

タイトル	コンピュータを利用した整数たし算の教授学習支援システム
著者	後藤, 聡; GOTO, So
引用	北海学園大学学園論集(168): 79-93
発行日	2016-06-25

# コンピュータを利用した 整数たし算の教授学習支援システム

後 藤 聡

## I はじめに

現在、算数学習につまずいている子どもがいる。しかも、それが最も初期に導入される整数たし算の段階から始まることもある。中野（2008）が「算数は系統的な教科」であり、それゆえに「一度つまずいたら中々立ち戻れない」と述べているように、積み重ねにより発展して行く算数教科の特性から、初期の段階でつまずくほど後の学習に残す問題は大きい。

学習指導要領に先立ち2008年1月17日に出された中央教育審議会の答申をまとめた学習指導要領のポイントの1つは「基礎的・基本的な知識・技能の習得」であり、「読み・書き・計算など基礎的・基本的な知識・技能は発達段階に応じて徹底して習得させ、学習の基盤を構築することを重視している。」と述べられている（吉田（2008））。これに基づき、新しい小学校学習指導要領第1章総則第1教育課程編成の一般方針の1でも「（前略）基礎的・基本的な知識及び技能を確実に習得させ（後略）」（文部科学省（2008））と示された。さらに工藤（2008）は、そのための指導計画の作成にあたって配慮すべき重要なことの1つを、「基礎的・基本的な知識・技術を確実に習得させるための方策を明確にすること」、例えば「繰り返し指導や個に応じた指導方法が想定される。」と述べている。

この考え方は算数において一層重要視していると思える。先の中央教育審議会の答申においても、小学校算数の改善点について「（前略）基礎的・基本的な知識・技術を確実に定着させる（後略）」（中野（2008））と示された。草野（2008）・廣田（2008）はこの点を改善の基本方針の1つとして取り上げ、さらに「算数・数学の内容の系統性を重視」と述べている。「系統」を「ある原理・法則によって順序だてた統一のあるもの。」（新村（2008））の意味に解すと、「何を、どのような順序で」問題に取り組むかという教授学習過程の研究では、算数こそが改善点を実現させるべき重要な教科と考える。Gagné（1985）は前提技能の欠如が計算を間違えさせると指摘しているが、計算が前提技能を利用した系統性のある操作であるという見解に基づいているからである。

以上の必然性により、筆者は、算数の教授学習過程において子どもが最初に学習する演算である一桁＋一桁のたし算（以下、一桁たし算と記す。）について、難易の違いを配慮した教授学習過程を提案した（後藤（2011））。その発展課題である二桁と三桁の数を含む整数たし算について、

問題の性質を異にするとと思われる条件を基準に全問題を類型化し、問題の難易を配慮して系列化した教材を教授者、学習者が活用することのできるコンピュータを利用した教授学習支援システムを試案することが本研究の目的である。

さて、教材の系列化に関する理論がいくつか提出されている。Gagné & Briggs (1974) の学習階層性による教材分析、Ausubel (1968), Hartley & Davies (1976) の先行オーガナイザーを用いる方法、Suppes & Ihrke (1970), Suppes, Jerman, & Brian (1968), Seppes & Morningstar (1972) の教材を構成している要因の難易度を予測し、それらの組み合わせから系列化を進めるという方法などである。また、Brown & Burton (1978) が手続き的ネットワークモデルを考案し、子どもの誤った答は手続きの一部が脱落したり別の手続きに置き換えられることを確かめ、その後 Brown & VanLehn (1980) は間に合わせ理論と呼ばれる新たな理論を提案した。コンピュータを介したシステム開発では、佐伯ら (1983), 堂本ら (1984) の誤答診断システムなど、多種のアプローチがある。

本研究で参考にするのに最も適しているものは、Suppes ら (1968・1970・1972) であろう。基本的考えは、まず問題を構成している要因を取り出し、それらの要因の組み合わせから問題の難易度を正答率として予測し、それに基づいて系列化を進めて行くというものである。例えば、Suppes & Morningstar (1972) は、たし算とひき算において、繰り上がり、繰り下がり、合計値、横式の形、縦式の形を要因として取り出している。更に、これらの要因に与えられる回帰係数を求め、どの要因が難易度と関係しているかを調べている。ただし、これらの方法の問題点は、そこで取り上げた問題が問題全体の中のどのような位置にあるかの基準や手掛かりがないため、偶発的な結果を生じる可能性をもつ点である。

従って、本研究では、Suppes らのように数量的な難易度分析から系列化を行うという手順をとらず、まずは全問題の類型化と系列化を計り、たし算の問題全体を整理することから始める。そこで、後藤 (2011) などの結果を用いて問題の難易に影響を及ぼしていると思われる条件を取り出し、それらの組み合わせによって整数たし算の全問題を類型化し、更に、問題の難易差や子どもの学習過程を基準に系列化を図る。

## II 方 法

### 1. 問題の種類

答が三桁以下のたし算の問題形式は、一桁たし算、二桁+一桁、一桁+二桁、二桁+二桁、三桁+一桁、一桁+三桁、三桁+二桁、二桁+三桁、三桁+三桁の9種類である。これらを全て個別に扱くと結果が煩雑になる。小学校の算数指導では、単元構成の一つの重要な基準として数の桁の大きさをを用いる。たし算においては答の桁数が最大数となるため、答の桁の大きさを基準に、答が二桁、三桁の問題を区分して扱うことにする。

