

タイトル	弾丸衝突により弾性棒に発生する波動の数学的解析
著者	中西, 襄; 世戸, 憲治; NAKANISHI, Noboru; SETO, Kenji
引用	北海学園大学工学部研究報告(40): 41-63
発行日	2013-02-12

# 弾丸衝突により弾性棒に発生する波動の数学的解析

中西 襄\* ・ 世戸 憲治\*\*

## Mathematical Analysis of the Waves in an Elastic Rod Produced by Bullet Collision

Noboru NAKANISHI\* and Kenji SETO\*\*

### 要旨

有限の長さの弾性棒の一端にその長さの方向から弾丸が衝突したという状況設定で、その棒の内部に発生する粗密波に関する数学的解析を行う。この波動は空間1次元の波動方程式に従うので、三角関数で展開して解を構成する。境界条件は、一端は弾丸が付着、他端は自由端、固定端、あるいはそれらを内挿した場合などの設定で決める。解は複雑な非周期的三角級数で表される。その和は、無限個の不連続点を持つにも拘わらず任意時刻で解析的に計算でき、解は閉じた形で与えられることを示す。この解は、反射波が来るまでの時間内では、波動方程式の一般解から直接求まる解を確かに再現する。また解が正しいことは数値計算によっても確認される。

## 1 問題の概要

ここで取り上げる問題は、コンクリート板に弾丸を衝突させたとき、衝突した面よりもその裏側の面の方がより大きく破壊されるという、いわゆる裏面剥離の現象に端を発する<sup>1),2),3),4)</sup>しかし、この種の問題の分析はほとんど実験や数値計算に頼っており、数学的な解析はあまりなされていないようである。この論文では、問題を1次元に単純化したモデルで考察する。

有限の長さの弾性体の棒の一端に、大きさゼロの弾丸を衝突させたとき生ずる棒の振動の問題を考える。この振動は空間1次元での波動方程式に従う。著者の一人(世戸)はこの問題を2つの方法で定式化した<sup>5)</sup>第1の方法では、衝突した弾丸と合体した弾性棒の固有振動で展開して波動方程式を解く。第2の方法では、波動方程式の一般解から決定する。前者では固有振動の重ね合わせである非周期的三角級数で表されるが、後者では、棒の他端からの反射波が来るまでは、単純な指数関数的減少関数になる。両者は見かけの上では全く異なって見えるが、数値計算してみると確かに一致しているようである。そこでこれを解析的にきちんと証明してみようというのが、これから述べる問題である。この証明には解析学のいろんな分野の知見を動員する必要がある、数学の問題として非常に面白い。そして最終結果には、突如として直交多項式とおなじみのラグール多項式が出現する。ただしこれは、系の時間的发展を記述しているので、固有値問題の解としてでてきたのではない。

問題は棒の他端における境界条件により、3種の場合を考える。第1は自由端、第2は固定端、第3が有限質量の錘を取り付けた場合である。第3の場合で錘の質量をゼロにすれば第1の場

\* 京都大学名誉教授 Emeritus Professor of Kyoto University

\*\* 北海学園大学名誉教授 Emeritus Professor of Hokkai-Gakuen University

合に、無限大にすれば第 2 の場合になるが、有限の質量の場合は完全な解析ができない。第 1 のモデルと第 2 のモデルを内挿し、かつ完全に解析できるモデルを作ることができる。ただしこれは、物理的根拠のない純粋に数学的なモデルである。

## 2 自由端モデル

### 2.1 問題の設定

弾性棒の長さを 1 とし、その各点を、弾丸衝突前の座標  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) を用いて表す。そして、時刻  $t$  における点  $x$  の座標を  $X(x, t)$  とする。弾性波動の伝播速度は、棒のヤング率とその密度との比の平方根で与えられるが、それを単位にとると、弾性棒の縦方向の変位  $U(x, t) \equiv X(x, t) - x$  は空間 1 次元の波動方程式

$$\partial_t^2 U(x, t) = \partial_x^2 U(x, t) \quad (2.1)$$

に従う。大きさがゼロの弾丸が、 $t = 0$  で棒の左端  $x = 0$  に速度  $v_0 < 1$  で衝突するものとする。本節では棒の右端  $x = 1$  は自由端とする。したがって、 $t > 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$  の範囲で  $U(x, t)$  は物理的意味をもつ。詳しい物理的考察の定式化は前論文<sup>5)</sup>に与えたので省略し、結果のみを述べる。

弾性棒の質量を単位として弾丸の質量を  $\mu > 0$  とすると、弾丸と合体した棒の固有振動は、固有値方程式

$$\tan k_n = -\mu k_n \quad (2.2)$$

に従う。独立な固有値は  $k_0 = 0$  とほぼ  $\pi$  ごとに現れる  $k_n > 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) である。この固有関数の重ね合わせとして、初期条件を満たす波動方程式の解を構成すると、

$$U(x, t) = \frac{\mu v_0}{1 + \mu} t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu v_0 \cos k_n}{(1 + \mu \cos^2 k_n) k_n} \cos[k_n(1 - x)] \sin(k_n t) \quad (2.3)$$

を得る。点  $x$  における棒の歪みはこの  $x$  微分であるので、

$$v_0^{-1} \partial_x U(x, t) = 2\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos k_n}{1 + \mu \cos^2 k_n} \sin[k_n(1 - x)] \sin(k_n t) \quad (2.4)$$

が考察の対象となる。

弾丸が棒の左端にくっついている間は  $U(0, t)$  が弾丸の位置を表すことと、弾丸が棒から受ける反発力は  $\partial_x U(x, t)|_{x=0}$  の定数倍であることから、弾丸の運動方程式により  $U(0, t)$  を求めることができる。反射波が発生するまでの間は、波動方程式 (2.1) の解は  $U(x, t) = f(t - x)$  と書けると考えられるから、この情報のみから解を決定することができて、 $0 < t < 1$  に対し

$$v_0^{-1} \partial_x U(x, t) = -e^{-(t-x)/\mu} \theta(t - x) \quad (2.5)$$

を得る。ただし、 $\theta(u)$  はヘヴィサイドの階段関数 ( $u$  が正のとき 1, 負のとき 0) である。(2.4) と (2.5) は  $t < 1$  で一致するはずである。実際、数値計算の結果を見ると、確かにそうになっている。これを解析的に証明し、さらに (2.4) から  $t > 1$  での振る舞いを明らかにするのが、以下の解析の目的である。

## 2.2 三角級数の総和 (限定値)

(2.4) の和で, 固有値  $k_0 = 0$  を含めても, その寄与は 0 だから構わない. また  $k_n$  が固有値方程式 (2.2) の解ならば,  $-k_n$  も解だから, 和をすべての固有値にわたるとして, 2 で割ればよい. さらに三角関数の公式

$$2 \sin(k_n(1-x)) \sin(k_n t) = -\cos(k_n(1-x+t)) + \cos(k_n(1-x-t)) \quad (2.6)$$

を使うと,

$$v_0^{-1} \partial_x U(x, t) = S(t+x-1) - S(t-x+1) \quad (2.7)$$

と書ける. ただし

$$S(y) \equiv \frac{\mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos k_n}{1 + \mu \cos^2 k_n} \cos(k_n y) \quad (2.8)$$

とおいた (和は  $k_0 = 0$  からの寄与  $\mu/2(1+\mu)$  を含むことに注意). したがって  $S(y)$  を計算すればよいことがわかる.

$\tan k + \mu k$  を  $k$  について微分すれば  $\sec^2 k + \mu > 0$  となることに注意すると\*1,

$$S(y) = \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{\cos(ky)}{\cos k} \delta(\tan k + \mu k) \quad (2.9)$$

と書けることがわかる. また, デルタ関数の留数定理による表示式により,  $\varepsilon$  を無限小正数とするとき,

$$S(y) = \frac{\mu}{2} \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\infty+i\varepsilon}^{-\infty+i\varepsilon} dz \frac{\cos(zy)}{\sin z + \mu z \cos z} + \int_{-\infty-i\varepsilon}^{\infty-i\varepsilon} dz \frac{\cos(zy)}{\sin z + \mu z \cos z} \right] \quad (2.10)$$

と表すこともできる.

レンマ 超越方程式  $\sin z + \mu z \cos z = 0$  は, 実でない根を持たない.

[証明] この方程式を  $iz = \zeta$  とおいて書き直すと,  $e^{2\zeta} = \frac{1-\mu\zeta}{1+\mu\zeta}$ .  $\zeta = \xi + i\eta$  と書けば, この絶対値は

$$e^{2\xi} = \sqrt{\frac{(1-\mu\xi)^2 + \mu^2\eta^2}{(1+\mu\xi)^2 + \mu^2\eta^2}}. \quad (2.11)$$

$\mu > 0$  だから,  $\xi > 0$  のとき, 左辺は 1 より大, 右辺は 1 より小, 逆に  $\xi < 0$  のとき, 左辺は 1 より小, 右辺は 1 より大である. ゆえに  $\xi = 0$  のときしか成り立たない. すなわち元の方程式は  $z$  が実のときしか根はない.  $\square$

---

\*1 一般に,  $C^1$  級関数  $f(x)$  が  $x = x_n$  において 1 位のゼロを持つならば,  $\delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n)$  となる.

