| | |
|---|---|
| タイトル | コンピュータを利用した整数ひき算の教授学習支援システム |
| 著者 | 後藤，聡；GOTO，So |
| 引用 | 北海学園大学学園論集(170)：1-15 |
| 発行日 | 2016-12-25 |

# コンピュータを利用した
# 整数ひき算の教授学習支援システム

後　藤　　聡

## Ⅰ　はじめに

整数ひき算を課題とした研究は，最も単純な減数，答が一桁になるひき算（以下，一桁ひき算と記す。）から始まった。Smith（1921）は一桁ひき算について，その難易を基準に問題の分類を図った。Washburne & Vogel（1928）は難易順を示した。これらは，相対的な難易差を扱っただけに留まっている。

認知心理学の台頭により，内的な構造に視点を当てた研究が見られるようになった。一桁ひき算では，Woods, Resnick & Groen（1975）が解答過程に関する５つのモデルを想定し，カードに書かれた問題を子どもに解答させることによって検証し，解答にはかなり複雑な過程が機能していることを示した。後藤（1999）は，子どもを対象として測定した反応時間（回答に要する時間（以下，同様））から特異数の内的表象を明らかにした。

筆算では，Brown & Burton（1978）が手続き的ネットワークモデルを考案し，子どもの誤った答は手続きの一部が脱落したり別の手続きに置き換えられることを確かめた。その後，Brown & VanLehn（1980）は間に合わせ理論と呼ばれる新たな理論を提案した。

その他，一桁ひき算，筆算の計算方略を分析した研究（西谷 1989，1990），筆算の誤答を検討した研究（波多野ほか 1986，森田 1987），コンピュータを介して誤答を診断するためのシステム開発（佐伯ほか 1983，堂本ほか 1984）など，多種のアプローチにより，ひき算への取り組みがなされてきた。

これらは，複雑な情報処理過程を解明し，あるいは教育上の有益な指針を与え，多大な成果をあげたように思われる。しかし，筆算に限ってみれば，実験などに用いた問題は，問題構造上，どのような性質を有しているのかが示されていない。従って，問題の選択基準が不明瞭である。

学習指導要領に先立ち 2008 年１月 17 日に出された中央教育審議会の答申をまとめた学習指導要領のポイントの一つは「基礎的・基本的な知識・技能の習得」であり，「読み・書き・計算など基礎的・基本的な知識・技能は発達段階に応じて徹底して習得させ，学習の基盤を構築することを重視している。」とされた（吉田（2008））。これに基づき，新しい小学校学習指導要領第１章総則第１教育課程編成の一般方針の１でも「（前略）基礎的・基本的な知識及び技能を確実に習得さ

せ（後略)」（文部科学省（2008））と示された。さらに工藤（2008）は，そのための指導計画の作成にあたって配慮すべき重要なことの一つを，「基礎的・基本的な知識・技術を確実に習得させるための方策を明確にすること」，例えば「繰り返し指導や個に応じた指導方法が想定される。」と述べている。

この考え方は算数において一層重要視していると思える。先の中央教育審議会の答申においても，小学校算数の改善点について「（前略）基礎的・基本的な知識・技術を確実に定着させる（後略)」（中野（2008））と示された。草野（2008）・廣田（2008）はこの点を改善の基本方針の一つとして取り上げ，さらに「算数・数学の内容の系統性を重視」と述べている。「系統」を「ある原理・法則によって順序だてた統一のあるもの。」（新村（2008））の意味に解すと，「何を，どのような順序で」問題に取り組むかという教授学習過程の研究では，算数こそが改善点を実現させるべき重要な教科と考える。Gagné（1985）は前提技能の欠如が計算を間違えさせると指摘しているが,計算が前提技能を利用した系統性のある操作であるという見解に基づいているからである。

以上の必然性により，筆者は，算数の教授学習過程において子どもが最初に学習する演算である被加数，加数が一桁のたし算（以下，一桁たし算と記す。）について，難易の違いを配慮した教授学習過程を提案した（後藤（2011））。更に，その発展課題である二桁と三桁の数を含む整数たし算について，問題の性質を異にすると思われる条件を基準に全問題を類型化し，問題の難易を配慮して系列化した教材を教授者，学習者へ提供できる，コンピュータを活用した教授学習支援システムを開発した（後藤（2016a））。本研究では，その発展課題である整数ひき算を扱う。

さて，教材の系列化に関する理論がいくつか提出されている。Gagné & Briggs（1974）の学習階層性による教材分析，Ausubel（1968），Hartley & Davies（1976）の先行オーガナイザーを用いる方法，Suppes & Ihrke（1970），Suppes，Jerman，& Brian（1968），Seppes & Morningstar（1972）の教材を構成している要因の難易度を予測し，それらの組み合わせから系列化を進めるという方法などである。

本研究で参考にするのに最も適しているものは，Suppesら（1968・1970・1972）であろう。基本的考えは，先ず問題を構成している要因を取り出し，それらの要因の組み合わせから問題の難易度を正答率として予測し，それに基づいて系列化を進めて行くというものである。例えば，Suppes & Morningstar（1972）は，たし算とひき算において，繰り上がり，繰り下がり，合計値，横式の形，縦式の形を要因として取り出している。更に，これらの要因に与えられる回帰係数を求め，どの要因が難易度と関係しているかを調べている。ただし，これらの方法の問題点は，そこで取り上げた問題が問題全体の中のどのような位置にあるかの基準や手掛かりがないため，偶発的な結果を生じる可能性をもつ点である。