但し、答が二桁になる問題には、繰り上がりがある一桁たし算も含まれる。わが国の小学校に

おけるたし算学習の進行過程を考えると、加数や被加数が二桁の問題と一緒に扱うことは不適切であろう。また、一桁たし算の教授学習過程の検討については河井ら（1987）、後藤（2011）で報告されている。そこで本研究では対象から除外し、答が二桁、三桁の問題に区分して、一桁たし算を除く前記8種類を対象として本研究を進める。

## 2. 研究の手順

手順は次の通りである。

- (1) 答が二桁、三桁の全問題を区分する。
- (2) 各々について、解答の難易に関わると思われる問題構造上の条件を抽出する。
- (3) 抽出した条件を全て組み合わせて、全問題を類型化する。
- (4) 後藤（2011）などによる一桁たし算の結果で明らかになった難易差を基準に（3）の全類型を系列化し、構造が一目で把握できるように図示化する。
- (5) 系列化した類型問題を活用して、パソコンを用いて教授学習過程を支援するシステムを提案する。

## Ⅲ 答が二桁のたし算

### 1. 問題の種類

答が二桁になるたし算問題の桁は、二桁+一桁、一桁+二桁、二桁+二桁の3種類である。この条件を満たす問題の総数は4770問存在する。

### 2. 難易に影響を与える条件とその難易差

学習者、教授者の条件とは独立し、答が二桁になるたし算問題の性質に固有の条件として次の5つを取り上げた。また、後藤（2011）などを参考に、各条件の難易差に付いて考察を加える。尚、以下加数、被加数、答の型を示すⅡI、Ⅱ0、IのI、Ⅱは、それぞれ1、10の位の数字がゼロでないことを、0は、1の位の数字がゼロであることを表す。

- (1) 繰り上がりの有無

- ① 繰り上がりなし
- ② 繰り上がりあり

の2種に区別される。

答が二桁のたし算における繰り上がりは、加数、被加数の1の位の数による1位数同士のたし算に限定される。1位数同士のたし算は繰り上がりがある問題の方が無い問題より難しいため、答が二桁の問題においても繰り上がりのある問題の方が難しいことになる。

いくつかの研究から、解答までの処理回数が難しさに関係している（Suppesら（1968）など）。1の位で繰り上がると、繰り上がった1を10の位の数に加算する必要がある。その分だけ、繰り

上がりがない問題と比較して処理回数は増えることになり、難しくなるとも考えられる。

(2) 加数, 被加数の桁の大きさ

- ① 一桁+二桁
- ② 二桁+一桁
- ③ 二桁+二桁

の3種に区別される。

他の条件が同一であれば、桁が大きくなるほど処理数は多くなる。前記したように、処理数が多くなると複雑化するため、問題は難しくなる。従って、加数, 被加数の桁が大きい問題ほど難しいことになる。

尚, ①, ②は, 加数と被加数が入れ替わった問題(以下, 逆型と記す。)である。従って, そこで用いられる数が同一であれば, 答も同一である。しかし, 処理過程が微妙に異なるため, 難易に影響する一条件として逆型を区別しておく。

(3) 加数, 被加数の中の0の有無

- ① 0なし
- ② 0あり

の2種に区別される。これらを組み合わせて答が二桁のたし算問題とした場合, 加数, 被加数内の0の含まれ方の違いによって $II0+I$ ,  $I+II0$ ,  $II I+I$ ,  $I+II I$ ,  $II0+II0$ ,  $II I+II0$ ,  $II0+II I$ ,  $II I+II I$ の8種類存在する。逆型を同型とみなすと, 5種類に分類される。

0がある加数, 被加数は,  $II0$ の1種に限られる。これは, 加数, 被加数の何れか, または両方の1の位が0になり, 1の位で行う1位数のたし算に必ず0が含まれることになる。後藤(2011)の結果より, 他の条件が同一であれば, 加数, 被加数が0である問題は他の数と比較して易くなっている。従って, 答が二桁の問題においても, 加数, 被加数の中に0がある問題の方が易しいと考える。

(4) 答の型

- ①  $II0$
- ②  $II I$

の2種に区別される。

答の型が $II0$ となるのは, 繰り上がりの有無によって問題の型や, 難易差が異なる。繰り上がりがない問題は, 問題の型が $II0+II0$ に限定される。これは, 加数, 被加数の1の位で行う1位数のたし算が $0+0$ となる点に他との難易差が生じ, 前記(3)に従って易しい問題といえる。繰り上がりがある問題では $I+II I$ ,  $II I+I$ ,  $II I+II I$ が該当する。これらで答の型が $II0$ となるのは, 1の位で行う1位数のたし算の答が10となる問題に限られる。後藤(2011)などより, 繰り上がりがある一桁たし算の中で答が10になる問題は最も容易である。以上, 繰り上がりの有無を問わず, 答の型が $II0$ である問題は,  $II I$ の問題と比較して易しいことになる。

### （５） 一桁たし算の難易

計算のアルゴリズムとして見ると、答が二桁のたし算は計算過程で1位数のたし算を1～3回行う。従って、後藤（2011）が明らかにした一桁たし算の難易差も答が二桁のたし算の難易に影響する条件となる。