レンマにより，上の積分の被積分関数は実軸上以外に特異点をもたない．したがって，コーシーの定理により， $C(R)$  を原点中心の半径  $R$  の円とするととき，

$$S(y) = \frac{\mu}{2} \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C(R)} dz \frac{\cos(zy)}{\sin z + \mu z \cos z} \quad (2.12)$$

となる．被積分関数をオイラーの公式を用いて書き直す．上半面では

$$\frac{e^{iz(1-y)} + e^{iz(1+y)}}{\mu z + i + (\mu z - i)e^{2iz}}, \quad (2.13)$$

下半面では

$$\frac{e^{-iz(1-y)} + e^{-iz(1+y)}}{\mu z - i + (\mu z + i)e^{-2iz}} \quad (2.14)$$

と書いてみればわかるように， $y < 1$  ならば積分の値はゼロであることがわかる．すなわち， $y < 1$  に対し

$$S(y) = 0 \quad (2.15)$$

である．さらに， $y = 1$  のときは，(2.12) の被積分関数において  $R \rightarrow \infty$  での主要項のみを取り出せば，

$$S(1) = \frac{\mu}{2} \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C(R)} dz \frac{1}{\mu z} = \frac{1}{2} \quad (2.16)$$

となる．

$y > 1$  の場合に進もう． $S(y)$  のデルタ関数表示 (2.9) で  $y - 1 = y'$  とおくと，

$$S(y' + 1) = \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk [\cos(ky') - \tan k \sin(ky')] \delta(\tan k + \mu k). \quad (2.17)$$

これを  $y'$  について微分すると，

$$S'(y' + 1) = \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk [-k \sin(ky') - k \tan k \cos(ky')] \delta(\tan k + \mu k) \quad (2.18)$$

となるが， $k$  をデルタ関数の性質を用いて書き直せば，

$$S'(y' + 1) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk [\tan k \sin(ky') + \tan^2 k \cos(ky')] \delta(\tan k + \mu k). \quad (2.19)$$

となる．さらに  $\tan^2 k = \sec^2 k - 1$  を用いて変形すれば，

$$S'(y' + 1) = -\mu^{-1} S(y' + 1) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{\cos(ky')}{\cos^2 k} \delta(\tan k + \mu k). \quad (2.20)$$

となる．第 2 項は，留数表示を用いれば， $y' < 2$  のとき前と同様にして 0 になることがわかる．ゆえに， $S(y)$  は  $1 < y < 3$  において 1 階微分方程式  $\mu S'(y) = -S(y)$  を満たす．したがって， $1 < y < 3$  に対し

$$S(y) = c_0 e^{-(y-1)/\mu} \quad (2.21)$$

であることがわかる．

積分定数  $c_0$  を決めるには初期値を計算すればよいのだが、 $S(y)$  は  $y = 1$  で不連続であるから注意を要する。 $c_0 = 1$  であることは後で証明するが、ここでは次の性質を用いて示す。

**命題** 級数 (2.8) の不連続点での値は、両側からの極限値の相加平均に等しい\*2。

[証明の概略]\*3 まず、有限和については不連続性を生ずることがないので、十分大きな  $n$  に関する和のみを考察すればよいことに注意する。 $\tan k$  は  $k = (n - \frac{1}{2})\pi$  を漸近線にもつので、 $n$  を十分に大きくとれば、任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、 $|k_n - (n - \frac{1}{2})\pi| < \varepsilon$  にできる。つまり、級数 (2.8) はあるフーリエ級数にいくらでも近づく。両者の差は、(2.6) のような三角関数の公式 ( $\cos$  の差を  $\sin$  の積に直す) を用いてまとめると、その絶対値が (2.8) に似た級数の和の絶対値に  $\varepsilon$  を乗じたもので抑えられることがわかる。この級数は有界と考えられるので、差は 0 に近づく。フーリエ級数については不連続点での値は両側からの極限値の相加平均に等しいことが知られているので、このことから (2.8) についてもそうであると推論される。□

(2.16) により、 $y = 1$  での値は  $S(1) = \frac{1}{2}$  である。また (2.15) により  $\lim_{y \rightarrow 1-0} S(y) = 0$  である。したがって、 $\lim_{y \rightarrow 1+0} S(y) = 1$  でなければならない。すなわち初期値は  $c_0 = 1$  である。

かくして、(2.7), (2.15), (2.21) により、(2.5) が第 1 の方法で証明された。

## 2.3 三角級数の総和 (一般値)

さらに  $y > 3$  へ進もう。

微分方程式 (2.20) の剰余項

$$R(y' + 1) \equiv \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\cos(ky')}{\cos^2 k} \delta(\tan k + \mu k). \quad (2.22)$$

は  $y' \geq 2$  では生き残るから、これをさらに  $y' - 2 = y''$  とおいて変形する。デルタ関数以外の被積分関数は、

$$\begin{aligned} \frac{\cos(ky'' + 2k)}{\cos^2 k} &= \frac{\cos(2k) \cos(ky'') - \sin(2k) \sin(2y'')}{\cos^2 k} \\ &= \left(2 - \frac{1}{\cos^2 k}\right) \cos(ky'') - 2 \tan k \sin(ky'') \\ &= 2[\cos(ky'') - \tan k \sin(ky'')] - \frac{\cos(ky'')}{\cos^2 k} \end{aligned} \quad (2.23)$$

と書き換えられる。この式の第 1 項から  $2S(y'' + 1)$ 、第 2 項から  $-R(y'' + 1)$  がでてくる。そしてこのようなパターンは、 $y = 2n + 1$  に不連続点が現れ、何度でも繰り返されることになる。すなわち、上の結果をまとめると、

$$\begin{aligned} \mu S'(y) &= -S(y) + R(y), \\ R(y) &= 2S(y - 2) - R(y - 2), \\ \mu S'(y - 2) &= -S(y - 2) + R(y - 2) \end{aligned} \quad (2.24)$$

\*2 このことは、(2.8) でなくても 3~5 節で考察する同様な級数についてもいえることである。

\*3 証明は数学的に厳密とはいえないので、詳細は省略する。

となる. (2.24) から  $R(y)$  と  $R(y-2)$  を消去すれば,

$$\mu[S'(y) + S'(y-2)] = -S(y) + S(y-2) \quad (2.25)$$

を得る.

この微分方程式は  $S(y)$  と  $S(y-2)$  とでは関数形が異なるので, 注意を要する. 一般に  $S(y-2j)$  は区間  $2(n-j)+1 < y-2j < 2(n-j)+3$  で定義される解析的な関数なので,

$$S(y-2j) \equiv \tilde{S}_{n-j}([y-2j-2(n-j)-1]/\mu) \quad (2.26)$$

と書くことにする.  $v = (y-2n-1)/\mu$  とおくと, これは  $\tilde{S}_{n-j}(v)$  となるから,

$$\tilde{S}'_n(v) + \tilde{S}'_{n-1}(v) = -\tilde{S}_n(v) + \tilde{S}_{n-1}(v) \quad (2.27)$$

のように, 独立変数を  $v$  に統一できる. これは,  $\tilde{S}_{n-1}(v)$  を既知量とみなすと, 非斉次 1 階線形微分方程式であるから, 一般解は特解と斉次部分の解に任意定数を乗じたものの和で与えられる. まず  $\tilde{S}_n(v)$  の特解  $T_n(v)$  を求める.

$$T_n(v) = P_n(v)e^{-v} \quad (2.28)$$

とおけば,

$$P'_n(v) + P'_{n-1}(v) = 2P_{n-1}(v) \quad (2.29)$$

となる. さらに

$$P_n(v) = (-1)^n L_n(2v) \quad (2.30)$$

とおくと,

$$L'_n(x) = L'_{n-1}(x) - L_{n-1}(x) \quad (2.31)$$

となる. これはラゲール多項式の漸化微分方程式であるから,  $y < 3$  で証明した結果に従い  $L_0(x) = 1$  とすれば,  $L_n(x)$  はラゲール多項式に一致することがわかる. したがって,

$$T_n(v) = (-1)^n L_n(2v)e^{-v} \quad (2.32)$$

である.

一般解は  $n=1$  から順に求めていく. まず,  $c_1$  を任意定数とするとき,

$$\tilde{S}_1(v) = T_1(v) + c_1 T_0(v) \quad (2.33)$$

である. 同様に  $n=2$  では,  $c_2$  を任意定数とするとき,

$$\tilde{S}_2(v) = T_2(v) + c_1 T_1(v) + c_2 T_0(v) \quad (2.34)$$

となる. これを繰り返せば, 最終的に

$$\tilde{S}_n(v) = \sum_{k=0}^n c_k T_{n-k}(v) \quad (2.35)$$

を得る.

以上の結果をもとの変数に戻して書くと,  $2n+1 < y < 2n+3$  において

$$S(y) = \sum_{k=0}^n c_k (-1)^{n-k} L_{n-k}(2(y-2(n-k)-1)/\mu) e^{-(y-2(n-k)-1)/\mu} \quad (2.36)$$

を得る. なお, ラゲール多項式のあらわな式\*4は,

$$L_n(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{n!}{(m!)^2 (n-m)!} x^m \quad (2.37)$$

である.

