タイトル	ルベーグ・ヒルベルト空間の不変部分空間について(1)
著者	山本，隆範；YAMAMOTO，Takanori
引用	北海学園大学学園論集(155)：133-139
発行日	2013-03-25

ルベーグ・ヒルベルト空間の 不変部分空間について（1）

山　本　隆　範*

第1章　序　　文

$\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$，$\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$，$\mathbb{T}$ 上の正規化された Lebesgue 測度を m_1，円板環を $A(\mathbb{D})$とする。ただし，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す。

$\mathbb{T}^2$ 上の正規化された Lebesgue 測度を m_2，２重円板環を $A(\mathbb{D}^2)$とする。

$A(\mathbb{D})$の $L^2(\mathbb{T})$ノルム閉包を $H^2(\mathbb{T})$で表し，これは Hardy 空間と呼ばれる。また，$H^2(\mathbb{T})\cap L^\infty(\mathbb{T})$を $H^\infty(\mathbb{T})$で表す。

同様に $A(\mathbb{D}^2)$の $L^2(\mathbb{T}^2)$ノルム閉包を $H^2(\mathbb{T}^2)$で表し，また，$H^2(\mathbb{T}^2)\cap L^\infty(\mathbb{T}^2)$を$H^\infty(\mathbb{T}^2)$で表す。更に，

$$A_0(\mathbb{D})=\{f\in A(\mathbb{D}):\int_{\mathbb{T}} fdm_1=0\},$$

$$A_0(\mathbb{D}^2)=\{f\in A(\mathbb{D}^2):\int_{\mathbb{T}^2} fdm_2=0\}$$

と定める。

解析学における多くの問題は，ある Hilbert 空間上のある作用素の不変部分空間を分類することと関連している。

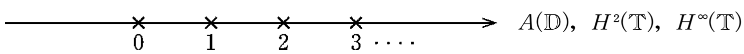


図１

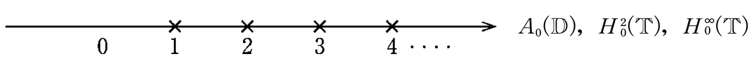
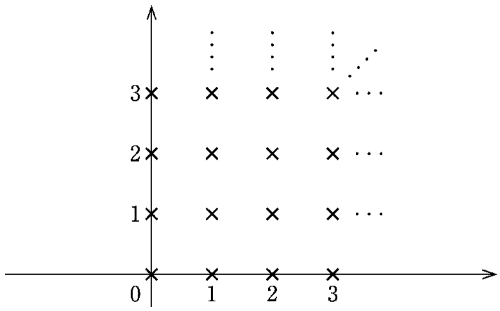


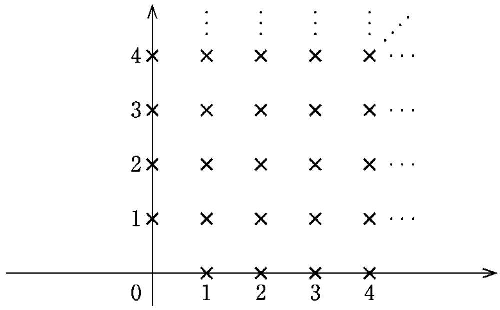
図２

＊　この研究の一部分は平成 23 年度北海学園学術研究助成金による。



$A(\mathbb{D}^2)$, $H^2(\mathbb{T}^2)$, $H^\infty(\mathbb{T}^2)$

図3



$A_0(\mathbb{D}^2)$, $H_0^2(\mathbb{T}^2)$, $H_0^\infty(\mathbb{T}^2)$

図4

1949年にBeurling［2］が，Hilbert空間$H^2(\mathbb{T})$上の『$f(z)\to zf(z)$』という作用素の不変部分空間を記述して以来，Lax，Helson，Lowdenslager，Halmos達の研究があり，1978年にBrown［3］が，Hilbert空間上のサブ正規作用素は，非自明な不変部分空間をもつことを示した。(cf.[12, p.225])