### 3. 問題の類型化

前記した難易に影響する条件に基づいて答が二桁になる全問題を類型化する。但し、（５）の条件を含めると類型が多岐に渡りすぎて煩雑になるため除外し、適宜後藤（2011）などを参考にするものとする。

前記（1）～（4）の条件を単純に組み合わせると  $2 \times 3 \times 8 \times 2 = 96$  類型考えられる。しかし、これらの条件は相互に完全独立ではなく、実際には14類型抽出することができた。これら14類型に型番号を与えたのが表1である。表中'の付いた型は、同一番号の逆型であることを示す。表には、繰り上がりの有無、答の型、問題の型（加数、被加数の桁と0の有無）、問題数を示した。

### 4. 問題の系列化

#### （1） 14 類型の系列化

3において類型化した14類型の問題を、視覚的に出来るだけ分かり易く系統樹に見立てて配列し、二元配置で系列化したものが図1である。図内の数字は、表1のNoと対応している。

#### （2） 配列の原則

##### ① 繰り上がりの有無による配置

縦に伸びる大枝に相当するものは、繰り上がりの有無によって分かれている。左には繰り上がりのない問題、右には繰り上がりのある問題を配置した。

表1 答が二桁のたし算問題の類型

No	問題の型	答の型	問題数	繰り上がり	
1	II 0 + II 0	II 0	36	なし	
2	II I + I	II I	324		
2'	I + II I		324		
3	II 0 + I		81		
3'	I + II 0		81		
4	II I + II I		1,296		
5	II I + II 0		324		
5'	II 0 + II I		324		
6	II I + I		II 0		72
6'	I + II I			72	
7	II I + II I	252			
8	II I + I	II I	288		
8'	I + II I		288		
9	II I + II I		1,008		

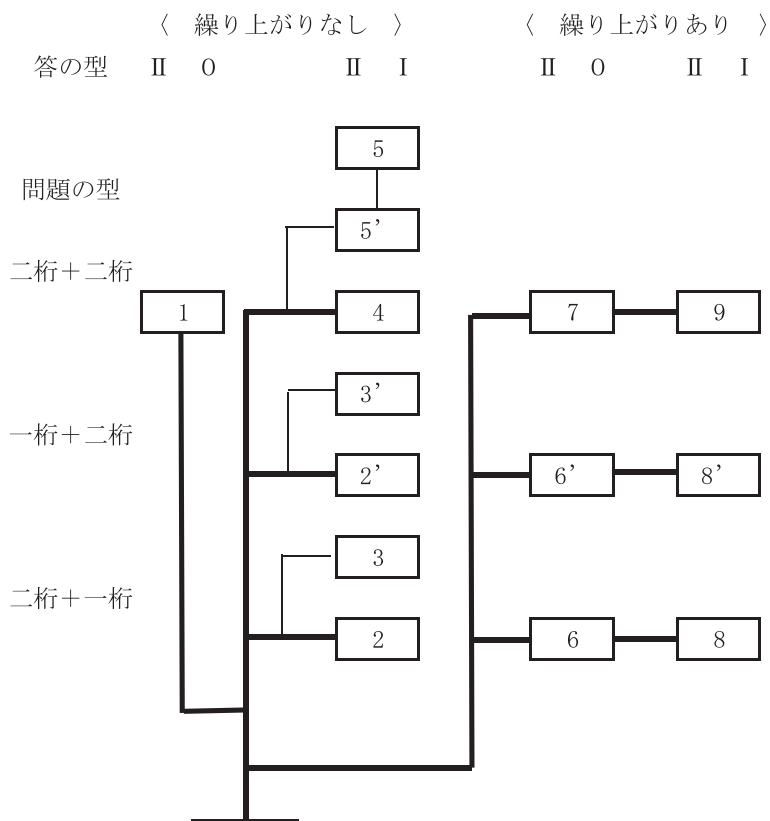


図1 答が二桁のたし算問題の系統樹

② 加数, 被加数の桁の大きさによる配置

各々の大枝から右に伸びている枝は, 加数, 被加数の桁の大小によって分かれている。下から順に二桁+一桁, 一桁+二桁, 二桁+二桁の問題である。

③ 答の型による配置

各々の枝の途中にある「樹の葉」に相当するものは, 問題の型を表し, 表1の型番号と対応している。それらは, 繰り上がりの有無を分けて, 答の型を縦に揃えてある。繰り上がりなし, あり各々の中で, 左にはII 0, 右にはII Iとなる問題を配置した。

④ 加数, 被加数の中の0の有無による配置

各大枝から伸びている小枝に相当するものは, 加数, または被加数の中に0を含む問題である。

#### IV 答が三桁のたし算

##### 1. 問題の種類

答が三桁になるたし算問題の桁は, 二桁+一桁, 一桁+二桁, 二桁+二桁, 三桁+一桁, 一桁

+三桁，三桁+二桁，二桁+三桁，三桁+三桁の8種類である。この条件を満たす問題の総数は493,650問存在する。

## 2. 難易に影響を与える条件とその難易差

学習者，教授者の条件とは独立し，答が三桁になるたし算問題の性質に固有の条件として，次の5つを取り上げた。また，後藤（2011）などの結果を参考に，各条件の難易差について考察を加える。尚，以下加数，被加数，答の型を示すⅢ，Ⅱ，Ⅰは各々100，10，1の位の数字がゼロでないことを，0は，その位の数字がゼロであることを表す。