本来，被験者が実験材料に取り組み，その結果から被験者に潜む何らかの一定傾向を得ようとする場合，材料の方を厳密に統制する必要があると考える。さもなくば，結果はたまたま取り上げた問題に左右される可能性がある。従って，一貫したより有益な示唆を得るためには，子ども

の一過性の反応を手掛かりにするのではなく，前もって明確な基準で整備された材料を必要とする。そこで，本研究では，Suppes らのように数量的な難易度分析から系列化を行うという手順をとらず，先ずは全問題の類型化と系列化を計り，ひき算の問題全体を整理することから始める。

筆者は，先行学習である一桁ひき算について，繰り下がりがない問題の難易の違いを配慮した教授学習過程を提案した（後藤（2015））。更に，繰り下がりがある問題についても検討中である（後藤（準備中））。本研究では，それらの発展課題である被減数が二桁，または三桁である整数ひき算について扱う。問題の性質を異にすると思われる条件を基準に全問題を類型化し，問題の難易を配慮して系列化した教材を教授者，学習者へ提供するため，コンピュータを活用した教授学習支援システムを作成する。

## Ⅱ　方　　法

### 1．問題の種類

被減数が三桁以下のひき算を扱う。更に桁が増えても同じ操作の繰り返しだからである。一桁ひき算を除くと，問題の桁は二桁－一桁，二桁－二桁，三桁－一桁，三桁－二桁，三桁－三桁の5種類である。これらを全て個別に扱うことは結果が煩雑になる。小学校の算数指導では，単元構成の一つの重要な基準として数の桁の大きさを用いる。ひき算においては被減数の桁数が最大数となるため，被減数の桁の大きさを基準に問題を区分することが望ましいと考える。

但し，二桁－一桁の問題には，答が二桁になる筆算の他，繰り下がった結果答が一桁になる一桁ひき算も含まれるが，後藤（2015・準備中）で扱われているため除外する。本研究では，一桁ひき算を除いた被減数が二桁，三桁の整数問題を扱う。なお，被減数三桁の問題については，後藤（2000）を加筆修正して採用する。

### 2．研究の手順

手順は次の通りである。

（１）　被減数が二桁，三桁の全問題を区分する。

（２）　各々について，答を導くまでの難易に関わると思われる問題構造上の要因を抽出する。

（３）　抽出した要因を全て組み合わせて，各々の全問題を類型化する。

（４）　先行研究で明らかになった難易差を基準に（３）の類型を系列化し，構造が一目で把握できるように図示化する。

（５）　以上の結果を用いてコンピュータを利用した教授学習支援システムを作成する。

## Ⅲ　被減数が二桁のひき算

### 1．問題の種類

被減数が二桁であるひき算問題の桁は，二桁－一桁，二桁－二桁の２種類である。この条件を

満たす問題の総数は4770問存在する。

## 2．難易に影響を与える要因とその難易差

学習者，教授者とは独立し，教材として被減数が二桁になる整数ひき算問題に固有の難易を規定する要因として，次の5つを取り上げた。また，一桁ひき算の研究結果を参考に，各要因の難易について考察を加える。なお，以下減数，被減数，答の型を示すⅡⅠ，Ⅱ0，ⅠのⅠ，Ⅱは，それぞれ1，10の位の数字がゼロでないことを，0は，1の位の数字がゼロであることを表す。

（1）　繰り下がりの有無

　①　繰り下がりなし

　②　繰り下がりあり

の2種に区別される。

被減数が二桁のひき算における繰り下がりは，56−38のように被減数の1の位の数が減数のそれよりも小さいために生じる。そのため，1の位の部分差を計算する際には繰り下がりのある一桁ひき算を行うことになる。77名の小学2年生を対象として一桁ひき算の回答を求めた結果，難易の指標となる反応時間の平均値は繰り下がりがない問題で1.869 sec，ある問題で3.708 secとなり，1%水準で有意であった。これより，一桁ひき算では繰り下がりのある問題の方がない問題よりも難しいと判断できる。

また，1の位で繰り下がると，10の位から借りてくる1を10の位の数からひく必要がある。その分だけ，繰り下がりがない問題と比較して処理数は増えることになり，難しくなるとも考えられる。

（2）　減数の桁と0の有無

　①　Ⅰ

　②　Ⅱ0

　③　ⅡⅠ

の3種に区別される。

他の要因が同一であれば，桁が大きくなるほど処理数は多くなる。前記したように，処理数が多くなると複雑化するため，問題は難しくなる。従って，減数の桁が大きい問題ほど難しいことになる。

0が含まれる問題については以下である。73-30のように減数の1の位が0の問題は繰り下がりがない場合に限られ，後藤（2014・2015・2016b）の結果より，減数が0以外の問題よりも易しい。

（3）　答の桁と0の有無

　①　Ⅰ

　②　Ⅱ0

③　ⅡⅠ

の３種に区別される。

繰り下がりがない問題で答の型がⅠとなるのは，63－61 のように減数，被減数の 10 の位の数が同数の場合である。繰り下がりがある問題では，63－58 のように被減数の 10 の位の数から繰り下がりに使う１を引いた結果が，減数の 10 の位の数と同数になる場合である。何れにおいても，計算過程で同数のひき算が含まれることになり，それは同じ一桁ひき算の中でも他の問題より易しい（後藤（2016c））。従って答が一桁になる問題は，他の問題と比較して易しいことになる。

答の型がⅡ０となるのは，繰り下がりのない問題に限定され，57－17 のように被減数と減数の１の位の数が同数の場合である。前記と同様，同数の一桁ひき算は他の問題よりも易しいため，Ⅱ０の問題はⅡⅠの問題と比較して易しいことになる。