第2章　$L^2(\mathbb{T})$の不変部分空間と内外因数分解

$L^2(\mathbb{T})$の閉部分空間$\mathbf{M}$が，$A(\mathbb{D})\mathbf{M}\subset\mathbf{M}$を満たすとき$\mathbf{M}$を$L^2$の不変部分空間という。このような$\mathbf{M}$について，更に，$A_0(\mathbb{D})\mathbf{M}$の$L^2(\mathbb{T})$ノルム閉包が$\mathbf{M}$と異なるとき，$\mathbf{M}$を$L^2$の単純不変部分空間といい，そうでないとき二重不変部分空間という。この章では，$L^2(\mathbb{T})$の元uが$\int_{\mathbb{T}}||u|-1|dm_1=0$を満たすとき$u$をユニモジュラー関数という。

$\boxed{\text{定理1}}$　(Beurling)（[5, Ⅴ-6.2]，[8, Ⅶ-3.4]，[19, p.82]，[26, Theorem 3.9]，[29, 5.3.1]）

次の（i）と（ii）は同値である。

（i）　$\mathbf{M}$は$L^2(\mathbb{T})$の単純不変部分空間。

（ii）　ユニモジュラー関数uが存在して$\mathbf{M}=uH^2(\mathbb{T})$

i.e.　$\mathbf{M}$はBeurling部分空間。

$\boxed{\text{定理 2}}$ （Beurling）（［5, Ⅴ-6.3］，［13, p.99］，［19, p.82］，［26, Corollary 3.11］，［29, 5.3.2］）

次の（ⅰ）と（ⅱ）は同値である。

（ⅰ） $\mathbf{M}$ は $H^2(\mathbb{T})$ の零でない不変部分空間。

（ⅱ） 内関数 q が存在し，$\mathbf{M}=qH^2(\mathbb{T})$。

$\boxed{\text{定理 3}}$ （Wiener）（［5, Ⅴ-6.4］，［8, Ⅶ-3.3］，［19, p.81］，［26, Theorem 3.6］）

次の（ⅰ）と（ⅱ）は同値である。

（ⅰ） $\mathbf{M}$ は $L^2(\mathbb{T})$ の二重不変部分空間。

（ⅱ） $\mathbb{T}$ の可測集合 E が存在して $\mathbf{M}=\chi_E L^2(\mathbb{T})$。

i.e.　$\mathbf{M}$ は Wiener 部分空間。但し，χ_E は集合 E の特性関数を表す。

$\boxed{\text{定理 4}}$ （内外因数分解）（［8, Ⅳ-1.11］，［11, Theorem 11］，［13, p.67］，［19, p.76］，［22, Ⅰ-3.32］，［29, 5.3.5］，［31, 2.8.3］）

次の（ⅰ）と（ⅱ）は同値である。

（ⅰ） $f\in H^2(\mathbb{T})$ が恒等的に零でない。

（ⅱ） 内関数 q と外関数 h が存在して，$f=qh$ かつ $h\in H^2(\mathbb{T})$。

証明［11, p.83］（ⅱ）⇒（ⅰ）は明らかだから，（ⅰ）⇒（ⅱ）を示せばよい。

$f\in H^2(\mathbb{T})$，$f\neq 0$ とする。関数達：

$$f(z),\ zf(z),\ z^2f(z),\ \cdots\cdots,\ z^nf(z),\ \cdots\cdots$$

の生成する $L^2(\mathbb{T})$ の閉部分空間 $\mathbf{M}_f$ は $H^2(\mathbb{T})$ に含まれるから，$\mathbf{M}_f$ は Wiener 部分空間ではない。

定理 1 と定理 3 より，$\mathbf{M}_f$ は Beurling 部分空間である。

i.e.　ユニモジュラー関数 u が存在して，$\mathbf{M}_f=uH^2(\mathbb{T})$，$u\in\mathbf{M}_f$ だから，u は内関数である。