### (1) 繰り上がりの有無・回数・位置

- ① 繰り上がりなし
- ② 1の位に繰り上がりあり
- ③ 10の位に繰り上がりあり
- ④ 1と10の位に繰り上がりあり

の4種に区別される。

②は，加数，被加数の1の位の1位数同士のたし算が繰り上がる場合に限定される。後藤(2011)の結果より，1位数同士のたし算は繰り上がりがある問題の方が無い問題より難しいため，答が三桁の問題においても繰り上がりのある方が難しいことになる。③も加数，被加数の10の位の1位数同士のたし算が繰り上がる場合に限定され，同様に繰り上がりのある方が難しいことになる。④の1の位については，前記②と同様1位数同士のたし算が繰り上がる場合に限定される点で共通している。しかし，10の位は2ケース存在する。1つは，前記③と同様，1位数同士のたし算が繰り上がる場合である。もう1つは，加数，被加数の10の位の数による1位数同士のたし算の結果が9になり繰り上がらないが，1の位から繰り上がってきた1を加えることによって，結果的に繰り上がる場合である。この場合，最終的な三桁の答において10の位の数は0に限られる。何れの場合も，結局は繰り上がりのある1位数同士のたし算を行う必要があるため繰り上がりがない問題よりも難しく，答が三桁の問題においても繰り上がりのある方が難しいことになる。また，以上は，前記の通り解答までの処理回数が増えるために難しくなるとも考えられる。

従って，難易に関しては，繰り上がりなし，繰り上がり1回，繰り上がり2回の順に難しくなっていくといえよう。

### (2) 被加数，加数の桁の大きさ

- ① 二桁+一桁
- ② 一桁+二桁
- ③ 二桁+二桁
- ④ 三桁+一桁
- ⑤ 一桁+三桁



- ⑥ 三桁+二桁
- ⑦ 二桁+三桁
- ⑧ 三桁+三桁

の8種に区別される。

逆型を同型とみなすと、5種類に分類される。従って、そこで用いられる数が同一であれば、答も同一である。しかし、処理過程が微妙に異なるため、難易に影響する一条件として逆型を区別しておく。

他の要因における条件が同一であれば、桁が大きくなるほど処理数は多くなる。前記したように、処理数が多くなると複雑化するため、問題は難しくなる。従って、加数、被加数の桁が大きい問題ほど難しいことになる。

### (3) 加数、被加数の中の0の有無や数とその位置

加数、被加数の型は、

- ① III II I
- ② III II 0
- ③ III 0 I
- ④ III 0 0
- ⑤ II I
- ⑥ II 0
- ⑦ I

の7種に区別される。これらを組み合わせて答が三桁のたし算問題とした場合、加数、被加数内の0の含まれ方の違いによって46種類の組み合わせがある。逆型を同型とみなすと26種類に分類される。

答が三桁の問題で加数、被加数に0がある場合、その0のある位が繰り上がるか否かで数処理過程が異なる。「 $198+201=399$ 」の様に繰り上がらない場合、0のある位の数処理は単に1位数同士のたし算を1回行うだけである(例では $9+0$ )。そうすると、一桁たし算の加数、被加数に0がある場合とそうではない場合とで何れが難しいかということに帰着する。後藤(2011)より、他の条件が同一であれば、加数、被加数が0である問題は他の数と比較して容易になっている。従って、答が三桁の問題においても、加数、被加数の中に0がある問題、しかもその数が多いほど易しいことになる。加数、被加数における0の数により難易差が生じると考えられる以上、0の位置が1の位と10の位の何れか1つの場合は難易に違いはないといえよう。

繰り上がる場合は、「 $198+205=403$ 」の様に1と10の位に繰り上がりがあり、問題の型がIII II I + III 0 I (逆型を含む)で、しかもIIが9に限定される。10の位の1位数のたし算が $9+0=9$ 、または $0+9=9$ になり、その部分9に1の位から繰り上がってきた1を加え、結果として10の位も繰り上がるという過程をたどる。他の条件を同一にし、これが0以外の数であ

る場合、例えば  $7 + 2$ ， $2 + 7$  の様に、加数と被加数が 0 でなく部分和が 9 となる問題と比べて難易はどうかという検討になる。これも結局は一桁たし算の比較である。前記と同様、後藤（2011）の結果から、 $0 + 9$ ， $9 + 0$  の方が容易である。従って、答が三桁の問題においても、加数、被加数の中に 0 がある問題の方が易しいことになる。