（４）　被減数の中の０の有無

①　Ⅱ０

②　ⅡⅠ

の２種に区別される。

被減数の１の位が０の問題では，40－20 のように繰り下がりがない場合は１の位の一桁ひき算が０－０に限定され，後藤（2015）より一桁ひき算としては易しい。繰り下がりがある場合は，40－18 のように１の位の一桁ひき算が必ず 10－の形式になる。この難易は 41－18 のような 11 以上の数からひく場合との比較になる。後藤（2011）より 10 の扱いは 11 以上よりも容易になっている。従って，いずれの場合も被減数の中に０がある問題の方が易しい。

（５）　一桁ひき算の難易

計算のアルゴリズムとして見ると，被減数が二桁のひき算は，計算過程で一桁ひき算を１〜3 回行う。従って，一桁ひき算の難易も被減数が二桁のひき算の難易を規定する要因となる。

## ３．問題の類型化

前記した難易を規定する要因に基づいて被減数が二桁の全問題 4770 問を類型化する。但し，（５）の要因を含めると類型が極めて多岐に渡り煩雑になるため除外し，難易の詳細は後藤（2015・準備中）に従うものとする。

前記（１）〜（４）の要因を単純に組み合わせると 2×3×3×2 ＝ 36 類型考えられる。しかし，これらの要因は相互に完全独立ではなく，実際には 14 類型抽出することができた。これらに型番号を与えたのが表１である。表には，繰り下がりの有無，答の型，問題の型（被減数，減数の桁と０の有無），問題数を示した。型番号は難易を前提とした系列順を示している。

**表1**　被減数が二桁の整数ひき算問題の類型

| 型番号 | 問題の型 | 答の型 | 問題数 | 繰り下がり |
|---|---|---|---|---|
| 1 | ⅡⅠ－　Ⅰ | Ⅱ0 | 81 | なし |
| 2 | ⅡⅠ－　Ⅰ | ⅡⅠ | 324 | |
| 3 | ⅡⅠ－Ⅱ0 | Ⅰ | 81 | |
| 4 | Ⅱ0－Ⅱ0 | Ⅱ0 | 36 | |
| 5 | ⅡⅠ－Ⅱ0 | ⅡⅠ | 324 | |
| 6 | ⅡⅠ－ⅡⅠ | Ⅰ | 324 | |
| 7 | ⅡⅠ－ⅡⅠ | Ⅱ0 | 324 | |
| 8 | ⅡⅠ－ⅡⅠ | ⅡⅠ | 1,296 | |
| 9 | Ⅱ0－　Ⅰ | ⅡⅠ | 72 | あり |
| 10 | ⅡⅠ－　Ⅰ | ⅡⅠ | 288 | |
| 11 | Ⅱ0－ⅡⅠ | Ⅰ | 72 | |
| 12 | ⅡⅠ－ⅡⅠ | Ⅰ | 288 | |
| 13 | Ⅱ0－ⅡⅠ | ⅡⅠ | 252 | |
| 14 | ⅡⅠ－ⅡⅠ | ⅡⅠ | 1,008 | |

## 4. 問題の系列化

(1)　14類型の系列化

3において類型化した14類型の問題を，視覚的に出来るだけ分かり易く系統樹に見立てて配列し，二元配置で構造化したものが図1である。

(2)　配列の原則

①　繰り下がりの有無による配置

縦に伸びる幹に相当するものは，繰り下がりの有無によって分かれている。左には繰り下がりのない問題，右にはある問題を配置した。

②　問題の型による配置

各幹から右に伸びている枝に相当するものは，減数の桁の大きさ，被減数や減数の0の有無によって分かれている。下から順に，Ⅱ0－Ⅰ，ⅡⅠ－Ⅰ，Ⅱ0－Ⅱ0，ⅡⅠ－Ⅱ0，Ⅱ0－ⅡⅠ，ⅡⅠ－ⅡⅠの問題である。

③　答の型による配置

各枝の途中にある「樹の葉」に相当するものは問題の型番号を表し，表1と対応している。それらは答の型を縦に揃えてある。左から答の型がⅠ，Ⅱ0，ⅡⅠとなる問題を配置した。

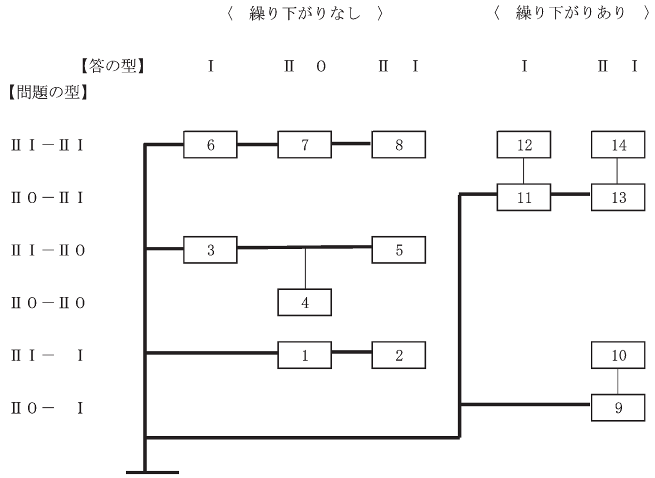



図１　被減数が二桁の整数ひき算問題の系統樹

## Ⅳ　被減数が三桁のひき算

### １．問題の種類

被減数が三桁になるひき算問題の桁は，三桁－一桁，三桁－二桁，三桁－三桁の３種類である。この条件を満たす問題の総数は 493,650 問存在する。

### ２．難易に影響を与える要因とその難易差

学習者，教授者とは独立し，教材としての被減数が三桁になる整数ひき算問題に固有の難易を規定する要因として，次の５つを取り上げた。また，一桁ひき算の研究結果を参考に，各要因の難易について考察を加える。なお，以下減数，被減数，答の型を示すⅢ，Ⅱ，Ⅰは各々 100，10，1 の位の数字がゼロでないことを，0 は，その位の数字がゼロであることを表す。