## 2.4 積分定数の決定

残る問題は, 積分定数  $c_n$  を決定することである. ここで物理に戻って, 運動量保存則を利用することを考える. 弾性棒の運動量と弾丸の運動量との和は, 最初に弾丸が持っていた運動量に等しいという式を書くと,

$$\int_0^1 dx \partial_t U(x, t) + \mu \partial_t U(0, t) = \mu v_0 \quad (2.38)$$

である. (2.3) と (2.8) から  $v_0^{-1} \partial_t U(x, t) = S(t-x+1) + S(t+x-1)$  なので, これは

$$\frac{1}{\mu} \int_0^1 dx [S(t-x+1) + S(t+x-1)] + S(t+1) + S(t-1) = 1 \quad (2.39)$$

となる. この恒等式を運動量保存則に頼らずに直接証明しておこう.

レンマ 恒等式 (2.39) が成立する.

[証明] まず,

$$\begin{aligned} S(y) &= \frac{\mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos k_n \cos(k_n y)}{1 + \mu \cos^2 k_n} \\ &= \frac{\mu}{2(1+\mu)} + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos k_n \cos(k_n y)}{1 + \mu \cos^2 k_n}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

であるから, (2.39) の左辺を  $Q(t)$  と書けば,

$$Q(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos k_n R_n(t)}{1 + \mu \cos^2 k_n} \quad (2.41)$$

となる. ただし

$$\begin{aligned} R_n(t) &\equiv \int_0^1 dx [\cos(k_n(t-x+1)) + \cos(k_n(t+x-1))] + \mu [\cos(k_n(t+1)) + \cos(k_n(t-1))] \\ &= \frac{1}{k_n} [\sin(k_n(t+1)) - \sin(k_n(t-1))] + \mu [\cos(k_n(t+1)) + \cos(k_n(t-1))] \end{aligned} \quad (2.42)$$

\*4 この式は, 漸化微分方程式 (2.31) を演算子法を用いて解けば直ちに得られる. 微分演算子を  $D$  とするとき,  $DL_n = (D-1)L_{n-1}$  である. 積分定数を避けるために  $L_n$  は  $\theta(x)$  を含んでいるものとする.  $L_n = (1-D^{-1})L_{n-1} = (1-D^{-1})^n L_0 = (D-1)^n D^{-n} L_0$  で,  $L_0 = \theta(x)$  とすれば,  $L_n = (D-1)^n (x^n/n!) \theta(x)$  となる.  $(D-1)^n$  を 2 項展開すればよい.



とおいた。  $\frac{1}{k_n} = -\frac{\mu}{\tan k_n}$  を代入すれば、

$$R_n(t) = -\frac{\mu}{\tan k_n} \cdot 2 \cos(k_n t) \sin k_n + 2\mu \cos(k_n t) \cos k_n = 0 \quad (2.43)$$

となる。したがって、  $Q(t) = 1$  を得る。□

**命題** (2.36) に現れる積分定数  $c_n$  はすべて 1 に等しい。

[証明]  $n$  に関する数学的帰納法を用いる。  $c_k = 1$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) として、  $c_n = 1$  を証明する。  $n = 0$  のときは無仮定なので、  $n = 0$  の場合を別に証明する必要はない。

恒等式 (2.39) で  $t = 2n + 1$  とおいて得られる式

$$1 = Q(2n + 1) = \frac{1}{\mu} \int_0^1 dx [S(2n + 2 - x) + S(2n + x)] + S(2n + 2) + S(2n) \quad (2.44)$$

を計算する。

$y = 2n + 2 - x$  のとき、  $(2k + 1 - x)/\mu = v$  とおけば、

$$\frac{1}{\mu} \int_0^1 dx S(2n + 2 - x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k/\mu}^{(2k+1)/\mu} dv (-1)^{n-k} L_{n-k}(2v) e^{-v} + c_n (e^{-2n/\mu} - e^{-(2n+1)/\mu}) \quad (2.45)$$

となる。ここに (2.37) から、

$$(-1)^{n-k} L_{n-k}(2v) = \sum_{m=0}^{n-k} (-1)^{n-k-m} \frac{2^m (n-k)!}{(m!)^2 (n-k-m)!} v^m \quad (2.46)$$

である。

積分の計算を行う。

$$I_m^{(k)} \equiv \int_{2k/\mu}^{(2k+1)/\mu} dv v^m e^{-v} = \left(\frac{2k}{\mu}\right)^m e^{-2k/\mu} - \left(\frac{2k+1}{\mu}\right)^m e^{-(2k+1)/\mu} + m I_{m-1}^{(k)}. \quad (2.47)$$

ただし

$$I_0^{(k)} = e^{-2k/\mu} - e^{-(2k+1)/\mu}. \quad (2.48)$$

したがって、

$$I_m^{(k)} = \sum_{j=0}^m \frac{m!}{j!} \left(\frac{2k}{\mu}\right)^j e^{-2k/\mu} - \sum_{j=0}^m \frac{m!}{j!} \left(\frac{2k+1}{\mu}\right)^j e^{-(2k+1)/\mu} \quad (2.49)$$

を得る。これを代入して、  $m$  の和と  $j$  の和の順序を入れ替えれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \int_0^1 dx S(2n + 2 - x) &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{1}{j!} \left(\frac{2k}{\mu}\right)^j M_j^{(n-k)} e^{-2k/\mu} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{1}{j!} \left(\frac{2k+1}{\mu}\right)^j M_j^{(n-k)} e^{-(2k+1)/\mu} + (e^{-2n/\mu} - e^{-(2n+1)/\mu}) c_n \end{aligned} \quad (2.50)$$

となる。ただし、

$$M_j^{(\nu)} \equiv \sum_{m=j}^{\nu} (-1)^{\nu-m} \frac{2^m \nu!}{m! (\nu-m)!} \quad (2.51)$$

とおいた。とくに、2項定理により、 $M_0^{(\nu)} = (2-1)^\nu = 1$ であることに注意しよう。

次に(2.44)の第2積分の計算をする。 $2n-1 < 2n+x < 2n+1$ であるから、 $(2k+1+x)/\mu = v$ とおけば、

$$\frac{1}{\mu} \int_0^1 dx S(2n+x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{(2k+1)/\mu}^{(2k+2)/\mu} dv [(-1)^{n-k-1} L_{n-k-1}(2v)] e^{-v} \quad (2.52)$$

となる。積分の計算を行う。

$$\begin{aligned} J_m^{(k)} &\equiv \int_{(2k+1)/\mu}^{(2k+2)/\mu} dv v^m e^{-v} \\ &= \left(\frac{2k+1}{\mu}\right)^m e^{-(2k+1)/\mu} - \left(\frac{2k+2}{\mu}\right)^m e^{-(2k+2)/\mu} + m J_{m-1}^{(k)} \\ &= \sum_{j=0}^m \frac{m!}{j!} \left(\frac{2k+1}{\mu}\right)^j e^{-(2k+1)/\mu} - \sum_{j=0}^m \frac{m!}{j!} \left(\frac{2k+2}{\mu}\right)^j e^{-(2k+2)/\mu}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

これを代入して、 $m$ の和と $j$ の和の順序を入れ替えれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \int_0^1 dx S(2n+x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{2k+1}{\mu}\right)^j M_j^{(n-k-1)} e^{-(2k+1)/\mu} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{2k+2}{\mu}\right)^j M_j^{(n-k-1)} e^{-(2k+2)/\mu}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

また(2.44)の後ろの2項は、それぞれ

$$S(2n+2) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{n-k-j} \frac{2^j (n-k)!}{(j!)^2 (n-k-j)!} \left(\frac{2k+1}{\mu}\right)^j \right] e^{-(2k+1)/\mu} + e^{-(2n+1)/\mu} c_n \quad (2.55)$$

および

$$S(2n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \sum_{j=0}^{n-k-1} (-1)^{n-k-j-1} \frac{2^j (n-k-1)!}{(j!)^2 (n-k-j-1)!} \left(\frac{2k+1}{\mu}\right)^j \right] e^{-(2k+1)/\mu} \quad (2.56)$$

である。

以上を $Q(2n+1)$ に代入する。まず(2.54)の右辺第2項の $k$ を1だけずらして

$$- \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{1}{j!} \left(\frac{2k}{\mu}\right)^j M_j^{(n-k)} e^{-2k/\mu} - e^{-2n/\mu} \quad (2.57)$$

と書き直してみればわかるように、 $Q(2n+1)$ の $e^{-2k/\mu}$  ( $1 \leq k \leq n-1$ )の係数はすべて0である。

次に、 $Q(2n+1)$  の  $e^{-(2k+1)/\mu}$  ( $0 \leq k \leq n-1$ ) の係数  $K_{n-k}$  を計算する．ここに

$$\begin{aligned} K_\nu &\equiv - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{1}{j!} \left( \frac{2k+1}{\mu} \right)^j \sum_{m=j}^{\nu} (-1)^{\nu-m} \frac{2^m \nu!}{m!(\nu-m)!} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{1}{j!} \left( \frac{2k+1}{\mu} \right)^j \sum_{m=j}^{\nu-1} (-1)^{\nu-m-1} \frac{2^m (\nu-1)!}{m!(\nu-m-1)!} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\nu} (-1)^{\nu-j} \frac{2^j \nu!}{(j!)^2 (\nu-j)!} \left( \frac{2k+1}{\mu} \right)^j + \sum_{j=0}^{\nu-1} (-1)^{\nu-j-1} \frac{2^j (\nu-1)!}{(j!)^2 (\nu-j-1)!} \left( \frac{2k+1}{\mu} \right)^j. \end{aligned} \quad (2.58)$$