以上より、難易に関しては、加数、被加数に 0 を含む方が、また、含まれるゼロの数が多いほど易しくなる。

（4） 答の中の 0 の有無や数とその位置

- ① III II I
- ② III II 0
- ③ III 0 I
- ④ III 0 0

の 4 種類に区別される。

難易の根拠は、加数、被加数に 0 がある位における 1 位数のたし算に繰り上がりがあるか否かで異なる。繰り上がりがない場合で答に 0 が含まれるのは、 $III\ 0\ 0 + III\ 0\ 0 = III\ 0\ 0$ ， $III\ II\ 0 + III\ II\ 0 = III\ II\ 0$ ， $III\ 0\ I + III\ 0\ I = III\ 0\ I$ ， $III\ II\ 0 + III\ 0\ 0 = III\ II\ 0$ （逆型含む）， $III\ 0\ I + III\ 0\ 0 = III\ 0\ I$ （逆型含む）， $III\ 0\ 0 + II\ 0 = III\ II\ 0$ （逆型含む）， $III\ II\ 0 + II\ 0 = III\ II\ 0$ （逆型含む）， $III\ 0\ I + I = III\ 0\ I$ （逆型含む）， $III\ 0\ 0 + I = III\ 0\ I$ （逆型含む）の型だけである。加数、被加数、答の同一の位に共通して 0 があるのが条件である。「 $350 + 220 = 570$ 」の様に繰り上がりがない問題では、1，または 10，あるいは両方の位における 1 位数のたし算が  $0 + 0 = 0$  となる場合のみ答に 0 が登場する。これは、加数、被加数の 1 の位における 1 位数のたし算が  $0 + 0$  となる点に他との差が生じ、前記（3）の加数、被加数に 0 が含まれる問題に準じて易しい問題といえる。

繰り上がりがある場合では、答に 0 がある位のみ繰り上がりがあるのか、他の位にも繰り上がりがあり 2 回繰り上がるのかで様相が異なる。「 $247 + 161 = 408$ 」の様に答に 0 がある位のみが繰り上がる場合は、その位の部分和が 10 となる問題に限られる（前記問題例では  $4 + 6 = 10$ ）。後藤（2011）の結果より、繰り上がりがある一桁たし算で答が 10 になる問題は最も容易である。従って、この場合の答に 0 がある問題は易しいことになる。

2 回繰り上がる場合は、「 $139 + 264 = 403$ 」の様に 10 の位における 1 位数のたし算の答が 9 に限定される。その部分 and 9 に 1 の位から繰り上がってきた 1 を加え、結果として 10 の位も繰り上がるという過程をたどる。他の条件を同一にし、答の 10 の位の数が 0 以外の数である場合、例えば「 $159 + 264 = 423$ 」の様に、10 の位における 1 位数のたし算が繰り上がる。この両者を比較して難易差はどうかという検討になる。これも結局は 1 位数のたし算の比較である。後藤（2011）より、総じて繰り上がりがない問題、即ち前者の方が易しいことになる。

以上より、答が三桁の問題においても、答に 0 を含む方が、また、含まれる 0 の数が多いほど

易しくなる。

#### (5) 一桁たし算の難易

計算のアルゴリズムとして見ると、答が三桁のたし算は、解答過程で1位数のたし算を1～5回行う。従って、後藤(2011)が明らかにした一桁たし算の難易差も答が三桁のたし算の難易に影響する条件となる。

### 3. 問題の類型化

前記した難易に影響する条件に基づいて答が三桁になる全問題493,650問を類型化する。但し、答が二桁の場合と同様、(5)の条件を含めると類型が多岐に渡りすぎて煩雑になるため除外し、適宜後藤(2011)などを参考にするものとした。

逆型を同型として前記(1)～(4)の条件を単純に組み合わせると $4 \times 5 \times 26 \times 4 = 2080$ 類型考えられる。逆型も加えると2倍近くになる。しかし、これらの要因は相互に完全独立ではない。互いに相容れないものもある。実際には76の基本型に類型できた。これらに型番号を与えたのが表2である。表には、繰り上がりの有無と位置、答の型、問題の型(加数、被加数の桁と0の有無・位置)、問題数を示した。問題数の後に\*が付いているのは、逆型の問題が基本型と同じ数だけ存在することを意味する。

型番号は符号として付した。但し、問題の難易差を考慮し、易しい問題から難しい問題へと進むことを原則として系列されている。

### 4. 問題の系列化

#### (1) 76型の系列化

3において類型化した76類型の問題を、視覚的に出来るだけ分かり易く系統樹に見立てて配列し、二元配置で構造化したものが図2である。

#### (2) 配列の原則

##### ① 繰り上がりの有無による配置

4本に分かれて縦に伸びている太枝は、繰り上がり方の違いによって分けてある。左から順に繰り上がりがない、1の位が繰り上がる、10の位が繰り上がる、1・10の位が繰り上がる問題である。

##### ② 加数、被加数の桁の大きさによる配置

各々の太枝から右に伸びている枝は、被加数、加数の桁の大小によって分かれている。下から順に二桁+一桁(逆型を含む)、二桁+二桁、三桁+一桁(逆型を含む)、三桁+二桁(逆型を含む)、三桁+三桁の問題である。