よって，$|f|>0$ である。$f\in\mathbf{M}_f$ だから，$f\in uH^2(\mathbb{T})$，ゆえに，$h\in H^2(\mathbb{T})$ が存在して，$f=uh$。このとき，

$$\mathbf{M}_h=\mathbf{M}_{\overline{u}f}=\overline{u}\cdot\mathbf{M}_f=H^2(\mathbb{T})$$

だから，h は外関数である。 ■

第 3 章　$L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間

k と l が整数を表すとき，2 変数 z，w の関数達：

$$z^kw^l,\ (l\geqq 1 \text{ かつ } k \text{ は任意，または } l=0 \text{ かつ } k\geqq 0)$$

の 1 次結合全体の一様ノルム閉包を A_1 で表す。

更に，一般に，正の整数 n に対し，関数達：

$$z^kw^l,\ (l\geqq n \text{ かつ } k \text{ は任意，または } 0\leqq l\leqq n-1 \text{ かつ } k\geqq 0)$$

の 1 次結合全体の一様ノルム閉包を A_n で表す。

このとき，A_n は 2 重円板環 $A(\mathbb{D}^2)$ のスーパー環であり，

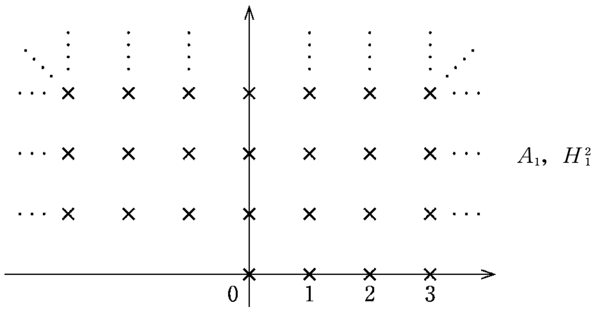


図5

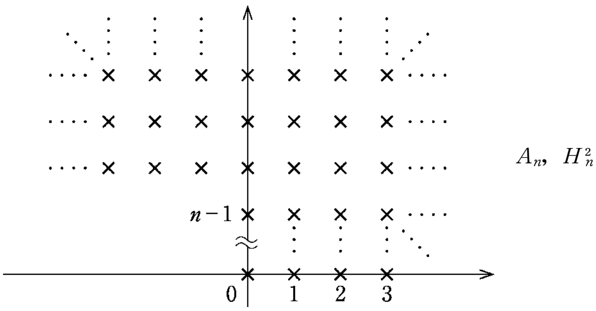


図6

$$A_1 \supsetneqq A_2 \supsetneqq \cdots\cdots \quad \text{かつ} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_\infty = A(\mathbb{D}^2)$$

が成り立つ。従って，スーパー環 A_n を調べることにより，その極限としての $A(\mathbb{D}^2)$をより良く理解できることが期待される。このとき第2章と同様に，$L^2(\mathbb{T}^2)$の不変部分空間，単純不変部分空間，二重不変部分空間を定義する。この章では $L^2(\mathbb{T}^2)$の元 u が $\int_{\mathbb{T}^2} ||u|-1| dm_2 = 0$ を満たすとき u をユニモジュラー関数という。

$\boxed{\text{定理5}}$　([4, Corollary 2.2])