（１）　繰り下がりの有無・位置・回数

①　繰り下がりなし　　　　　　　　②　１の位に繰り下がりあり

③　10 の位に繰り下がりあり　　　　④　１と 10 の位に繰り下がりあり

の４種類に区別される。

被減数が三桁のひき算における繰り下がりは，被減数の１，10 の位の数が減数のそれよりも小さいために生じる。そのため，１の位の部分差を計算する際には繰り下がりのある一桁ひき算を行うことになる。前記の通り，一桁ひき算では繰り下がりのある問題の方がない問題よりも難しかった。更に，１の位に繰り下がりがあるために被減数の 10 の位から１を借り，そのために 10 の位で繰り下がりが生じる場合もある。ここでも１と 10 の位の部分差の計算では繰り下がりのある一桁ひき算を行うことになるため，被減数が三桁のひき算においても，繰り下がりのある問

題の方がない問題よりも難しいことになる。

また，前記の通り，解答までの処理数が難しさと関係している。1の位で繰り下がると，被減数の10の位から借りてくる1を10の位の数からひく必要がある。10の位で繰り下がると，被減数の100の位から借りてくる1を100の位の数からひく必要がある。その分だけ，繰り下がりがない問題と比較して処理数は増えることになり，難しくなるとも考えられる。

従って，難易については，繰り下がりなし，繰り下がり1回，繰り下がり2回の順に難しくなっていく。

(2)　減数の桁と0の有無・位置・個数

①　Ⅰ　　②　ⅡⅠ
③　Ⅱ0　　④　ⅢⅡⅠ
⑤　ⅢⅡ0　　⑥　Ⅲ0Ⅰ
⑦　Ⅲ00

の7種類に区別される。

他の要因が同一であれば，減数の桁が大きくなるほど処理数は多くなる。前記したように，処理数が多くなると複雑化するため，問題は難しくなる。従って，減数の桁が大きい問題ほど難しいことになる。

減数に0がある問題は，357−203のようにその位に繰り下がりがない場合に限られ，後藤(2014・2015・2016b)の結果より，ひく数が0の問題は他の数よりも易しい。従って，減数に0のある方が，その数の多い方が易しいことになる

(3)　答の桁と0の有無・位置・個数

①　Ⅰ　　②　ⅡⅠ
③　Ⅱ0　　④　ⅢⅡⅠ
⑤　ⅢⅡ0　　⑥　Ⅲ0Ⅰ
⑦　Ⅲ00

の7種類に区別される。

繰り下がりがない問題で答が一桁になるのは，256−251のように減数，被減数の10，100の位の数同士が同数の場合である。繰り下がりがある問題においても，256−248のように繰り下がりに使う1を引いた後に残る数は，減数の同じ位の数と同数になる。答が一桁になる問題は，10と100の位で同数のひき算を行うが，答が二桁の場合は，256−243のようにそれが100の位のみになる。いずれにしても後藤(2016c)より一桁ひき算で被減数と減数が同数の問題は他の問題よりも易しい。従って，答が一桁の問題は同数のひき算を2回行うので最も易しく，次に1回行う二桁，最も難しいのは三桁になる。

繰り下がりがない問題で答に0が登場するのは，256−156のようにその位の被減数と減数が同数の場合で，前記の通り易しい。他方，206−2のように被減数の10の位の数が0で，かつ減数が

一桁の場合も答に0は登場するが，0のある位で実質的にひき算を行わないので，256－2のような0以外の数と差がないと思われる。

繰り下がりがある問題では，前記の他に，256－148のように被減数の10の位の数から繰り下がりに使う1をひいた結果が，減数の10の位の数と同数になる場合，更に，例えば300－192の様に1の位が繰り下がるために10の位に繰り下がりが波及し，10の位でのひき算が9－9となる場合がある。いずれにしても同数の一桁ひき算である。

以上，計算過程で被減数と減数が同数の一桁ひき算が含まれる問題は他の一桁ひき算が含まれる場合よりも易しいため，答に0の含まれる方が，その数の多い方が易しいことになる。

（４）　被減数の0の有無・位置・個数

①　ⅢⅡⅠ　　　　②　ⅢⅡ0

③　Ⅲ0Ⅰ　　　　④　Ⅲ0 0

の4種類に区別される。

被減数に0がある問題では，その桁に繰り下がりがない場合は309－207のようにその桁の一桁ひき算が0－0に限定され，前記の通り一桁ひき算としては易しい。繰り下がりがある場合は，309－187のようにその位での一桁ひき算が必ず10－の形式になる。この難易は319－187のような11以上の数からひく場合との比較になる。後藤（2011）より10の扱いは11以上よりも容易になっている。従って，いずれの場合も被減数の中に0がある問題の方が易しい。以上より，被減数に0のある方が，その数の多い方が易しいことになる。