##### ③ 答の型による配置

枝の途中にある「樹の葉」に相当するものは問題の型を表し、答の型が同一のものを縦に揃え

表2 答が三桁のたし算問題の種類

No	問題の型	答の型	問題数	繰り上がり	No	問題の型	答の型	問題数	繰り上がり
1	Ⅲ 0 0 + Ⅲ 0 0	Ⅲ 0 0	36		37	Ⅱ 0 + Ⅱ 0	Ⅲ 0 0	9	
2	Ⅲ 0 1 + Ⅰ	Ⅲ 0 1	324	*	38	Ⅱ 0 + Ⅱ 0	Ⅲ Ⅱ 0	36	
3	Ⅲ 0 0 + Ⅰ	Ⅲ 0 1	81	*	39	Ⅱ 1 + Ⅱ 1	Ⅲ 0 1	324	
4	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅰ	Ⅲ Ⅱ 1	2,916	*	40	Ⅱ 0 + Ⅱ 1	Ⅲ 0 1	81	*
5	Ⅲ Ⅱ 0 + Ⅰ	Ⅲ Ⅱ 1	729	*	41	Ⅱ 1 + Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 1	1,296	
6	Ⅲ Ⅱ 0 + Ⅱ 0	Ⅲ Ⅱ 0	324	*	42	Ⅱ 0 + Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 1	324	*
7	Ⅲ 0 0 + Ⅱ 0	Ⅲ Ⅱ 0	81	*	43	Ⅲ Ⅱ 0 + Ⅱ 0	Ⅲ 0 0	72	*
8	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 1	11,664	*	44	Ⅲ Ⅱ 0 + Ⅱ 0	Ⅲ Ⅱ 0	288	*
9	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅱ 0	Ⅲ Ⅱ 1	2,916	*	45	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅱ 1	Ⅲ 0 1	2,592	*
10	Ⅲ 0 0 + Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 1	729	*	46	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅱ 0	Ⅲ 0 1	648	*
11	Ⅲ Ⅱ 0 + Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 1	2,916	*	47	Ⅲ Ⅱ 0 + Ⅱ 1	Ⅲ 0 1	648	*
12	Ⅲ 0 1 + Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 1	2,916	*	48	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 1	10,368	*
13	Ⅲ 0 1 + Ⅱ 0	Ⅲ Ⅱ 1	729	*	49	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅱ 0	Ⅲ Ⅱ 1	2,592	*
14	Ⅲ Ⅱ 0 + Ⅲ Ⅱ 0	Ⅲ Ⅱ 0	1,296	*	50	Ⅲ Ⅱ 0 + Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 1	2,592	*
15	Ⅲ Ⅱ 0 + Ⅲ 0 0	Ⅲ Ⅱ 0	324	*	51	Ⅲ Ⅱ 0 + Ⅲ Ⅱ 0	Ⅲ 0 0	252	
16	Ⅲ 0 1 + Ⅲ 0 1	Ⅲ 0 1	1,296	*	52	Ⅲ Ⅱ 0 + Ⅲ Ⅱ 0	Ⅲ Ⅱ 0	1,008	
17	Ⅲ 0 1 + Ⅲ 0 0	Ⅲ 0 1	324	*	53	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅲ Ⅱ 1	Ⅲ 0 1	9,072	
18	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅲ Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 1	46,656	*	54	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅲ Ⅱ 0	Ⅲ 0 1	2,268	*
19	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅲ 0 0	Ⅲ Ⅱ 1	2,916	*	55	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅲ Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 1	36,288	*
20	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅲ Ⅱ 0	Ⅲ Ⅱ 1	11,664	*	56	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅲ Ⅱ 0	Ⅲ Ⅱ 1	9,072	*
21	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅲ 0 1	Ⅲ Ⅱ 1	11,664	*	57	Ⅱ 1 + Ⅰ	Ⅲ 0 0	9	*
22	Ⅲ 0 1 + Ⅲ Ⅱ 0	Ⅲ Ⅱ 1	2,916	*	58	Ⅱ 1 + Ⅰ	Ⅲ 0 1	36	*
23	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅰ	Ⅲ Ⅱ 0	648	*	59	Ⅱ 1 + Ⅱ 1	Ⅲ 0 0	72	
24	Ⅲ 0 1 + Ⅰ	Ⅲ Ⅱ 0	81	*	60	Ⅱ 1 + Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 0	405	
25	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅰ	Ⅲ Ⅱ 1	2,592	*	61	Ⅱ 1 + Ⅱ 1	Ⅲ 0 1	288	
26	Ⅲ 0 1 + Ⅰ	Ⅲ Ⅱ 1	324	*	62	Ⅱ 1 + Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 1	1,620	
27	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 0	2,268	*	63	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅰ	Ⅲ 0 0	72	*
28	Ⅲ 0 1 + Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 0	648	*	64	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅰ	Ⅲ 0 1	288	*
29	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 1	9,072	*	65	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅱ 1	Ⅲ 0 0	576	*
30	Ⅲ 0 1 + Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 1	2,592	*	66	Ⅲ 0 1 + Ⅱ 1	Ⅲ 0 0	72	*
31	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅲ Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 0	9,072	*	67	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 0	3,240	*
32	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅲ 0 1	Ⅲ Ⅱ 0	2,592	*	68	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅱ 1	Ⅲ 0 1	2,304	*
33	Ⅲ 0 1 + Ⅲ 0 1	Ⅲ Ⅱ 0	320	*	69	Ⅲ 0 1 + Ⅱ 1	Ⅲ 0 1	288	*
34	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅲ Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 1	36,288	*	70	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 1	12,960	*
35	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅲ 0 1	Ⅲ Ⅱ 1	10,368	*	71	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅲ Ⅱ 1	Ⅲ 0 0	2,016	*
36	Ⅲ 0 1 + Ⅲ 0 1	Ⅲ Ⅱ 1	1,296	*	72	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅲ 0 1	Ⅲ 0 0	252	*
					73	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅲ Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 0	11,340	
					74	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅲ Ⅱ 1	Ⅲ 0 1	8,064	
					75	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅲ 0 1	Ⅲ 0 1	10,008	*
					76	Ⅲ Ⅱ 1 + Ⅲ Ⅱ 1	Ⅲ Ⅱ 1	45,360	