$K_\nu = 0$  を証明する． $K_\nu$  の  $[(2k+1)/\mu]^j$  の係数を  $K_\nu^{(j)}$  と書く．まず  $K_\nu^{(\nu)}$  は、第1項から  $-2^\nu/\nu!$ 、第3項から  $2^\nu/\nu!$  で、ちょうどキャンセルするから0である． $j \leq \nu-1$  に対し、

$$\begin{aligned} K_\nu^{(j)} &= - \frac{1}{j!} \sum_{m=j}^{\nu} (-1)^{\nu-m} \frac{2^m \nu!}{m!(\nu-m)!} + \frac{1}{j!} \sum_{m=j}^{\nu-1} (-1)^{\nu-m-1} \frac{2^m (\nu-1)!}{m!(\nu-m-1)!} \\ &\quad + (-1)^{\nu-j} \frac{2^j \nu!}{(j!)^2 (\nu-j)!} + (-1)^{\nu-j-1} \frac{2^j (\nu-1)!}{(j!)^2 (\nu-j-1)!}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

2項定理を使ってこれを書き直す． $-(2-1)^\nu + (2-1)^{\nu-1} = 0$  であるから、

$$\begin{aligned} K_\nu^{(j)} &= \frac{1}{j!} \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^{\nu-m} \frac{2^m \nu!}{m!(\nu-m)!} - \frac{1}{j!} \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^{\nu-m-1} \frac{2^m (\nu-1)!}{m!(\nu-m-1)!} \\ &\quad + (-1)^{\nu-j} \frac{2^j \nu!}{(j!)^2 (\nu-j)!} + (-1)^{\nu-j-1} \frac{2^j (\nu-1)!}{(j!)^2 (\nu-j-1)!}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

この値は  $j=0$  のとき明らかに0だから、 $j \geq 1$  とする．前の2項、後ろの2項をそれぞれまとめると、

$$K_\nu^{(j)} = \frac{1}{j!} \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^{\nu-m} \frac{(2\nu-m)2^m (\nu-1)!}{m!(\nu-m)!} + (-1)^{\nu-j} \frac{2^j (\nu-1)!}{(j-1)!j!(\nu-j)!} \quad (2.61)$$

である．したがって、次の級数和の公式が証明されればよい．

$$\sum_{m=0}^{j-1} (-1)^m \frac{(2\nu-m)2^m}{m!(\nu-m)!} = (-1)^{j-1} \frac{2^j}{(j-1)!(\nu-j)!}. \quad (2.62)$$

$j$  に関する数学的帰納法を用いる． $j=1$  のときは、両辺とも  $2/(\nu-1)!$  になるから、OK．この式が成立しているとする、両辺に  $m=j$  の項を付け加えれば、右辺は

$$(-1)^{j-1} \frac{2^j}{(j-1)!(\nu-j)!} + (-1)^j \frac{(2\nu-j)2^j}{j!(\nu-j)!} = (-1)^j \frac{2^{j+1}}{j!(\nu-j-1)!} \quad (2.63)$$

となって、(2.62) の右辺で  $j$  を  $j+1$  に置き換えた式に一致する．

したがって  $K_\nu^{(j)} = 0$  である．ゆえに、 $K_{n-k} = 0$  である．

以上から、

$$1 = Q(2n+1) = 1 + (e^{-2n/\mu} - e^{-(2n+1)/\mu})c_n - e^{-2n/\mu} + e^{-(2n+1)/\mu}c_n \quad (2.64)$$

を得る．したがって  $c_n = 1$  でなければならない．□

したがって、任意の値の  $y > -1$  に対し\*5、

$$S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n \left( \frac{2(y - 2n - 1)}{\mu} \right) e^{-(y-2n-1)/\mu} \theta(y - 2n - 1) \quad (2.65)$$

という美しい形にまとめられる．ただし、不連続点  $y = 2n + 1$  では、両側からの極限値の相加平均、すなわち、

$$S(2n + 1) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k L_k \left( \frac{4(n - k)}{\mu} \right) e^{-2(n-k)/\mu} + \frac{1}{2} (-1)^n \quad (2.66)$$

となる．

最後の付録に示すように、(2.65) は、元の三角級数 (2.8) の数値計算の結果を完全に再現する．

### 3 固定端モデル

弾性棒の右端を自由にしないで固定した場合も、運動量保存則を除いてほとんどパラレルな解析ができる．計算の詳細は省略し、推論における主な式だけを書くことにする．

固定端モデルは、自由端モデルの  $\sin$  を  $\cos$  に、 $\cos$  を  $-\sin$  に置き換えて得られる．したがって、(2.8) に対応する式は

$$\hat{S}(y) = \frac{\mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k_n}{1 + \mu \sin^2 k_n} \sin(k_n y) \quad (3.1)$$

で、固有値方程式は

$$\cot k = \mu k \quad (3.2)$$

である．デルタ関数表示は、

$$\hat{S}(y) = \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\sin(ky)}{\sin k} \delta(-\cot k + \mu k) \quad (3.3)$$

で、留数定理による表示式は、

$$\hat{S}(y) = \frac{\mu}{2} \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\infty+i\varepsilon}^{-\infty+i\varepsilon} dz \frac{\sin(zy)}{-\cos z + \mu z \sin z} + \int_{-\infty-i\varepsilon}^{\infty-i\varepsilon} dz \frac{\sin(zy)}{-\cos z + \mu z \sin z} \right] \quad (3.4)$$

である．

$-\cos z + \mu z \sin z = 0$  が実でない根を持たないことは、前と全く同様にして証明できる．したがって、コーシーの定理により、積分路を原点中心の半径  $R \rightarrow \infty$  の円にすることができる．ゆえに前と同じ推論により、 $y < 1$  ならば  $\hat{S}(y) = 0$  となる．

\*5 負の値に関しては、(2.8) から明らかに  $S(-y) = S(y)$  である．

漸化微分方程式は，前と同様な推論により，

$$\mu[\hat{S}'(y) - \hat{S}'(y-2)] = -\hat{S}(y) - \hat{S}(y-2) \quad (3.5)$$

が得られる．さらに前と同様な推論によって，これの一般解を求めると， $2n+1 < y < 2n+3$  に対し

$$\hat{S}(y) = \sum_{k=0}^n c_k L_{n-k}(2(y-2(n-k)-1)/\mu) e^{-(y-2(n-k)-1)/\mu} \quad (3.6)$$

を得る．

さて，問題は運動量保存則である．固定端であるから，素朴な運動量保存則は成立しない．弾丸衝突後，弾性棒が固定端から受ける力は  $\partial_x U(x, t)|_{x=1}$  であり，これを時間について積分したものが力積，すなわち弾性棒が固定端から受け取る運動量の変化分である．したがって，運動量保存則はその分を付け加えた形に修正しなければならない．というわけで，(2.38) は

$$\int_0^1 dx \partial_t U(x, t) + \mu \partial_t U(0, t) - \int_0^t dt' \partial_x U(x, t')|_{x=1} = \mu v_0 \quad (3.7)$$

のように修正される．これを  $\hat{S}(y)$  で書き直すと，

$$\frac{1}{\mu} \int_0^1 dx [\hat{S}(t-x+1) - \hat{S}(t+x-1)] + \hat{S}(t+1) - \hat{S}(t-1) + \frac{2}{\mu} \int_0^t dy \hat{S}(y) = 1 \quad (3.8)$$

となることがいえる．そしてこの恒等式を用いて，積分定数  $c_n$  がすべて 1 であることが証明できる．しかしそれは第 5 節で述べる証明の特別の場合になるので，省略する．

最終結果は

$$\hat{S}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n \left( \frac{2(y-2n-1)}{\mu} \right) e^{-(y-2n-1)/\mu} \theta(y-2n-1) \quad (3.9)$$

となる．これは最後の付録で示すように，三角級数 (3.1) の数値計算の結果を完全に再現する．

## 4 錘モデル

弾性棒の右端に質量  $\hat{\mu}$  の錘をつけた場合を考察する． $\hat{\mu} = 0$  のとき自由端モデル， $\hat{\mu} \rightarrow \infty$  のとき固定端モデルになる．このモデルは次の  $S_{\hat{\alpha}}(y)$  によって記述される．

$$S_{\hat{\alpha}}(y) \equiv \frac{\mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(k_n + \hat{\alpha}_n)}{1 + \mu \cos^2(k_n + \hat{\alpha}_n) + \hat{\mu} \cos^2 \hat{\alpha}_n} \cos(k_n y + \hat{\alpha}_n). \quad (4.1)$$

ただし， $\hat{\alpha} \equiv \tan^{-1}(\hat{\mu}k)$  である．固有値方程式は  $\tan(k_n + \hat{\alpha}_n) = -\mu k_n$ ，すなわち

$$\tan k_n = -\frac{(\mu + \hat{\mu})k_n}{1 - \mu \hat{\mu} k_n^2} \quad (4.2)$$

である．

留数定理を使うと， $\varepsilon$  を無限小正数とするととき，

$$S_{\hat{\alpha}}(y) = \frac{\mu}{2} \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\infty+i\varepsilon}^{-\infty+i\varepsilon} + \int_{-\infty-i\varepsilon}^{\infty-i\varepsilon} \right] dz \frac{\cos(zy + \hat{\alpha}(z))}{\sin(z + \hat{\alpha}(z)) + \mu z \cos(z + \hat{\alpha}(z))} \quad (4.3)$$

