p = Permutations[{1，2，3}]

In[3]:= Sum[Signature[p[[k]]] a[1，p[[k，1]]] a[2，p[[k，2]]]
a[3，p[[k，3]]]，{k，1，Length[p]}]

注意．In[4]:= Det[Array[a，{3，3}]]と入力したものと同じ結果が得られる．ここで，Permutations[list]は，list 内にある要素の可能なすべての順列をリストにするコマンドであり，Signature[list]は，標準的な順序で list の要素を置換するのに必要な符号を与えるコマンドである．

（b）小行列式，行列の階数

$m \times n$ 型の行列 A に対して，r 次のすべての小行列式を求めるには Minors[A, r]を用いればよい．行列 A のランク（階数）とは，A の小行列式で，値が 0 でないものの最大次数である．なお，行列 A の階数を直接調べる場合は，MatrixRank[A]を入力すればよい．

入力例

例えば，行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -5 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ の小行列式を次数が高い方から順に調べていくと，

In[1]:= A = {{1，-2，3，-1，1}，{-2，4，-5，4，-2}，{2，-4，8，3，2}，
{2，-4，3，-8，2}}；

In[2]:= Minors[A，4]

Out[2]:= {{0，0，0，0，0}}

In[3]:= Minors[A，3]

Out[3]:= {{0，0，0，1，0，0，-2，0，0，1}，{0，0，0，0，0，0，0，0，0，0}，
{0，0，0，3，0，0，-6，0，0，3}，{0，0，0，-4，0，0，8，0，0，-4}}

したがって，rank A＝3 である．直接，ランクを調べる場合は，次のようにすればよい：

In[4]:= MatrixRank[A]

Out[4]:= 3

（c）行列の基本変形

行列 A に対する行についての基本変形を行うには次のようにすればよい．

（i）行列 A の第 i 行と第 j 行を入れ替える　　{A[[i]]，A[[j]]} = {A[[j]]，A[[i]]}

（ii）行列 A の第 i 行に定数 c をかける　　A[[i]] ＊c =

（iii）行列 A の第 i 行に第 j 行の c 倍を加える（または減じる）　　A[[i]] += c A[[j]]

（または A[[i]] -= c A[[j]]）

入力例

(b) の入力例の行列を基本変形し，階段行列に変形する.

(1) 第 2 行に第 1 行の 2 倍を加える.　　In[5]:= A[[2]] += 2 A[[1]];

(2) 第 3 行に第 1 行の -2 倍を加える.　In[6]:= A[[3]] -= 2 A[[1]];

(3) 第 4 行に第 1 行の -2 倍を加える.　In[7]:= A[[4]] -= 2 A[[1]];

In[8]:= MatrixForm[A]

Out[8]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) 第 3 行に第 2 行の -2 倍を加える．第 4 行に第 2 行の 3 倍を加える.

In[9]:= A[[3]] -= 2 A[[2]]; A[[4]] += 3 A[[2]];

In[10]:= MatrixForm[A]

Out[10]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって，rank $A=3$ であることが確認できる.

(d) 行列の基本変形 2

行列 A に対して行基本変形を行って得られる被約階段行列を出力するには，RowReduce[A]を用いればよい.

入力例

$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 34 \end{pmatrix}$ に行基本変形を行って被約階段行列に変形する.

In[1]:= B = {{1, 1, 1, 1, 0}，{3, 4, 5, 6, 0}，{1, 4, 2, 8, 0}，{2, 4, 3, 0, 34}}

In[2]:= MatrixForm[RowReduce[B]]

Out[2]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

したがって，$\mathrm{rank}\, B=4$ である．

4．連立一次方程式

n 個の未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する m 個の方程式からなる連立一次方程式

$$(\star)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

を考える．

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とおくと，$(\star)$ は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と書き直せる．

掃き出し法

拡大係数行列$(A|\boldsymbol{b})$に次の**行基本変形**を行うことにより，連立一次方程式（$\star$）を同値変形することができる．拡大係数行列$(A|\boldsymbol{b})$に行に関する基本変形を行い，階段行列に変形することで，$\mathrm{rank}\, A$ と $\mathrm{rank}(A|\boldsymbol{b})$を同時に調べることができる．Mathematica では，拡大係数行列 Ab について RowReduce[Ab]を実行すればよい．