\* 被加数, 加数の交換型の問題が同じ数だけ存在する。

である。答の型は、図の上部に記してある。また、葉の中の数は問題の型番号を表し、表2の型番号と対応している。どの枝の問題も、答の型が各太枝ごとに左からⅢ 0 0, Ⅲ Ⅱ 0, Ⅲ 0 1, Ⅲ Ⅱ 1の順に並ぶのを原則としている。

④ 加数, 被加数の中の0の有無による配置

各枝から伸びている小枝は、加数, 被加数における0の含まれ方の違いによって分けてある。葉の形が[,]となっているタイプは、各々被加数, 加数の型がⅢ Ⅱ 1, Ⅱ 1, Ⅰの何れかである。

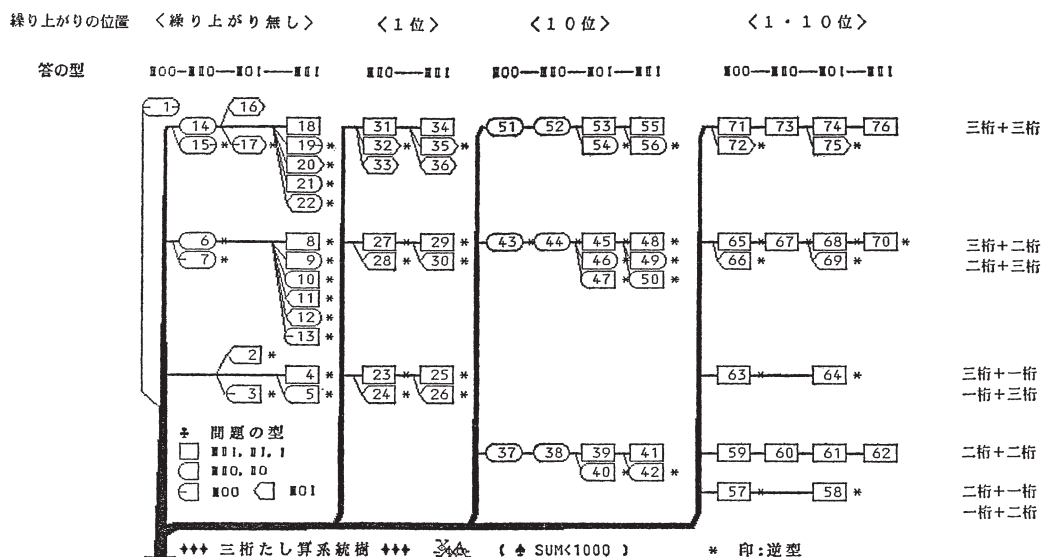


図2 答が三桁のたし算問題の系統樹

(,)となっているタイプは、各々被加数、加数の型がIII II 0、またはII 0である。∈, ⊃は、各々被加数、加数の型がIII 0 0である。〈, 〉は、各々被加数、加数の型がIII 0 Iである。葉の後に\*が付いているタイプには逆型の問題が含まれる。

### V 整数たし算教授学習支援システム

図3に本研究で試案したシステムの初期画面を示した。

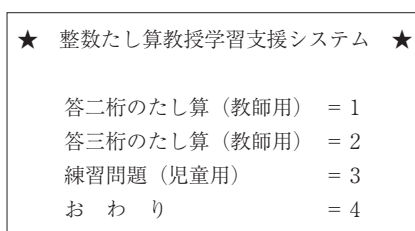


図3 初期画面

本システムは4側面から教授者、学習者を支援するものである。第1に、型別の問題数や全問題数に対する割合を教授者に理解させる。初期画面の1を選択すると図4が表示され、更に2を選択すると図1と共に各型の問題数がディスプレイに表示される。同様に、3を選択すると各型の問題の割合が図1と共に表示される。4を選択すると問題数と割合のみが表示される。5を選択すると初期画面へ戻る。

★ 二桁たし算系統樹 ★	
系統樹と教授支援	= 1
型別問題数	= 2
型別問題%	= 3
型別問題数・%（数値のみ）	= 4
初期画面へ戻る	= 5

図4 二桁たし算系統樹

第2に、バンキングされている各型の具体的な問題を教授者に提供し教授活動を支援することができる。図4の1を選択すると図1，及び図5がディスプレイ上に表示される。1を選択し型番号を入力すると，その型に該当するサンプル問題が表示される。また，3を選択して型番号を入力すると，更に図6が表示される。印刷する問題数を入力すると，その数の問題がプリンタより出力される。

型別問題例	= 1
型判定	= 2
型別問題集	= 3
前画面へ戻る	= 4

図5 系統樹における選択肢

何問印刷しますか？
-----------

図6 印刷数入力画面

第3に，学習者が解答を誤った問題など，任意の問題がどの型の問題かを判定することができる。図5を表示させた後に2を選択し，問題の被加数と加数を入力すると，ブザー音と共にその問題に該当する基本型の番号が図上で点滅して色が変化する。これにより，教授者は入力した問題がどの型かを判定することができる。