次の（i）と（ii）は同値である。

（i）　$\mathbf{M}$ は $L^2(\mathbb{T}^2)$の二重不変部分空間である。

（ii）　$\mathbb{T}$ の可測集合 E_1，E_2 と，$L^2(\mathbb{T}^2)$のユニモジュラー関数 q が存在して，

$$\mathbf{M} = \chi_{E_1} q \mathbf{H}^2 \oplus \chi_{E_2} L^2(\mathbb{T}^2)。$$

ただし，$\mathbf{H}^2$ は関数達：

$$z^k w^l \ (l \geqq 0 \text{ かつ } k \text{ は任意})$$

の1次結合全体の $L^2(\mathbb{T}^2)$ノルム閉包を表す。

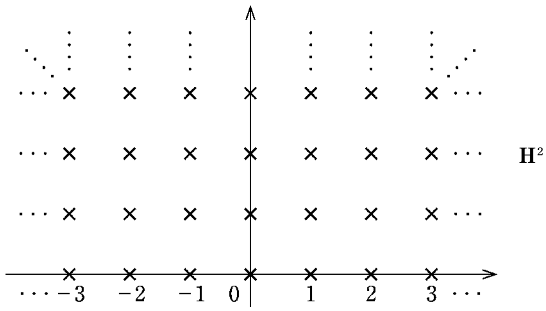


図7

$[\,\cdot\,]_2$ で $L^2(\mathbb{T}^2)$ノルム閉包を表すことにする。

このとき，$L^2(\mathbb{T}^2)$の不変部分空間 $\mathbf{M}$ に対し，

$$\mathbf{M}_{-\infty}=[\bigcup_{k\geqq 0}\bar{z}^k\mathbf{M}]_2,\ \ \mathbf{M}_{\infty}=[\bigcap_{k\geqq 0}z^k\mathbf{M}]_2$$

と定める。ただし，$\bar{z}$ は z の共役複素数を表す。

明らかに，$\mathbf{M}_\infty\subset\mathbf{M}\subset\mathbf{M}_{-\infty}$ であり，$\mathbf{M}_\infty$ と $\mathbf{M}_{-\infty}$ は，$L^2(\mathbb{T}^2)$の二重不変部分空間である。

定理６　（[4, Proposition 2.4]）

$\mathbf{M}$ は $L^2(\mathbb{T}^2)$の単純不変部分空間とする。

このとき，$L^2(\mathbb{T}^2)$のユニモジュラー関数 q_1，q_2 が存在して

$$\mathbf{M}_{-\infty}=q_1\mathbf{H}^2,\ \ \mathbf{M}_\infty=q_2\mathbf{H}^2。$$

例７　特に $\mathbf{M}=H^2_n$ のときは，$q_1(z,w)=1$，$q_2(z,w)=w^n$ ととれる。

定理８　（[4, Theorem 3.2]）

$\mathbf{M}$ は $L^2(\mathbb{T}^2)$の A_n に対する単純不変部分空間とする。

このとき２変数のユニモジュラー関数 $q_1(z,w)$と，$\mathbf{N}_{-\infty}=\mathbf{H}^2$ かつ，$\mathbf{N}_\infty=w^l\mathbf{H}^2$ がある l，$1\leqq l\leqq n$ に対して成り立つような単純不変部分空間 $\mathbf{N}$ が存在して，$\mathbf{M}=q_1(z,w)\mathbf{N}$。

更に，１変数のユニモジュラー関数 $q_2(z)$が存在して，

$$\mathbf{M}\cap q_1(z,w)w^{l-1}\mathbf{H}^2=q_1(z,w)w^{l-1}q_2(z)H^2_1。$$

例９　特に $n=1$ のときは，$l=1$ であるから，

$\mathbf{N}=\mathbf{N}\cap\mathbf{H}^2=q_2(z)H^2_1$。従って，

$$\mathbf{M}=q_1(z,w)\mathbf{N}=q_1(z,w)q_2(z)H^2_1。$$

問題10　第２章の定理４とその証明から，１変数関数空間 $L^2(\mathbb{T})$の不変部分空間の性質を用いて，内外因数分解を証明できることがわかる。２変数関数空間 $L^2(\mathbb{T}^2)$の不変部分空間の性質を調

べ，因数分解型の定理を求めることが，今後の問題として残っている。例えば，1988年にMandrekar［20］は，**M**がBeurling型，i.e.，$H^2(\mathbb{T}^2)$の内関数$q(z,w)$が存在して$\mathbf{M}=q(z,w)H^2(\mathbb{T}^2)$となるような**M**の注目すべき条件を求めた。

参考文献

［1］R. Arens, *A Banach algebra generalization of conformal mappings of the disc*, Trans. Amer. Math. Soc. **81** (1956), 501-513.

［2］A. Beurling, *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*, Acta Math. **81** (1949), 239-255.