（５）　一桁ひき算の違い

計算のアルゴリズムとして見ると，被減数が三桁のひき算は，計算過程で一桁ひき算を1～5回行う。従って，一桁ひき算の難易も被減数が三桁のひき算の難易を規定している要因となる。

## ３．問題の類型化

前記した難易を規定する要因に基づいて被減数が三桁の全問題493,650問を類型化する。但し，（５）の要因を含めると類型が極めて多岐に渡り煩雑になるため除外し，難易の詳細は後藤（2015・準備中）に従うものとする。

（１）～（４）の要因を単純に組み合わせると4×7×7×4 = 784類型考えられる。しかし，これらの要因は相互に完全独立ではない。互いに相容れないものもあり，結果として128類型得られた。何ら基準を設けずにこれらを羅列することは，資料を煩雑にする。そこで，下記の基準，及び手順で全類型を35の基本型に集約して通し番号を与え，更に，各々の中に属する下位類型別に通し番号を付した。それらを問題と答の型，問題数，繰り下がりの有無・位置と共に表2に示した。型番号の左の数字は基本型の番号，丸数字はその下位類型別の通し番号である。

表２　被減数が三桁の整数ひき算問題の類型

| 型番号 | | 問題と答の型 | 問題数 | 繰り下がり |
|---|---|---|---|---|
| 1 | ① | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 2,916 | なし |
| 2 | ① | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅰ ＝ Ⅲ ０ Ⅰ | 324 | |
| | ② | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅰ ＝ Ⅲ ０ ０ | 81 | |
| | ③ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ ０ | 729 | |
| 3 | ① | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 11,664 | |
| | ② | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅱ ０ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 2,916 | |
| 4 | ① | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅱ ０ ＝ Ⅲ Ⅱ ０ | 324 | |
| | ② | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅱ ０ ＝ Ⅲ ０ ０ | 81 | |
| | ③ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ ０ | 2,916 | |
| | ④ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ ０ Ⅰ | 2,916 | |
| | ⑤ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ ０ ０ | 729 | |
| | ⑥ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅱ ０ ＝ Ⅲ ０ Ⅰ | 729 | |
| 5 | ① | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅲ ０ Ⅰ ＝ Ⅰ | 324 | |
| | ② | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅲ ０ ０ ＝ Ⅰ | 81 | |
| | ③ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅰ | 2,916 | |
| | ④ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ ０ ＝ Ⅰ | 729 | |
| 6 | ① | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 11,664 | |
| | ② | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ ０ ＝ Ⅱ Ⅰ | 2,916 | |
| | ③ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ ０ Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 2,916 | |
| | ④ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ ０ ０ ＝ Ⅱ Ⅰ | 729 | |
| 7 | ① | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅲ Ⅱ ０ ＝ Ⅱ ０ | 324 | |
| | ② | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅲ ０ ０ ＝ Ⅱ ０ | 81 | |
| | ③ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅱ ０ | 2,916 | |
| | ④ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ ０ Ⅰ ＝ Ⅱ ０ | 729 | |
| 8 | ① | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 46,656 | |
| | ② | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ ０ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 11,664 | |
| | ③ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ ０ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 11,664 | |
| | ④ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ ０ ０ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 2,916 | |
| 9 | ① | Ⅲ ０ ０ － Ⅲ ０ ０ ＝ Ⅲ ０ ０ | 36 | |
| | ② | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅲ Ⅱ ０ ＝ Ⅲ Ⅱ ０ | 1,296 | |
| | ③ | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅲ Ⅱ ０ ＝ Ⅲ ０ ０ | 324 | |
| | ④ | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅲ ０ ０ ＝ Ⅲ Ⅱ ０ | 324 | |
| | ⑤ | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅲ ０ Ⅰ ＝ Ⅲ ０ Ⅰ | 1,296 | |
| | ⑥ | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅲ ０ Ⅰ ＝ Ⅲ ０ ０ | 324 | |
| | ⑦ | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅲ ０ ０ ＝ Ⅲ ０ Ⅰ | 324 | |
| | ⑧ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ ０ | 11,664 | |
| | ⑨ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ ０ Ⅰ | 11,664 | |
| | ⑩ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ ０ ０ | 2,916 | |
| | ⑪ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ ０ ＝ Ⅲ ０ Ⅰ | 2,916 | |
| | ⑫ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ ０ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ ０ | 2,916 | |
| 10 | ① | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 648 | 1位 |
| | ② | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 2,592 | |
| 11 | ① | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅰ ＝ Ⅲ ０ Ⅰ | 81 | |
| | ② | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅰ ＝ Ⅲ ０ Ⅰ | 324 | |
| 12 | ① | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 2,268 | |
| | ② | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 9,072 | |
| 13 | ① | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ ０ Ⅰ | 648 | |
| | ② | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ ０ Ⅰ | 2,592 | |
| 14 | ① | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅰ | 648 | |
| | ② | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅲ ０ Ⅰ ＝ Ⅰ | 81 | |
| | ③ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅰ | 2,592 | |
| | ④ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ ０ Ⅰ ＝ Ⅰ | 324 | |
| 15 | ① | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 2,268 | |
| | ② | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅲ ０ Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 648 | |
| | ③ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 9,072 | |
| | ④ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ ０ Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 2,592 | |
| 16 | ① | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 9,072 | |
| | ② | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅲ ０ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 2,592 | |
| | ③ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 36,288 | |
| | ④ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ ０ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 10,368 | |
| 17 | ① | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ ０ Ⅰ | 2,592 | |
| | ② | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅲ ０ Ⅰ ＝ Ⅲ ０ Ⅰ | 324 | |
| | ③ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ ０ Ⅰ | 10,368 | |
| | ④ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ ０ Ⅰ ＝ Ⅲ ０ Ⅰ | 1,296 | |