連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つ$\Longleftrightarrow$$\mathrm{rank}\, A=\mathrm{rank}(A|\boldsymbol{b})$である．さらに，
（1）$n=\mathrm{rank}\, A=\mathrm{rank}(A|\boldsymbol{b})$ならば，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は唯一の解を持つ．
（2）$n>\mathrm{rank}\, A=\mathrm{rank}(A|\boldsymbol{b})$ならば，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は多数（無限個）の解を持ち，それは$(n-\mathrm{rank}\, A)$個の任意定数を用いて表される．$(n-\mathrm{rank}\, A)$を**解の自由度**とよぶ．
なお，一般解の表し方は一意的ではない．

また，斉次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解ベクトル空間$S=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}\}$について，$\dim S=n-\mathrm{rank}\, A$ が成り立つ．S の基底を求めるためには，Mathematica で NullSpace[A]を実行すればよい．出力は，行ベクトルの形になる（下記の入力例参照）．非同次な連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が1つの解ベクトル $\boldsymbol{y}$(特殊解）を持てば，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解ベクトル全体の集合は

$$X=\{\boldsymbol{x}\mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z},\ A\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}\}$$

で与えられる．$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$の１つの解ベクトル（特殊解）を求めるためには，Mathematicaで LinearSolve[A，b]を実行すればよい．解は，行ベクトルの形で出力される（下記の入力例参照）．

入力例

(1) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3+x_4+2x_5=3 \\ -x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5=2 \\ x_1+x_2-x_3+3x_4-x_5=1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=1 \\ 3x_1-5x_2+x_3=3 \\ 5x_1-9x_2+7x_3=7 \end{cases}$

(1)（i）RowReduceを用いた場合

```
In[1]:= A1b1 ={{1, -1, 1, 1, 2, 3}，{-1, 1, 1, 2, 3, 2}，{1, 1, -1, 3, -1, 1}};
In[2]:= MatrixForm[RowReduce[A1b1]]
Out[2]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

したがって，$\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}(A|\boldsymbol{b})=3$であるから，この連立方程式は解を持ち，それは$5-3=2$個の任意定数を用いて表される．

したがって，(1)の連立方程式は，$\begin{cases} x_1=2-2x_4-\frac{1}{2}x_5 \\ x_2=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}x_4-x_5 \\ x_3=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}x_4-\frac{5}{2}x_5 \end{cases}$ と同値であり，

$\alpha=\frac{1}{2}x_4$，$\beta=\frac{1}{2}x_5$とおくと，連立方程式(1)の解が得られる：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\quad(\alpha,\ \beta\text{は任意定数}).$$

（ii）NullSpace，LinearSolveを用いた場合