と書ける．ただし， $\hat{\alpha}(z) = \tan^{-1}(\hat{\mu}z)$  である．

レンマ  $\sin(z + \hat{\alpha}(z)) + \mu z \cos(z + \hat{\alpha}(z)) = 0$  は実でない根を持たない．

[証明] この方程式を  $iz = \zeta$  とおいて書き直すと，

$$e^{2\zeta} = \frac{(1 - \mu\zeta)(1 - \hat{\mu}\zeta)}{(1 + \mu\zeta)(1 + \hat{\mu}\zeta)} \quad (4.4)$$

となる． $\zeta = \xi + i\eta$  と書けば，この絶対値は

$$e^{2\xi} = \sqrt{\frac{[(1 - \mu\xi)^2 + \mu^2\eta^2][(1 - \hat{\mu}\xi)^2 + \hat{\mu}^2\eta^2]}{[(1 + \mu\xi)^2 + \mu^2\eta^2][(1 + \hat{\mu}\xi)^2 + \hat{\mu}^2\eta^2]}} \quad (4.5)$$

である． $\mu > 0$ ,  $\hat{\mu} > 0$  だから， $\xi > 0$  のとき，左辺は 1 より大，右辺は 1 より小，逆に  $\xi < 0$  のとき，左辺は 1 より小，右辺は 1 より大である．ゆえに  $\xi = 0$  のときしか成り立たない．すなわちこの方程式は  $z$  が実のときしか根はない．□

レンマにより，上の積分の被積分関数は実軸上以外に特異点をもたない．したがって，コーシーの定理により， $C(R)$  を原点中心の半径  $R$  の円とするととき，

$$S_{\hat{\alpha}}(y) = \frac{\mu}{2} \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C(R)} dz \frac{\cos(zy + \hat{\alpha}(z))}{\sin(z + \hat{\alpha}(z)) + \mu z \cos(z + \hat{\alpha}(z))} \quad (4.6)$$

となる．被積分関数をオイラーの公式を用いて書き直す．上半面では

$$\frac{e^{iz(1-y)} + e^{i[z(1+y) + 2\hat{\alpha}(z)]}}{\mu z + i + (\mu z - i)e^{2i(z + \hat{\alpha}(z))}}, \quad (4.7)$$

下半面では

$$\frac{e^{-iz(1-y)} + e^{-i[z(1+y) + 2\hat{\alpha}(z)]}}{\mu z - i + (\mu z + i)e^{-2i(z + \hat{\alpha}(z))}} \quad (4.8)$$

と書いてみる．

$$\hat{\alpha}(z) = \tan^{-1}(\hat{\mu}z) = \frac{i}{2} \log \frac{1 - i\hat{\mu}z}{1 + i\hat{\mu}z} \quad (4.9)$$

であるから，

$$\Im \hat{\alpha}(z) = \frac{1}{4} \log \frac{(1 + \hat{\mu}\Im z)^2 + (\hat{\mu}\Re z)^2}{(1 - \hat{\mu}\Im z)^2 + (\hat{\mu}\Re z)^2}. \quad (4.10)$$

したがって， $\hat{\alpha}(z)$  の符号は， $\Im z$  のそれと同じである．ゆえに， $y < 1$  ならば， $S_{\hat{\alpha}}(y) = 0$  となる．

次に  $1 < y < 3$  を考察する．デルタ関数表示は，

$$S_{\hat{\alpha}}(y) = \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\cos(ky + \hat{\alpha})}{\cos(k + \hat{\alpha})} \delta(\tan(k + \hat{\alpha}) + \mu k) \quad (4.11)$$

となる． $y = y' + 1$  とすると，

$$\cos(ky + \hat{\alpha}) = \cos(ky' + k + \hat{\alpha}) = \cos(ky') \cos(k + \hat{\alpha}) - \sin(ky') \sin(k + \hat{\alpha}) \quad (4.12)$$

であるから,

$$S_{\hat{\alpha}}(y' + 1) = \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk [\cos(ky') - \sin(ky') \tan(k + \hat{\alpha})] \delta(\tan(k + \hat{\alpha}) + \mu k) \quad (4.13)$$

となる.  $y'$  で微分すれば,

$$S'_{\hat{\alpha}}(y' + 1) = \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk [-k \sin(ky') - k \cos(ky') \tan(k + \hat{\alpha})] \delta(\tan(k + \hat{\alpha}) + \mu k).$$

デルタ関数の性質を用いて  $k$  を書き換えれば,

$$\begin{aligned} S'_{\hat{\alpha}}(y' + 1) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk [\sin(ky') \tan(k + \hat{\alpha}) + \cos(ky') \tan^2(k + \hat{\alpha})] \delta(\tan(k + \hat{\alpha}) + \mu k) \\ &= -\frac{1}{\mu} S(y' + 1) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\cos(ky')}{\cos^2(k + \hat{\alpha})} \delta(\tan(k + \hat{\alpha}) + \mu k) \end{aligned} \quad (4.14)$$

となる. 右辺第 2 項を (4.6) のような複素積分の形に書いて考える. (4.10) で  $z = Re^{i\theta}$  と書くと,

$$\Im \hat{\alpha}(z) = \frac{1}{4} \log \frac{1 + \hat{\mu}^2 R^2 + 2\hat{\mu}R \sin \theta}{1 + \hat{\mu}^2 R^2 - 2\hat{\mu}R \sin \theta} \quad (4.15)$$

であるから,  $R \rightarrow \infty$  とすると  $\Im \hat{\alpha}(z) \rightarrow 0$  となる. したがって,  $y' < 2$  ならば, (4.14) の右辺第 2 項は 0 である.

ゆえに,  $S_{\hat{\alpha}}(y)$  は,  $1 < y < 3$  において微分方程式

$$\mu S'_{\hat{\alpha}}(y) = -S_{\hat{\alpha}}(y) \quad (4.16)$$

を満足する. 自由端モデルのときと同様に  $\lim_{y \rightarrow 1+0} S_{\hat{\alpha}}(y) = 1$  となると考えられるから,  $1 < y < 3$  に対し

$$S_{\hat{\alpha}}(y) = e^{-(y-1)/\mu} \quad (4.17)$$

が成り立つ.

しかし,  $y > 3$  のとき, 有限の  $\hat{\mu}$  に対しては漸化微分方程式が導けないので, これ以上進むのは困難である.

## 5 数学的モデル

### 5.1 問題の設定

錘モデルでは,  $\hat{\alpha}$  が  $k$  に依存するため, 解析がきわめて困難になる. そこで物理的バックグラウンドを諦め, 自由端モデルと固定端モデルを定数  $\alpha$  で内挿する数学的なモデルを構築することを考えよう. 単純な内挿では, 自由端モデルの  $\cos(k_n y)$  を  $\cos(k_n y + \alpha)$  に置き換えることが期待されるであろう. しかしそうすると,  $S_{\alpha}(y)$  の満たす漸化微分方程式がそれのみでは閉じなくなり,  $\sin(k_n y + \alpha)$  で定義した量との連立微分方程式を考えなければならなくなることがわかる. これを対角化すると  $e^{\mp i(k_n y + \alpha)}$  が出てくるので, 最初から指数関数を用いた式から出発す

ることにする。

すなわち、次の量を頭から定義する：

$$S_\alpha(y) \equiv \frac{\mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(k_n + \alpha)}{1 + \mu \cos^2(k_n + \alpha)} e^{i(k_n y + \alpha)}. \quad (5.1)$$

ただし、 $\mu$  は正の定数、 $\alpha$  は実の定数、 $y$  は実の変数である。和は方程式  $\tan(k_n + \alpha) = -\mu k_n$  のすべての解にわたる。これは固有値問題と結びつくかどうかかわからないが、「固有値方程式」と呼ぶことにする。定義から明らかに、

$$S_\alpha(-y) = e^{2i\alpha} S_\alpha^*(y) \quad (5.2)$$

が成り立つ (\*は複素共役)。また明らかに、 $S_\alpha(y)$  は  $\alpha$  について周期  $\pi$  をもつので、 $0 \leq \alpha < \pi$  だけ考えれば十分である。 $\alpha = 0$  の場合の実部が自由端モデル、 $\alpha = \pi/2$  の場合の実部が固定端モデルになる。これらの場合、虚部は恒等的に 0 であり、 $S_\alpha(y)$  は  $y$  の偶関数になる。

## 5.2 三角級数の総和

留数定理を使うと、 $\varepsilon$  を無限小正数とすると、

$$S_\alpha(y) = \frac{\mu}{2} \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\infty+i\varepsilon}^{-\infty+i\varepsilon} + \int_{-\infty-i\varepsilon}^{\infty-i\varepsilon} \right] dz \frac{e^{i(z y + \alpha)}}{\sin(z + \alpha) + \mu z \cos(z + \alpha)} \quad (5.3)$$

と書ける。

レンマ  $\sin(z + \alpha) + \mu z \cos(z + \alpha) = 0$  は非実の根を持たない。

[証明] この方程式を  $iz = \zeta$  とおいて書き直すと、

$$e^{2\zeta + 2\alpha i} = \frac{1 - \mu\zeta}{1 + \mu\zeta}. \quad (5.4)$$

この絶対値は  $\alpha$  に依存しないので、あとは自由端モデルのときと同じ推論が成り立つ。□

レンマにより、上の積分の被積分関数は実軸上以外に特異点をもたない。したがって、コーシーの定理により、 $C(R)$  を原点中心の半径  $R$  の円とすると、

$$S_\alpha(y) = \frac{\mu}{2} \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C(R)} dz \frac{e^{i(z y + \alpha)}}{\sin(z + \alpha) + \mu z \cos(z + \alpha)} \quad (5.5)$$

となる。被積分関数をオイラーの公式を用いて書き直す。上半面では

$$\frac{2e^{i[z(1+y)+2\alpha]}}{\mu z + i + (\mu z - i)e^{2i(z+\alpha)}}, \quad (5.6)$$

下半面では

$$\frac{2e^{-iz(1-y)}}{\mu z - i + (\mu z + i)e^{-2i(z+\alpha)}} \quad (5.7)$$



と書いてみればわかるように,  $|y| < 1$  ならば遠方では 0 になるから,  $|y| < 1$  に対し

$$S_\alpha(y) = 0 \quad (5.8)$$

となる.