| 型番号 | | 問題と答の型 | 問題数 | 繰り下がり |
|---|---|---|---|---|
| 18 | ① | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 324 | 10位 |
| | ② | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅱ ０ ＝ Ⅱ Ⅰ | 81 | |
| | ③ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 1,296 | |
| | ④ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅱ ０ ＝ Ⅱ Ⅰ | 324 | |
| 19 | ① | Ⅲ ０ ０ － Ⅱ ０ ＝ Ⅱ ０ | 9 | |
| | ② | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅱ ０ ＝ Ⅱ ０ | 36 | |
| | ③ | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅱ ０ | 81 | |
| | ④ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅱ ０ | 324 | |
| 20 | ① | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 2,592 | |
| | ② | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅱ ０ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 648 | |
| | ③ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 10,368 | |
| | ④ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅱ ０ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 2,592 | |
| 21 | ① | Ⅲ ０ ０ － Ⅱ ０ ＝ Ⅲ Ⅱ ０ | 72 | |
| | ② | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅱ ０ ＝ Ⅲ Ⅱ ０ | 288 | |
| | ③ | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ ０ | 648 | |
| | ④ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ ０ | 2,592 | |
| 22 | ① | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 2,592 | |
| | ② | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ ０ ＝ Ⅱ Ⅰ | 648 | |
| | ③ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 10,368 | |
| | ④ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ ０ ＝ Ⅱ Ⅰ | 2,592 | |
| 23 | ① | Ⅲ ０ ０ － Ⅲ Ⅱ ０ ＝ Ⅱ ０ | 72 | |
| | ② | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅲ Ⅱ ０ ＝ Ⅱ ０ | 288 | |
| | ③ | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅱ ０ | 648 | |
| | ④ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅱ ０ | 2,592 | |
| 24 | ① | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 9,072 | |
| | ② | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ ０ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 2,268 | |
| | ③ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 36,288 | |
| | ④ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ ０ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 9,072 | |
| 25 | ① | Ⅲ ０ ０ － Ⅲ Ⅱ ０ ＝ Ⅲ Ⅱ ０ | 252 | |
| | ② | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅲ Ⅱ ０ ＝ Ⅲ Ⅱ ０ | 1,008 | |
| | ③ | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ ０ | 2,268 | |
| | ④ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ ０ | 9,072 | |
| 26 | ① | Ⅲ ０ ０ － Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 9 | 1・10位 |
| | ② | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 36 | |
| 27 | ① | Ⅲ ０ ０ － Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 72 | |
| | ② | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 288 | |
| 28 | ① | Ⅲ ０ ０ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅰ | 9 | |
| | ② | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅰ | 36 | |
| 29 | ① | Ⅲ ０ ０ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 72 | |
| | ② | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 405 | |
| | ③ | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 288 | |
| | ④ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 1,620 | |
| 30 | ① | Ⅲ ０ ０ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 576 | |
| | ② | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 3,240 | |
| | ③ | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 2,304 | |
| | ④ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 12,960 | |
| 31 | ① | Ⅲ ０ ０ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ ０ Ⅰ | 72 | |
| | ② | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ ０ Ⅰ | 288 | |
| 32 | ① | Ⅲ ０ ０ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅰ | 72 | |
| | ② | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅰ | 288 | |
| 33 | ① | Ⅲ ０ ０ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 576 | |
| | ② | Ⅲ ０ ０ － Ⅲ ０ Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 72 | |
| | ③ | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 3,240 | |
| | ④ | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 2,304 | |
| | ⑤ | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅲ ０ Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 288 | |
| | ⑥ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅱ Ⅰ | 12,960 | |
| 34 | ① | Ⅲ ０ ０ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 2,016 | |
| | ② | Ⅲ ０ ０ － Ⅲ ０ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 252 | |
| | ③ | Ⅲ Ⅱ ０ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 11,340 | |
| | ④ | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 8,064 | |
| | ⑤ | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅲ ０ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 1,008 | |
| | ⑥ | Ⅲ Ⅱ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ Ⅱ Ⅰ | 45,360 | |
| 35 | ① | Ⅲ ０ ０ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ ０ Ⅰ | 252 | |
| | ② | Ⅲ ０ Ⅰ － Ⅲ Ⅱ Ⅰ ＝ Ⅲ ０ Ⅰ | 1,008 | |

## 4．基本型の類型基準と手順

単純から複雑を原則とする系列化を想定し，次の基準と手順で35の基本型を生成した。

（1） 全128類型を繰り下がりなし，繰り下がりが1の位，10の位，1・10の位の順に4類型した。

（2） （1）の結果得られた各型別に，減数が一桁，二桁，三桁の順に更に3類型した。

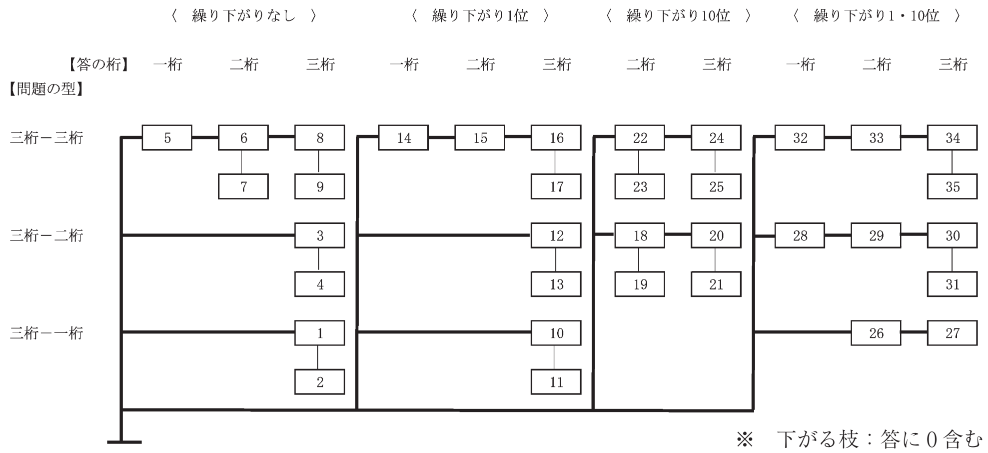
（3） （2）の結果得られた各型別に，答が一桁，二桁，三桁の順に更に3類型した。