```
In[1]:= A1 = {{1, -1, 1, 1, 2}，{-1, 1, 1, 2, 3}，{1, 1, -1, 3, -1}}; b1 = {3，2，1};
In[2]:= LinearSolve[A1，b1]
```

Out[2]:=$\left\{2, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0, 0\right\}$

これより，連立方程式(1)の 1 つの解（特殊解）$\boldsymbol{y}={}^t\!\left(2, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0, 0\right)$が得られる．また，

In[3]:= NullSpace[A1]

Out[3]:= {{-1, -2, -5, 0, 2}, {-4, -5, -3, 2, 0}}

であるから，基本解が $\boldsymbol{z}=\alpha\,{}^t(-1, -2, -5, 0, 2)+\beta\,{}^t(-4, -5, -3, 2, 0)$ （α，β は任意定数）と得られる．したがって，$\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$ が $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の求める解である．

(2) In[1]:= A2b2 = {{1, -2, 3, 1}, {3, -5, 1, 3}, {5, -9, 7, 7}};

In[2]:= MatrixForm[RowReduce[A2b2]]

Out[2]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって，rank $A=2\neq3=\mathrm{rank}(A|\boldsymbol{b})$であるから，この連立方程式は解を持たない．

クラメールの公式

未知数の個数と方程式の個数が同じ場合の連立一次方程式を考える．つまり，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とするとき，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は，$|A|\neq0$ ならば唯一の解を持ち，その解は

$$x_i=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

で与えられる．つまり，分母の行列式は $|A|$ であり，分子の行列式は A の第 i 列を $\boldsymbol{b}$ で置き換えた行列の行列式である．Mathematica では，行列 A の i 行目をベクトル $\boldsymbol{b}$ で置き換えた行列は，ReplacePart[A, b, i]で得られる．

入力例

連立一次方程式 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=3 \\ x_1-2x_2+3x_3=5 \\ 3x_1+2x_2-x_3=-1 \end{cases}$ について，

In[1]:= A = {{1, -1, 1}, {1, -2, 3}, {3, 2, -1}}; b = {3, 5, -1};

In[2]:= Det[A]

Out[2]:= -6

$|A|=-6\neq 0$ より，この連立一次方程式は唯一の解を持つ．クラメールの公式を用いる．

In[3]:= Table[Det[ReplacePart[Transpose[A]，b，i]]/Det[A]，{i，1，3}]

Out[3]:= {1，-2，0}

であるから，$x_1=1$，$x_2=-2$，$x_3=0$ を得る．（上記 In[3]の入力では A の転置行列の i 行目を行ベクトル $\boldsymbol{b}$ で置き換えて，その行列式を順に計算している．また，正方行列 P に対して，$|P|=|{}^tP|$ であることも用いている）

5．行列の対角化

始めに，基本事項をまとめておく．n 次正方行列 A に対して，$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n, \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0})$ となる複素数 λ を A の固有値，$\boldsymbol{x}$ を固有値 λ に対する固有ベクトルという．ただし，$\mathbb{C}^n$ は n 項複素数ベクトル空間（n 項列ベクトル全体）とする．また，A の固有値 λ に対して，$W(\lambda)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \mid A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\}$ を固有値 λ に対する固有空間と呼ぶ．

行列 A の固有値の 1 つを λ とすれば，$\mathbb{C}^n$ の $\boldsymbol{0}$ と異なるベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して，$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ と書ける．これを n 次単位行列 E_n を用いて書き直すと，$(\lambda E_n-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ である．この斉次連立一次方程式 $(\lambda E_n-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が自明でない解 $\boldsymbol{x}$ を持つための必要十分条件は $|\lambda E_n-A|=0$ である．$\Phi_A(t):=|tE_n-A|$ を A の固有多項式といい，$\Phi_A(t):=|tE_n-A|=0$ を固有方程式という．

n 次の正方行列 A に対して，適当な正則行列 P をとって，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とできるとき，行列 A は**対角化可能**であるという．A の固有値が全て異なるときは，A は対角化可能である．しかし，一般に n 次正方行列 A は対角化できるとは限らない．以下に，対角化可能性についての判定方法をまとめておく．

n 次の正方行列 A に対して，次は同値である．

(1) A は対角化可能である．

(2) n 個の 1 次独立な A の固有ベクトルが存在する．

(3) A の相異なる固有値の全てを $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$（ただし，$\lambda_i$ は A の固有方程式 $\Phi_A(t)=0$ の k_i 重解）とし，$W(\lambda_i)$ を A の固有値 λ_i に対する固有空間とするとき，$\dim W(\lambda_i)=k_i\,(i=1, 2, \ldots, r)$ が成立．$\dim \mathrm{W}(\lambda_i)=n-\mathrm{rank}(\lambda_i E_n-A)$ に注意する．