$y = 1$  では, 被積分関数は上半面では 0, 下半面では  $2/(\mu R e^{i\theta})$  となるので,  $S_\alpha(1) = \frac{1}{2}$  であることがわかる. この値は, 不連続点  $y = 1$  の両側からの極限値の相加平均に等しいはずであるから,  $\lim_{y \rightarrow 1+0} S_\alpha(y) = 1$  であると考えられる.

次に  $y > 1$  を考察する. デルタ関数を用いると,

$$S_\alpha(y) = \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{i(ky+\alpha)}}{\cos(k+\alpha)} \delta(\tan(k+\alpha) + \mu k) \quad (5.9)$$

と表される.  $y = y' + 1$  ( $y' > 0$ ) とすると,

$$S_\alpha(y' + 1) = \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{iky'} [1 + i \tan(k + \alpha)] \delta(\tan(k + \alpha) + \mu k). \quad (5.10)$$

$y'$  で微分すれば,

$$S'_\alpha(y' + 1) = \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{iky'} ik [1 + i \tan(k + \alpha)] \delta(\tan(k + \alpha) + \mu k). \quad (5.11)$$

デルタ関数の性質を用いて因子  $k$  を書き換えれば,

$$\begin{aligned} S'_\alpha(y' + 1) &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{iky'} [i \tan(k + \alpha) + 1 - \sec^2(k + \alpha)] \delta(\tan(k + \alpha) + \mu k) \\ &= -\frac{1}{\mu} [S_\alpha(y' + 1) - R_\alpha(y' + 1)]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

ただし

$$R_\alpha(y' + 1) \equiv \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{iky'}}{\cos^2(k + \alpha)} \delta(\tan(k + \alpha) + \mu k) \quad (5.13)$$

とおいた. 半径無限大の円周を積分路とする複素積分に直すと, これは  $y' < 2$  ならば 0 であることがわかる. したがって,  $S_\alpha(y)$  は,  $1 < y < 3$  において微分方程式

$$\mu S'_\alpha(y) = -S_\alpha(y) \quad (5.14)$$

を満足する. ゆえに

$$S_\alpha(y) = c_0 e^{-(y-1)/\mu} \quad (5.15)$$

が成り立つ.

しかし  $y > 3$  へ進むには,  $R_\alpha(y)$  を計算しなければならない.  $y' > 2$  のとき,  $y' = y'' + 2$  とおくと,  $e^{iky'} = e^{iky''} e^{2ik}$  であるから,

$$\frac{e^{2ik}}{\cos^2(k + \alpha)} = e^{-2\alpha i} [1 + i \tan(k + \alpha)]^2 = e^{-2\alpha i} \left[ 2(1 + i \tan(k + \alpha)) - \frac{1}{\cos^2(k + \alpha)} \right] \quad (5.16)$$

と変形すればわかるように,

$$R_\alpha(y' + 1) = e^{-2\alpha i} [2S_\alpha(y'' + 1) - R_\alpha(y'' + 1)] \quad (5.17)$$

である.

(5.12) と (5.17) の結果を  $y$  に関する式として書くと,

$$\begin{aligned}\mu S'_\alpha(y) &= -S_\alpha(y) + R_\alpha(y) \\ \mu S'_\alpha(y-2) &= -S_\alpha(y-2) + R_\alpha(y-2) \\ R_\alpha(y) &= e^{-2\alpha i} [2S_\alpha(y-2) - R_\alpha(y-2)]\end{aligned}\quad (5.18)$$

となる. これから  $R_\alpha(y)$  と  $R_\alpha(y-2)$  を消去すれば,

$$\mu [S'_\alpha(y) + e^{-2\alpha i} S'_\alpha(y-2)] = -S_\alpha(y) + e^{-2\alpha i} S_\alpha(y-2) \quad (5.19)$$

という漸化微分方程式を得る. 自由端モデルのときと同様に, 区間  $2(n-j)+1 < y < 2(n-j)+3$  において,

$$S_\alpha(y-2j) \equiv e^{-2\alpha(n-j)i} \tilde{S}_{\alpha, n-j}([y-2j-2(n-j)-1]/\mu) \quad (5.20)$$

と書く.  $v = (y-2n-1)/\mu$  とするとき,

$$\tilde{S}'_{\alpha, n}(v) + \tilde{S}'_{\alpha, n-1}(v) = -\tilde{S}_{\alpha, n}(v) + \tilde{S}_{\alpha, n-1}(v) \quad (5.21)$$

となって, 自由端モデルのときの式 (2.27) に帰着する. したがって一般解は,  $2n+1 < y < 2n+3$  に対し

$$S_\alpha(y) = \sum_{k=0}^n c_k e^{-2\alpha(n-k)i} (-1)^{n-k} L_{n-k}(2(y-2(n-k)-1)/\mu) e^{-(y-2(n-k)-1)/\mu} \quad (5.22)$$

となる.

### 5.3 積分定数の決定

**命題** (5.22) に現れる積分定数  $c_n$  はすべて 1 に等しい.

**レンマ** 自由端モデルの運動量保存則 (2.39) と固定端モデルのそれ (3.8) を内挿して得られる式

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu} \int_0^1 dx [S_\alpha(t-x+1) + e^{-2\alpha i} S_\alpha(t+x-1)] \\ + S_\alpha(t+1) + e^{-2\alpha i} S_\alpha(t-1) + \frac{1-e^{-2\alpha i}}{\mu} \int_0^t dy S_\alpha(y) = 1\end{aligned}\quad (5.23)$$

が成立する.

**[証明]** この左辺  $Q(t)$  として, それを  $t$  で微分すれば,

$$\begin{aligned}Q'(t) &= \frac{1}{\mu} \int_0^1 dx [S'_\alpha(t-x+1) + e^{-2\alpha i} S'_\alpha(t+x-1)] \\ &\quad + S'_\alpha(t+1) + e^{-2\alpha i} S'_\alpha(t-1) + \frac{1-e^{-2\alpha i}}{\mu} S_\alpha(t).\end{aligned}\quad (5.24)$$

すなわち,

$$Q'(t) = \frac{1}{\mu} [S_\alpha(t+1) - e^{-2\alpha i} S_\alpha(t-1)] + S'_\alpha(t+1) + e^{-2\alpha i} S'_\alpha(t-1) \quad (5.25)$$

を得る. これは, 漸化微分方程式 (5.19) により 0 に等しい. つまり, (5.23) の左辺は  $t$  に依存しない. ゆえにそれは定数である. その定数を決定するために  $t \rightarrow +0$  とすると,  $|y| < 1$  において  $S_\alpha(y) = 0$  であったから, 生き残るのは  $\lim_{t \rightarrow +0} S_\alpha(t+1) = 1$  のみである. したがって, その値は 1 に等しい.  $\square$

(5.23) で  $t = 2n + 1$  とおくと,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu} \int_0^1 dx [S_\alpha(2n+2-x) + e^{-2\alpha i} S_\alpha(2n+x)] \\ & + S_\alpha(2n+2) + e^{-2\alpha i} S_\alpha(2n) + \frac{1 - e^{-2\alpha i}}{\mu} \int_0^{2n+1} dy S_\alpha(y) = 1 \end{aligned} \quad (5.26)$$

である. 前と同様に  $n$  に関する数学的帰納法を用いる.  $c_k = 1$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) として,  $c_n = 1$  を証明する.

まず (5.23) の最後の項の計算を行う.  $(y - 2(n-k) - 1)/\mu = v$  とおいて,

$$L_{n-k}(2v) = \sum_{m=0}^{n-k} (-1)^m \frac{2^m (n-k)!}{(m!)^2 (n-k-m)!} v^m \quad (5.27)$$

を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \int_0^{2n+1} dy S_\alpha(y) &= \sum_{k=1}^n \int_0^{2k/\mu} dv e^{-2\alpha i(n-k)} (-1)^{n-k} L_{n-k}(2v) e^{-v} \\ &= \sum_{k=1}^n e^{-2\alpha i(n-k)} (-1)^{n-k} \sum_{m=0}^{n-k} \frac{(-1)^m 2^m (n-k)!}{(m!)^2 (n-k-m)!} \int_0^{2k/\mu} dv v^m e^{-v} \end{aligned} \quad (5.28)$$

となる.

$$\tilde{I}_m^{(k)} \equiv \int_0^{2k/\mu} dv v^m e^{-v} = -\left(\frac{2k}{\mu}\right)^m e^{-2k/\mu} + m \tilde{I}_{m-1}^{(k)}, \quad (5.29)$$

ただし

$$\tilde{I}_0^{(k)} = 1 - e^{-2k/\mu} \quad (5.30)$$

であるから,

$$\tilde{I}_m^{(k)} = m! - \sum_{j=0}^m \frac{m!}{j!} \left(\frac{2k}{\mu}\right)^j e^{-2k/\mu}. \quad (5.31)$$

を得る.