（4） （3）の結果得られた各型別に，答に0を含むか否かで更に2類型した。

## 5．問題の系列化

（1） 35基本形の系列化

4において類型化した35基本型の問題を，視覚的に出来るだけ分かり易く系統樹に見立てて配列し，二元配置で構造化したものが図2である。




※　下がる枝：答に0含む

図2　被減数が三桁の整数ひき算問題の系統樹

（2） 配列の原則

① 繰り下がりの有無・位置・数による配置

縦に伸びる幹に相当するものは，繰り下がりの有無，位置，数によって分かれている。左には繰り下がりのない問題，その右には1の位が繰り下がる，更にその右は10の位が繰り下がる，一番右は1と10の位が繰り下がる問題を配置した。

② 減数の桁の大きさによる配置

各幹から右に伸びている枝に相当するものは，減数の桁の大きさによって分かれている。下から順に，一桁，二桁，三桁の問題である。

③ 答の桁の大きさによる配置

各枝の途中にある「樹の葉」に相当するものは，基本型の型番号を表す。それらは答の型を縦

に揃えてある。左から，答が一桁，二桁，三桁の問題である。但し，10の位に繰り下がりがある場合については答が一桁になる問題が存在しない。各枝から下に伸びる小枝は，答に0を含む特殊型である。

## Ⅴ　整数ひき算教授学習支援システム

図3に本研究で試案したシステムの初期画面を示した。

| ★　ひき算教授支援システム　★ | |
|---|---|
| 被減数二桁のひき算（教師用） | = 1 |
| 被減数三桁のひき算（教師用） | = 2 |
| 練習問題（児童用） | = 3 |
| お　わ　り | = 4 |

**図3**　初期画面

本システムは4側面から教授者を支援するものである。第1に，型別の問題数や全問題数に対する割合を教授者に理解させる。初期画面の1を選択すると図4が表示され，更に2を選択すると図1と共に各型の問題数がディスプレイに表示される。同様に，3を選択すると各型の問題の割合が図1と共に表示される。4を選択すると問題数と割合のみが表示される。5を選択すると初期画面へ戻る。

| ★　被減数二桁ひき算系統樹　★ | |
|---|---|
| 系統樹と教授支援 | = 1 |
| 型別問題数 | = 2 |
| 型別問題% | = 3 |
| 型別問題数・%（数値のみ） | = 4 |
| 初期画面へ戻る | = 5 |

**図4**　二桁ひき算系統樹

第2に，保存されている各型の具体的な問題を教授者に提供し教授活動を支援することができる。図4の1を選択すると図1，及び図5がディスプレイ上に表示される。1を選択し型番号を入力すると，その型に該当するサンプル問題が表示される。また，3を選択して型番号を入力すると，更に図6が表示される。印刷する問題数を入力すると，その数の問題がプリンタより出力

される。

| | |
|---|---|
| 型別問題例 | ＝1 |
| 型判定 | ＝2 |
| 型別問題集 | ＝3 |
| 前画面へ戻る | ＝4 |

**図5**　系統樹における選択肢

| |
|---|
| 何問印刷しますか？ |

**図6**　印刷数入力画面

第3に，児童が解答を誤った問題など，任意の問題がどの型の問題かを判定することができる。図5を表示させた後に2を選択し，問題の被減数と減数を入力すると，その問題に該当する基本型の番号が点滅して色が変化する。これにより，教授者は入力した問題がどの型かを判定することができる。

図5の4を入力すると前画面へ戻る。

以上は，図3の2を選択することにより，被減数が三桁のひき算についても図2を表示しながら同様の操作を進めることができる。但し，三桁の場合は前記したように基本型の中に下位類型が含まれているため，図2で基本型の番号を入力後に下位類型の番号を入力する必要がある。

第4に，教授者に代わって学習者に練習用問題を提示し，パソコン上で学習させることができる。図3の3を選択すると，図7が表示され，1を選択すると図1，2を選択すると図2が表示される。何れの場合も，その後型番号を入力，図2では更に下位類型の番号を入力すると，型に対応した問題が筆算形式で表示され，学習者はキーボード入力により計算操作を進めることができる。練習は5問セットとなっており，5問終了した時点で図8が表示され，1を選択すると同じ型の練習を継続することができる。2を選択すると図7に戻り，別の桁の問題を練習する場合には1または2を，練習を終了する場合には3を選択することになる。

| | |
|---|---|
| ★　ひき算の練習問題　★ | |
| どちらを勉強しますか？ | |
| 　　被減数が99までのひき算 | ＝1 |
| 　　被減数が999までのたし算 | ＝2 |
| 終　わ　り | ＝3 |

**図7**　答の桁選択

| |
|---|
| このタイプの問題を続けますか？ |
| はい　　　＝1 |
| いいえ　　＝2 |

図8　継続選択

図3の4を選択すると本システムは終了する。

本システムには次のような特徴がある。教授者は，ひき算の筆算を指導する際，問題構造上の性質の違いを配慮した問題の系列を理解することができる。更に，各型の問題を即座に入手することにより，その系列に従った指導の進行を可能にする。加えて，児童が誤答した問題を診断し，その型の別の問題を入手することによって，児童への治療的指導に活用することができる。また，パソコンを利用して児童が個別練習を行うことができる。

## 引用・参考文献


Ausubel, D. P. (1968). Educational psychology: A cognitive view. Holt, New York.