(a) n 次行列 A の固有多項式 $\Phi_A(t)=|tE_n-A|$ を求める.

CeharacteristicPolynomial[A，t]（t は固有多項式の変数である）

または Det[t IdentityMatrix[n] - A]（n は単位行列のサイズ）と入力する.

(b) 多項式 f を因数分解する.

Factor[f]

(c) A の固有値を求める.

Eigenvalues[A]（固有値を重複の分もカウントしたリストを返す）

(d) A の固有値 d に対する固有空間 $W(d)=\{\boldsymbol{x}\,|\,(A-dE_n)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ の基底を求める

NullSpace[A - d IdentityMatrix[n]]

(e) A の 1 次独立な固有ベクトルを求める.

Eigenvectors[A]（出力結果に{0, 0, . . . , 0}が出てきたらそれは除いて考える）

(f) A の固有値と対応する固有ベクトルを出力する.

Eigensystem[A]（出力結果に{0, 0, . . . , 0}が出てきたらそれは除いて考える）

なお,(d),(e),(f)のベクトルの出力は行ベクトルの形で出力される.

入力例

(1) $A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ -7 & -5 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(1) In[1]:= A = {{6, 3, 2, -1}，{2, 3, 0, -2}，{-7, -5, -1, 3}，{5, 3, 2, 0}};

In[2]:= Factor[CharacteristicPolynomial[A，t]]

Out[2]:=$(-3+t)^2(-1+t)^2$

したがって,A の固有値は 1，3（共に重根（重複度 2））である.

In[3]:= NullSpace[A - IdentityMatrix[4]];

Out[3]:= {{-1，2，0，1}，{-1，1，1，0}}

であるから,固有値 1 に対する 1 次独立な固有ベクトルとして,$\boldsymbol{p}_1={}^t(-1, 2, 0, 1)$, $\boldsymbol{p}_2={}^t(-1, 1, 1, 0)$が取れる（このとき,$\dim W(1)=2$).

In[4]:= NullSpace[A - 3IdentityMatrix[4]]

Out[4]:= {{1，0，-1，1}}

であるから,固有値 3 に対する 1 次独立な固有ベクトルとして,$\boldsymbol{q}_1={}^t(1, 0, -1, 1)$が取れる（このとき,$\dim W(3)=1\neq 2=$「固有値 3 の重複度」).したがって,$A$ は対角化不可能である.

(2) In[1]: = B = {{0, 2, 1, 1}，{3, -1, -1, 1}，{-3, 6, 4, 1}，{0, 0, 0, -1}};

In[2]: = Factor[CharacteristicPolynomial[B，t]]

Out[2]: =$(-3+t)(-1+t)(1+t)^2$

In[3]: = Eigensystem[B]

Out[3]: = {{3, -1, -1，1},

{{1，0，3，0}，{-1，-1，0，3}，{1，-2，3，0}，{0，-1，2，0}}}

したがって，固有値3に対する固有ベクトルとして，$\boldsymbol{p}_1={}^t(1, 0, 3, 0)$が取れる．また，固有値 -1 に対する1次独立な固有ベクトルとして，$\boldsymbol{p}_2={}^t(-1, -1, 0, 3)$，$\boldsymbol{p}_3={}^t(1, -2, 3, 0)$が取れ，このとき，$\dim W(-1)=2$ である．さらに，固有値1に対する固有ベクトルとして，$\boldsymbol{p}_4={}^t(0, -1, 2, 0)$が取れる．以上より，$B$ の各固有値に対して，その重複度と固有空間の次元が一致するので，B は対角化可能である．$P=(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3\ \boldsymbol{p}_4)$とおくと，$P^{-1}BP$ が得られる（$P^{-1}BP$ は直接計算しなくても分かるが，検算のため記しておく）．

In[4]: = P = Transpose[{{1, 0, 3, 0}，{-1, -1, 0, 3}，{1, -2, 3, 0}，{0, -1, 2, 0}}];

In[5]: = MatrixForm[Inverse[P]. B. P]

Out[5]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6．対角化の応用

(1) 行列の三角化

線形代数学の主要な定理の1つとして，行列の三角化の定理があるが，実際に三角化の計算を行うことは，通常の学習課程ではそう多くはないだろう．この辺りをMathematicaで実験してみるのも面白いだろうと思う．まず，行列の三角化について，簡単に概略をまとめておく．

n 次の正方行列 A に対して，適当な正則行列 P を取ると，

(★★)
$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる（$P^{-1}AP$ が上三角行列にできる）．これは，n に関する帰納法により証明できる．実際の三角化の計算に際して役に立つので，以下に略証明を述べる．

$n=1$ のとき明らかに成り立つ．$n>1$ として，$n-1$ のときの成立を仮定する．A の固有値の1つ λ_1 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1$ とするとき，$\boldsymbol{p}_1$ を第1列に持つ正則行列を S とすると，

$$S^{-1}AS=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

と表すことができる．A_1 は $(n-1)$ 次正方行列であるから，帰納法の仮定により，適当な $(n-1)$

次正則行列 Q により，

$$Q^{-1}A_1Q=\begin{pmatrix} \lambda_2 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と表すことができる．よって，$R=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$，$P=SR$ とおけば（⋆⋆）が得られる（略証明終わり）．

入力例

3次行列 $A=\begin{pmatrix} 9 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$ を三角化する．