$m$  の和と  $j$  の和の順序を入れ替えれば,

$$\begin{aligned}
& \frac{1 - e^{-2\alpha i}}{\mu} \int_0^{2n+1} dy S_\alpha(y) \\
&= (1 - e^{-2\alpha i}) \sum_{k=1}^n e^{-2\alpha i(n-k)} (-1)^{n-k} \sum_{m=0}^{n-k} \frac{(-1)^m 2^m (n-k)!}{m!(n-k-m)!} \left[ 1 - \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \left( \frac{2k}{\mu} \right)^j e^{-2k/\mu} \right] \\
&= (1 - e^{-2\alpha i}) \sum_{k=1}^n \left[ e^{-2\alpha i(n-k)} - e^{-2\alpha i(n-k)} \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{m=j}^{n-k} \frac{(-1)^{n-k-m} 2^m (n-k)!}{m!(n-k-m)! j!} \left( \frac{2k}{\mu} \right)^j e^{-2k/\mu} \right] \\
&= 1 - e^{-2\alpha i n} - (1 - e^{-2\alpha i}) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{1}{j!} \left( \frac{2k}{\mu} \right)^j e^{-2\alpha i(n-k)} M_j^{(n-k)} e^{-2k/\mu} - (1 - e^{-2\alpha i}) e^{-2n/\mu}
\end{aligned} \tag{5.32}$$

となる. ただし,  $M_j^{(\nu)}$  は (2.51) で与えられる.

(5.23) の残りの 4 項は, 自由端モデルでの計算において相因子を変更しただけのものであるから, 結果だけを書くと,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu} \int_0^1 dx S_\alpha(2n+2-x) &= e^{-2\alpha i n} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{1}{j!} \left( \frac{2k}{\mu} \right)^j e^{-2\alpha i(n-k)} M_j^{(n-k)} e^{-2k/\mu} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{1}{j!} \left( \frac{2k+1}{\mu} \right)^j e^{-2\alpha i(n-k)} M_j^{(n-k)} e^{-(2k+1)/\mu} + (e^{-2n/\mu} - e^{-(2n+1)/\mu}) c_n,
\end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-2\alpha i}}{\mu} \int_0^1 dx S_\alpha(2n+x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{1}{j!} \left( \frac{2k+1}{\mu} \right)^j e^{-2\alpha i(n-k)} M_j^{(n-k-1)} e^{-(2k+1)/\mu} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{1}{j!} \left( \frac{2k+2}{\mu} \right)^j e^{-2\alpha i(n-k)} M_j^{(n-k-1)} e^{-(2k+2)/\mu},
\end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned}
S_\alpha(2n+2) &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\alpha i(n-k)} \left[ \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{n-k-j} \frac{2^j (n-k)!}{(j!)^2 (n-k-j)!} \left( \frac{2k+1}{\mu} \right)^j \right] e^{-(2k+1)/\mu} \\
&\quad + e^{-(2n+1)/\mu} c_n, \\
e^{-2\alpha i} S_\alpha(2n) &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\alpha i(n-k)} \left[ \sum_{j=0}^{n-k-1} (-1)^{n-k-j-1} \frac{2^j (n-k-1)!}{(j!)^2 (n-k-j-1)!} \left( \frac{2k+1}{\mu} \right)^j \right] e^{-(2k+1)/\mu}
\end{aligned} \tag{5.35}$$

となる.

以上の 5 項を合計する. まず, (5.34) の第 2 項の  $k$  を 1 だけずらして

$$-e^{-2\alpha i} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{1}{j!} \left( \frac{2k}{\mu} \right)^j e^{-2\alpha i(n-k)} M_j^{(n-k)} e^{-2k/\mu} - e^{-2\alpha i} e^{-2n/\mu} \tag{5.36}$$

と書き直してみればわかるように,  $e^{-2k/\mu}$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ) の係数は, (5.33), (5.36), (5.32) からそれぞれ  $1$ ,  $-e^{-2\alpha i}$ ,  $-(1 - e^{-2\alpha i})$  に比例した寄与があるので, 合計すればすべて 0 である. また,  $e^{-(2k+1)/\mu}$  ( $0 \leq k \leq n-1$ ) の係数は, 自由端モデルの (2.58) で考えた  $K_{n-k}$  の  $e^{-2\alpha i(n-k)}$

倍に一致する。  $K_{n-k} = 0$  であったから、今の数学的モデルでも 0 である。

以上から、

$$e^{-2\alpha in} + (e^{-2n/\mu} - e^{-(2n+1)/\mu})c_n - e^{-2\alpha i}e^{-2n/\mu} + e^{-(2n+1)/\mu}c_n + 1 - e^{-2\alpha in} - (1 - e^{-2\alpha i})e^{-2n/\mu} = 1 \quad (5.37)$$

を得る。したがって  $c_n = 1$  でなければならない。□

この結果により、任意の  $y > -1$  に対し、

$$S_\alpha(y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{(\pi-2\alpha)in} L_n(2(y-2n-1)/\mu) e^{-(y-2n-1)/\mu} \theta(y-2n-1) \quad (5.38)$$

となることがわかる。とくに、 $\alpha = 0$  または  $\alpha = \pi/2$  の場合は虚部は 0 であるが、これは虚部が固有値について奇関数であることから自明である。

終わりに、(5.23) の左辺が  $t$  に依存しないことを級数表示からも証明できることを見ておこう。

$$S_\alpha(y) = \frac{\mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(k_n + \alpha)}{1 + \mu \cos^2(k_n + \alpha)} e^{i(k_n y + \alpha)} \quad (5.39)$$

を (5.23) の左辺に代入すると、

$$Q(t) = \frac{\mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(k_n + \alpha)}{1 + \mu \cos^2(k_n + \alpha)} R_n(t) \quad (5.40)$$

となる。ここに

$$\begin{aligned} R_n(t) &\equiv \frac{1}{\mu} \int_0^1 dx \{ e^{i[k_n(t+x)+\alpha]} + e^{i[k_n(t-x)-\alpha]} \} \\ &\quad + e^{i[k_n(t+1)+\alpha]} + e^{i[k_n(t-1)-\alpha]} + \frac{1}{\mu} \int_0^t dy [e^{i(k_n y + \alpha)} + e^{i(k_n y - \alpha)}] \\ &= \frac{1}{i\mu k_n} [e^{i(k_n t + k_n + \alpha)} - e^{i(k_n t + \alpha)} - e^{i(k_n t - k_n - \alpha)} + e^{i(k_n t - \alpha)}] \\ &\quad + e^{i(k_n t + k_n + \alpha)} + e^{i(k_n t - k_n - \alpha)} + \frac{1}{i\mu k_n} [e^{i(k_n t + \alpha)} - e^{i\alpha} - e^{i(k_n t - \alpha)} + e^{i\alpha}] \\ &= \frac{2}{\mu k_n} \sin(k_n + \alpha) e^{ik_n t} + 2 \cos(k_n + \alpha) e^{ik_n t} - \frac{2}{\mu k_n} \sin \alpha \end{aligned} \quad (5.41)$$

である。固有値方程式  $\tan(k_n + \alpha) = -\mu k_n$  を使うと、

$$R_n(t) = \frac{2 \sin \alpha}{\tan(k_n + \alpha)} \quad (5.42)$$

となる。したがって、

$$Q(t) = \mu \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2(k_n + \alpha)}{1 + \mu \cos^2(k_n + \alpha)} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(k_n + \alpha)} \quad (5.43)$$

という  $t$  に無関係な式になる。そして (5.23) から、この級数の和は 1 に等しいという結果が得られることになる。

$\alpha = 0$  の場合は、固有値  $k_0 = 0$  が存在するのでその寄与のみが生き残り、この和公式はトリヴィアルな式になる。ただし直接  $\alpha = 0$  とおけないので、 $\alpha \rightarrow 0$  を考えなければならない：

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\sin(k_0 + \alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{dk_0/d\alpha + 1} = \frac{1 + \mu}{\mu}. \quad (5.44)$$

ここで固有値方程式から得られる  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} dk_0/d\alpha = -1/(1 + \mu)$  を用いた。

$\alpha = \pi/2$  の場合は、固定端モデルでの和公式

$$\mu \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 k_n}{(1 + \mu \sin^2 k_n) \cos k_n} = 1 \quad (5.45)$$

が得られる。固有関数系の完全性を仮定すれば、これは 1 の固有関数による展開式に他ならないことが示せる。

### 付録

ここで、これまでに挙げた数式を数值的に計算しグラフ化したものを提示する。

まず、図 1、図 2 は、第 2 節で論じた自由端モデルの場合の三角級数 (2.8) で表わされる  $S(y)$  について、固有値  $k_i$  の値を正負とも 400 個ずつ計 800 個の値を求めて和をとり、グラフ化し、さらにその上から (2.65) で表わされる  $S(y)$  を実線で描いたものである。