図5の4を入力すると前画面へ戻る。

以上は，図3の2を選択することにより，答が三桁のたし算についても図2を表示しながら同様の操作を進めることができる。

第4に，教授者に代わって学習者に練習用問題を提示し，パソコン上で学習させることができる。図3の3を選択すると，図7が表示され，1を選択すると図1，2を選択すると図2が表示される。何れの場合も，その後型番号を入力すると，型に対応した問題が筆算形式で表示され，学習者はキーボード入力により計算操作を進めることができる。練習は5問セットとなっており，5問終了した時点で図8が表示され，1を選択すると同じ型の練習を継続することができる。

2を選択すると図7に戻り、続けて答が二桁の問題を練習する場合には1を、答が三桁の問題を練習する場合には2を、練習を終了する場合には3を選択すると図3へ戻る。

★ たし算の練習問題 ★	
どちらを勉強しますか？	
答が99までのたし算	= 1
答が999までのたし算	= 2
終わり	= 3

図7 答の桁選択

このタイプの問題を続けますか？	
はい	= 1
いいえ	= 2

図8 継続選択

図3の4を選択すると本システムは終了する。

本システムには次のような特徴がある。教授者は、たし算の筆算を指導する際、問題構造上の性質の違いを配慮した問題の系列を理解することができる。更に、各型の問題を即座に入手することにより、その系列に従った指導の進行を可能にする。加えて、児童が誤答した問題を診断し、その型の別の問題を入手することによって、児童への治療的指導に活用することができる。また、パソコンを利用して児童が個別学習を行うことができる。

## 引用・参考文献

- Ausubel, D. P. (1968). Educational psychology: A cognitive view. Holt, New York.
- Brown, J. S., & Burton, R. R. (1978). Diagnostic Models for procedural bugs in basic mathematical skills, *Cognitive Science*, 2, 155-192.
- Brown, J. S., & VanLehn, K. (1980). Repair theory, A generative theory of bugs in procedural skills, *Cognitive Science*, 4, 379-426.
- 堂本信悟・正司和彦 (1984). 引き算の誤答診断システムの開発 日本科学教育学会第8回年会論文集, 234-235.
- Gagné, D. E. (1985). The cognitive psychology of school learning. Glenview, Illinois: Scott, Foresman and Company. (赤堀侃司・岸学 (監訳) (1989). 学習指導と認知心理学 パーソナルメディア)
- Gagné, R. M., & Briggs, L. J. (1974). Principles of instructional design. New York: Holt.
- 後藤聡 (1989). 一桁たし算の難易に影響を及ぼす要因の分析 天使女子短期大学紀要, 10, 47-56.
- 後藤聡 (1993). 一桁ひき算の計算方略におけるたし算について 日本教育心理学会第35回総会発表論文集, 444.
- 後藤聡 (2011). 難易を基準にした1桁たし算の教育課程 天使大学紀要, 11, 11-20.
- Hartley, J., & Davies, I. K. (1976). Pre-instructional strategies: The role of pretests, behavioral objectives,

- overviews and advance organizers. *Review of Educational Research*, 46, 239-265.
- 廣田敬一 (2008). 小学校新教育課程の特色と配慮事項—算数— 佐野金吾・西村佐二 (編著) *ここがポイント! 新教育課程をわかりやすく読む* (pp.148-150) ぎょうせい
- 河井芳文・後藤聡 (1987). 児童における一桁の足し算の難易の構造について *東京学芸大学紀要第1部門教育科学*, 38, 99-107.
- 栗山和広・吉田甫 (1988). 幼児の数表象の構造—数唱分析からの検討— *心理学研究*, 59, 287-294.
- 栗山和広・吉田甫 (1995). 心的加算における数の表象構造について *教育心理学研究*, 43, 402-410.
- 工藤文三 (2008). *ここがポイント! 新教育課程—新教育課程の特色—* 佐野金吾・西村佐二 (編著) *ここがポイント! 新教育課程をわかりやすく読む* (pp.2-7) ぎょうせい
- 草野一紀 (2008). *ここがポイント! 新教育課程—理数教育の充実をどう図るか—* 佐野金吾・西村佐二 (編著) *ここがポイント! 新教育課程をわかりやすく読む* (pp.28-31) ぎょうせい
- 文部科学省 (2008). *小学校学習指導要領* 東京書籍
- 中野博之 (2008). *算数—思考力・表現力を育て活用する力をつける—* 吉田孝 (編著) *小学校新教育課程の解説と授業づくりのアイデア* (pp.59-84) 学事出版
- 日本数学教育学会 (1992). *新訂算数教育指導用語辞典* 新数社
- 新村出 (編) (2008). *広辞苑第六版* 岩波出版
- 佐伯昭彦他 (1983). CAI「ひきざんのひっさん」コースにおけるバグ診断とバグの変容 *日本科学教育学会第7回年会論文集*, 209-210.
- Suppes, P., & Ihrke, C. (1970). Accelerated program in elementary-school mathematics the fourth year. *Psychology in the Schools*, 7, 111-126.
- Suppes, P., Jerman, M., & Brian, D. (1968). *Computer-assisted instruction: The Stanford's 1965-66 arithmetic program*. New York: Academic Press.
- Suppes, P., & Morningstar, M. (1972). *Computer-assisted instruction at Stanford, 1966-68: Data, models, and evaluation of the arithmetic programs*. New York: Academic Press.
- 吉田孝 (2008). *総則—キーワードは「生きる力」と「教育基本法」—* 吉田孝 (編著) *小学校新教育課程の解説と授業づくりのアイデア* (pp.7-26) 学事出版