```
In[1]: = A = {{9, -3, -1}, {3, 2, -2}, {-4, 7, 10}};
In[2]: = Eigensystem[A]
Out[2]: = {{7, 7, 7}, {{-1, -1, 1}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}}
```

A の固有値は7（3重根）であり，固有値7に対する固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_1={}^t(-1,-1,1)$ がとれる（$\dim W(7)=1$ より A は対角化できない）．

$S=(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3)$ とおく．ただし，$\boldsymbol{e}_2={}^t(0,1,0)$，$\boldsymbol{e}_3={}^t(0,0,1)$ とする．

```
In[3]: = S = Transpose[{{-1, -1, 1}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}];
In[4]: = Det[S]
Out[4]: = -1
```

$\det S=-1\neq 0$ より，S は正則行列であり，$S^{-1}AS$ は次の通りである：

```
In[5]: = MatrixForm[Inverse[S]. A. S]
Out[5]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

次に $A_1=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ とおく．

```
In[6]: = A1 = {{5, -1}, {4, 9}};
In[7]: = Eigensystem[A1]
Out[7]: = {{7, 7}, {{-1, 2}, {0, 0}}}
```

そして，$Q={}^t\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．

```
In[8]: = Q = Transpose[{{-1, 2}, {0, 1}}];
In[9]: = Det[Q]
```

Out[9]: = -1

In[10]: = MatrixForm[Inverse[Q]. A1. Q]

Out[10]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Q は正則行列で，QA_1Q^{-1} は上記の通りである．$R=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$，$P=SR$ とおくと，P 及び $P^{-1}AP$（A の三角化）は次の通りである：

In[11]: = R = Transpose[{{1，0，0}，{0，-1，2}，{0，0，1}}];

In[12]: = P = S. R;

In[13]: = MatrixForm[%]

Out[13]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

In[14]: = MatrixForm[Inverse[P]. A. P]

Out[14]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

注意．A のジョルダン標準形を求めても三角化できるが，ここでは割愛させていただく．

(2) 実対称行列の対角化

実対称行列の対角化に関しては，次の定理が基本的である．

定理 A．実対称行列 A の固有値はすべて実数であり，適当な直交行列 P によって対角化できる．

定理 B．実対称行列 A の相異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交する．

入力例

4 次実対称行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ を直交行列で対角化する．

In[1]: = A = {{1, 2, 2, 2}，{2, 1, 2, 2}，{2, 2, 1, 2}，{2, 2, 2, 1}};

In[2]: = Eigensystem[A]

Out[2]: = {{7, -1, -1, -1}，{{1, 1, 1, 1}，{-1, 0, 0, 1}，{-1, 0, 1, 0}，{-1, 1, 0, 0}}}

したがって，A の固有値は 7，-1（-1 は重複度 3）である．

In[3]: = Q = Orthogonalize[Eigenvectors[A]]

Out[3]: = $\left\{\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}, \left\{-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right\}\right\}$

In[4]: = P = Transpose[Q];

であるから，$P={}^tQ$ は A を対角化する直交行列である．つまり，$P({}^tP)=({}^tP)P=E_4$ を満たしている．なお，P が直交行列であることと，P の列ベクトルが（$\mathbb{R}^4$ の）正規直交基をなすことが同値であることに注意する．直交行列であることを念のため確認すると，

In[5]: = MatrixForm[P. Transpose[P]]

Out[5]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．$P^{-1}AP$ または $({}^tP)AP$ を計算すると次の通りであるが，今の例の場合だと最後の出力結果が簡単な形になっていないので，Simplify コマンドを使って出力を見やすい形にしている：

In[6]: = Simplify[MatrixForm[Inverse[P]. A. P]]

Out[6]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

以上，紙面の関係から内容を厳選してまとめたが，別の内容やさらに進んだ内容については，今後別の機会にでもご報告できればと思う．

参 考 文 献

［1］川原雄作，木村哲三，藪康彦，亀田真澄，「線形代数の基礎」，共立出版，1994年.
［2］小林道正，「Mathematica による線形代数」，朝倉書店，1996年.
［3］齋藤正彦，「線型代数入門」，東京大学出版会，1966年.
［4］白石修二，「例題で学ぶ Mathematica〈数学編〉」，森北出版，1995年.
［5］谷口義治，永友清和，「線形代数と Mathematica」，牧野書店，2012年.
［6］速水孝夫，「大学初年次の数学科目にみる数学教育の危機感について」，北海学園大学学園論集，第170号，27-38（2016）.
［7］宮岡悦良，「数学の道具箱 Mathematica　基本編」，近代科学社，2016年.
［8］芳沢光雄，「新体系・高校数学の教科書（下）」，講談社，2010年.