Brown, J. S., & Burton, R. R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills, Cognitive Science, 2, 155-192.

Brown, J. S., & VanLehn, K. (1980). Repair theory, A generative theory of bugs in procedural skills, Cognitive Science, 4, 379-426.

堂本信悟・正司和彦 (1984). 引き算の誤答診断システムの開発　日本科学教育学会第8回年会論文集, 234-235.

Gagné, D. E. (1985). The cognitive psychology of school learning. Glenview, Illinois: Scott, Foresman and Company. (赤堀侃司・岸学（監訳）(1989). 学習指導と認知心理学　パーソナルメディア)

Gagné, R. M., & Briggs, L. J.(1974). Principles of instructional design. New York: Holt.

後藤聡 (1999). 心的ひき算の難易と数表象の構造　天使女子短期大学紀要, 20, 1-9.

後藤聡 (2000). 整数ひき算の類型化と学習のためのデータバンキング化　日本教育工学会研究報告集, JET2000-5, 49-54.

後藤聡 (2011). 難易を基準にした1桁たし算の教育課程　天使大学紀要, 11, 11-20.

後藤聡 (2014). 繰り下がりのない一桁ひき算における問題のサイズ効果　日本教育心理学会第56回総会論文集, 659.

後藤聡 (2015). 問題の難易を基準にした一桁ひき算の教授学習過程―繰り下がりがない問題―　北海学園大学学園論集, 166, 17-32.

後藤聡(2016a). コンピュータを利用した整数たし算の教授学習支援システム　北海学園大学学園論集, 168, 79-93.

後藤聡 (2016b). 減数0の一桁ひき算における反応時間の特性　日本教育心理学会第58回総会論文集, 176.

後藤聡 (2016c). 答0の一桁ひき算における反応時間の特性―被減数を基準にした検討―　第12回東北心理学会・北海道心理学会合同学会.

後藤聡 (準備中). 問題の難易を基準にした一桁ひき算の教授学習過程―繰り下がりがある問題―

Hartley, J., & Davies, I. K. (1976). Pre-instructional strategies: The role of pretests, behavioral objectives,

overviews and advance organizers. Review of Educational Research, 46, 239-265.
波多野誼余夫他（1986）．多桁減算バグの発達的研究　日本教育心理学会第 28 回総会論文集，854.
廣田敬一（2008）．小学校新教育課程の特色と配慮事項―算数―　佐野金吾・西村佐二（編著）ここがポイント！　新教育課程をわかりやすく読む（pp.148-150）ぎょうせい
工藤文三（2008）．ここがポイント新教育課程―新教育課程の特色―　佐野金吾・西村佐二（編著）ここがポイント！　新教育課程をわかりやすく読む（pp.2-7）ぎょうせい
草野一紀（2008）．ここがポイント新教育課程―理数教育の充実をどう図るか―　佐野金吾･西村佐二（編著）ここがポイント！　新教育課程をわかりやすく読む（pp.28-31）ぎょうせい
文部科学省（2008）．小学校学習指導要領　東京書籍
森田英嗣（1987）．多桁減算における子どもの誤りについて―もう 1 つの見方の提案―　日本教育工学会第 3 回大会講演論文集，197-198.
中野博之（2008）．算数―思考力・表現力を育て活用する力をつける―　吉田孝（編著）小学校新教育課程の解説と授業づくりのアイデア（pp.59-84）学事出版
日本数学教育学会（1992）．新訂算数教育指導用語辞典　新数社
新村出（編）（2008）．広辞苑第六版　岩波出版
西谷さやか（1989）．減法計算の Strategy の分析Ⅱ　日本教育心理学会第 31 回総会発表論文集，9.
西谷さやか（1990）．減法計算の Strategy の分析Ⅲ　日本教育心理学会第 31 回総会発表論文集，23.
佐伯昭彦他（1983）．CAI「ひきざんのひっさん」コースにおけるバグ診断とバグの変容　日本科学教育学会第 7 回年会論文集，209-210.
Smith, J. H. (1921). Arithmetical combinations. Elementary School Journal, 21, 762-770.
Suppes, P., & Ihrke, C. (1970). Accelerated program in elementary-school mathematics the fourth year. Psychology in the Schools, 7, 111-126.
Suppes, P., Jerman, M., & Brian, D. (1968). Computer-assisted instruction: The Stanford's 1965-66 arithmetic program. New York: Academic Press.
Suppes, P., & Morningstar, M. (1972). Computer-assisted instruction at Stanford, 1966-68: Data, models, and evaluation of the arithmetic programs. New York: Academic Press.
Washburn, C., & Vogel, M. (1928) Are any number combination inherently difficult? Journal of Educational Research, 17(4), 235-255.
Woods, S. S., Resnick, L. B., & Groen, G. J. (1975). An Experimental test of five process models for subtraction. Journal of Educational Psychology, 67, 17-21.
吉田孝（2008）．総則―キーワードは「生きる力」と「教育基本法」―　吉田孝（編著）小学校新教育課程の解説と授業づくりのアイデア（pp.7-26）学事出版