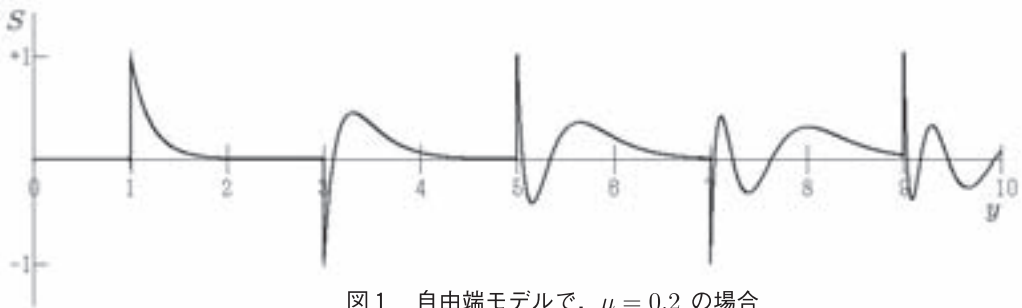


図 1 自由端モデルで、 $\mu = 0.2$  の場合

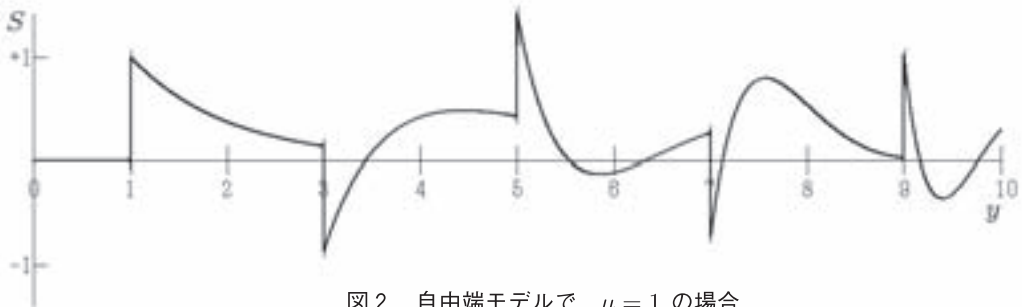


図 2 自由端モデルで、 $\mu = 1$  の場合

$\mu = 0.2$  の場合の図 1、 $\mu = 1$  の場合の図 2 とも、初めに (2.8) を基にして描いたものと (2.65) を基にして描いたものが、ピッタリと重なっているのがわかる。図 1 からは、 $y = 1, 3, 5, 7, 9$  のところで  $+1$  と  $-1$  が交互に現れるジャンピングが起り、それらの場所から、0 次、1 次、2 次、3 次のラグール多項式が現れているのがよく見てとれる。図 2 では  $\mu$  の値を大きくしたために、ラグール多項式の間隔が伸びているが、前の段階で発生したラグールがつぎの段階でもそ

のまま生き伸びているのがわかる。このときのジャンピング量も  $+1$ ,  $-1$  であることに変わりはない。

つぎの図3, 図4は第3節で論じた固定端モデルの場合で, 前と同様に (3.1) に基づいた  $\hat{S}(y)$  のグラフと (3.9) に基づいた  $\hat{S}(y)$  のグラフを重ねたものである。この場合のジャンピング量はつねに  $+1$  である。

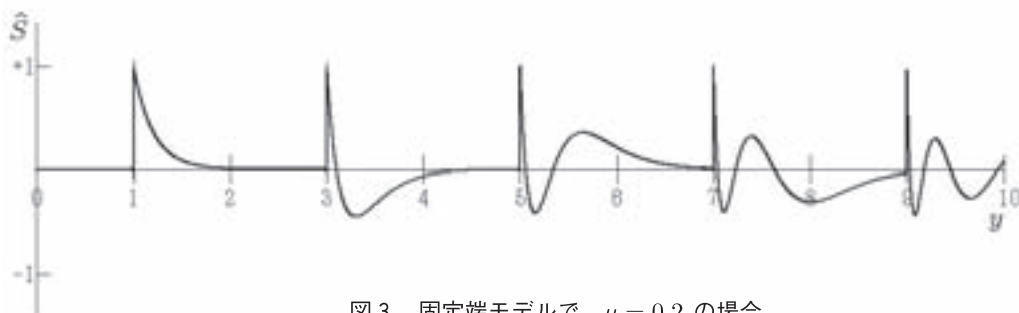


図3 固定端モデルで,  $\mu = 0.2$  の場合

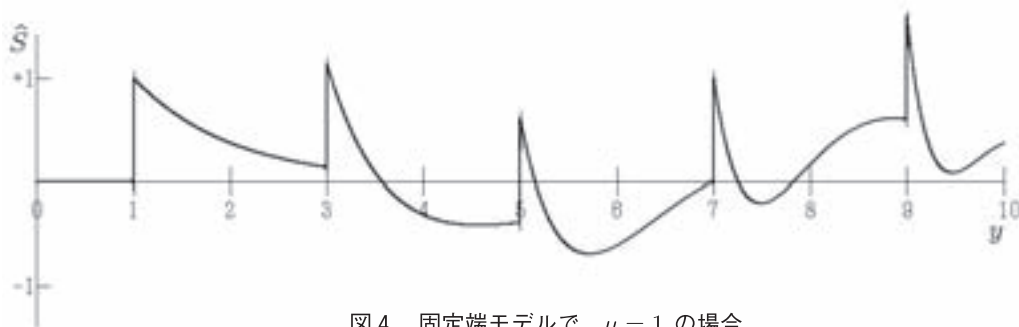


図4 固定端モデルで,  $\mu = 1$  の場合

つぎの図5, 図6は第5節の数学的モデルに基づくもので, (5.1) で表される  $S_\alpha(y)$  の実部を実線で, 虚部を点線で表わし, さらに (5.38) で表される  $S_\alpha(y)$  の実部, 虚部を重ねて描いたものである。この場合も級数表示の式とラゲール多項式で表わされる式とがピッタリと一致していることがわかる。この場合の  $\alpha$  の値は両図とも  $\alpha = \pi/4$  とした。これらの図では, 実部と虚部が交互に, 0次, 1次, 2次, ... のラゲール多項式を発生させているのがわかる。

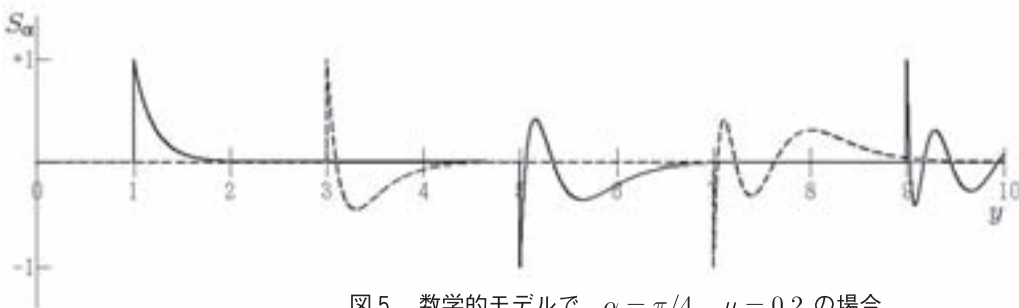


図5 数学的モデルで,  $\alpha = \pi/4$ ,  $\mu = 0.2$  の場合

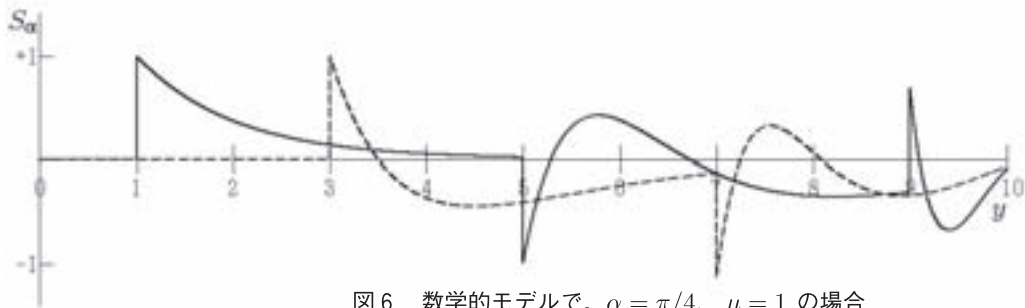


図6 数学的モデルで、 $\alpha = \pi/4$ ,  $\mu = 1$  の場合

### 参考文献

- 1) John S. Rinehart, Some Quantitative Data Bearing on the Scabbing of Metals under Explosive Attack, Journal of Applied Physics, Vol.22, No.5, May 1951
- 2) 別府万寿博, 三輪幸治, 大野友則, 塩見昌紀: 鋼製剛飛翔体の高速衝突を受けるコンクリート板の局部破壊に関する実験的研究, 土木学会論文集, Vol.63, N0.1, pp.178-191, 2007.
- 3) 別府万寿博, 三輪幸治, 伊東雅晴, 片山雅英, 大野友則: 剛飛翔体の高速衝突を受けるコンクリート板の局部破壊発生メカニズムに関する数値解析的検討, 構造工学論文集, Vol.53A, pp.1293-1304, 2007.
- 4) 世戸憲治, 野中泰二郎: 無限に広い弾性板の衝撃問題について, 北海学園大学工学部研究報告, 第 39 号, 2012.
- 5) 世戸憲治, 野中泰二郎: 裏面剥離の 1 次元モデル, 北海学園大学工学部研究報告, 第 40 号, 2013. 発表予定