［3］S. W. Brown, *Some invariant subspaces for subnormal operators*, Integral Equations Operator Theory **1** (1978), 310-333.

［4］R. E. Curto, P. S. Muhly, T. Nakazi（中路貴彦）and T. Yamamoto（山本隆範）, *On superalgebras of the polydisc algebra*, Acta Sci. Math. (Szeged) **51** (1987), 413-421.

［5］T. Gamelin, *Uniform algebras*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1969.

［6］M. Hasumi（荷見守助），*Shift-invariant subspace*について，数学**17**（1966），214-224.

［7］──，不変部分空間の理論，数学**28**（1976），47-57.

［8］──，リーマン面上のハーディ族，内田老鶴圃，2010.

［9］M. Hayashi（林実樹廣）, *Invariant subspaces on Riemann surfaces of Parreau-Widom type*, Trans. Amer. Math. Soc. **279** (1983), 737-757.

［10］H. Helson, *Lectures on invariant subspaces*, Academic Press, New York, 1964.

［11］H. Helson, *Harmonic Analysis*, Addison-Wesley, 1983.

［12］F. Hiai（日合文雄）and K. Yanagi（柳研二郎），ヒルベルト空間と線型作用素，牧野書店，1995.

［13］K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall, 1962.

［14］K. J. Izuchi（泉池敬司）and K. H. Izuchi（泉池耕平）, *Rank-one commutators on invariant subspaces of the Hardy space on the bidisc*, J. Math. Anal. Appl. **316** (2006), 1-8.

［15］──, *Cross commutators on backward shift invariant subspaces over the bidisc*, Acta Sci. Math. (Szeged) **72** (2006), 251-270.

［16］K. J. Izuchi（泉池敬司）and T. Nakazi（中路貴彦）, *Backward shift invariant subspaces in the bidisc*, Hokkaido Math. J. **33** (2004), 684-700.

［17］K. J. Izuchi（泉池敬司）, T. Nakazi（中路貴彦）and M. Seto（瀬戸道生）, *Backward shift invariant subspaces in the bidisc. II*, J. Operator Theory **51** (2004), 361-376.

［18］──, *Backward shift invariant subspaces in the bidisc. III*, Acta Sci. Math. (Szeged) **70** (2004), 727-740.

［19］P. Koosis, *Introduction to H^p spaces*, Second Edition, Cambridge Univ. Press, 1998.

［20］V. Mandrekar, *The validity of Beurling theorems in polydiscs*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 145-148.

［21］M. McAsey, P. Muhly, K.-S. Saito（斎藤吉助）, *Nonselfadjoint crossed products. II*, J. Math. Soc. Japan **33** (1981), 485-495.

［22］T. Nakazi（中路貴彦），正則関数のなすヒルベルト空間，岩波書店，2009.

［23］──, *Nonmaximal weak-＊ Dirichlet algebras*, Hokkaido Math. J. **5** (1976), 88-96.

［24］──, *Invariant subspaces of weak-＊ Dirichlet algebras*, Pacific J. Math. **69** (1977), 151-167.

［25］N. K. Nikolski, *Operators, Functions and Systems*, Vols. **1**, **2**, Amer. Math. Soc., 2002.

［26］H. Radjavi and P. Rosenthal, *Invariant subspaces*, Second Editions, Dover Publications, 1973.

[27] W. Rudin, *Function theory in polydiscs*, Benjamin, Inc., 1969.
[28] D. Sarason, *Invariant subspaces*, Topics in operator theory, pp. 1-47. Amer. Math. Soc. Providence, R. I., 1974.
[29] O. Takenouchi（竹之内脩），A. Sakai（阪井章），K. Kishi（貴志和男）and T. Jimbo（神保敏弥），関数環，培風館，1977.
[30] J. Wada（和田淳蔵），ノルム環，共立出版，1969.
[31] K. Yabuta（薮田公三），T. Nakazi（中路貴彦），E. Sato（佐藤圓治），H. Tanaka（田中仁）and A. Miyachi（宮地晶彦），古典調和解析，朝倉書店，2008.