

タイトル	FFT による 2 次元画像の非整数次積分処理 ( ) : 2 次元積分
著者	魚住, 純; 鈴木, 宏司; Uozum, Jun; Suzuki, Koji
引用	工学研究 : 北海学園大学大学院工学研究科紀要(11): 77-86
発行日	2011-09-30

# FFT による 2 次元画像の非整数次積分処理 (II)

## — 2 次元積分 —

魚 住 純\*・鈴木 宏 司\*\*

Fractional integral processing of two-dimensional images by means of FFT (II)  
— Two-dimensional integrals —

Jun Uozumi\* and Koji Suzuki\*\*

### 1. はじめに

画像に対する微分処理は、エッジ検出や画像鮮鋭化などを目的に利用例が多いのに対して<sup>1)</sup>、積分演算は画像処理にはあまり用いられていない。これは、1 回の積分が、画像に対して大域的で大きな構造的変化をもたらすことによるものと考えられる。この問題は、比較的小さな積分効果を期待できる非整数次積分を画像に応用することにより、回避することができると考えられる。このような観点から、前報<sup>2)</sup>では、2 次元画像に対するその一つの軸方向に沿った非整数積分の効果について考察を行った。

本論文は、前報の結果に基づいて、2 次元画像に対する 2 次元の非整数次積分を提案し、その効果について考察を行うことを目的としている。

### 2. 非整数次積分と非整数次絶対積分

前報<sup>2)</sup>と同様、関数  $f(x)$  の Riemann-Liouville の積分<sup>3,4)</sup> から導出されるフーリエ逆変換表示

$$I_x^\nu f(x) = \mathcal{F}^{-1}[(i2\pi\xi)^{-\nu} F(\xi)] \quad (1)$$

に基づいた非整数次積分を考える<sup>5)</sup>。ここで、 $I_x^\nu$  は、変数  $x$  による  $\nu$  次の積分演算子である。この式は、非整数次積分  $I_x^\nu f(x)$  がフーリエ空間におけるフィルタ関数

$$H_0(\xi, \nu) = (i2\pi\xi)^{-\nu} \quad (2)$$

による空間周波数フィルタリング処理であることを表している。しかし、このフィルタ関数は、 $\nu > 0$  において原点で発散し、数値的評価には適さないことから、この発散を取り除いた近似式として、

$$H(\xi, \nu) = c(\xi, \nu) H_a(\xi, \nu), \quad (3)$$

$$c(\xi, \nu) = \begin{cases} [i \operatorname{sign}(\xi)]^{-\nu} & ; \xi \neq 0, \\ (i)^{-\nu} \frac{1 + (-1)^{-\nu}}{2} & ; \xi = 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$H_a(\xi, \nu) = (2\pi)^{-\nu} \left[ 1 + \left( \frac{|\xi|}{R} \right)^2 \right]^{-\frac{\nu}{2}} \quad (5)$$

を用い、

$$I_x^\nu f(x) = \mathcal{F}^{-1}[H(\xi, \nu) F(\xi)] \quad (6)$$

により非整数次積分を求める。

また、式(3)から位相因子  $c(\xi, \nu)$  を除いた関数  $H_a(\xi, \nu)$  をフィルタ関数に用いることにより、非整数次絶対積分

$$I_{|x|}^\nu f(x) = \mathcal{F}^{-1}[H_a(\xi, \nu) F(\xi)] \quad (7)$$

を定義する。

前報<sup>2)</sup>では、式(6)および(7)を 2 次元画像  $f(x, y)$  に拡張したものとして、 $x$  方向の非整数次積分および非整数次絶対積分

\* 北海学園大学大学院工学研究科電子情報工学専攻

Graduate School of Engineering (Electronics and Information Eng.), Hokkai-Gakuen University

\*\* 北海学園大学工学部電子情報工学科

Faculty of Engineering (Electronics and Information Eng.), Hokkai-Gakuen University

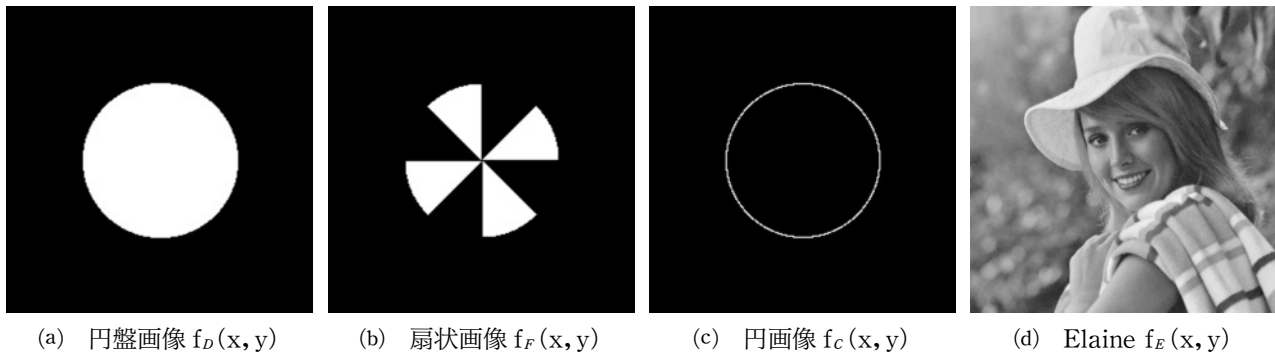


図 1 非整数次積分処理に用いた原画像

$$I_x^\nu f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[H(\xi, \nu)F(\xi, \eta)], \quad (8)$$

$$I_{|x|}^\nu f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[H_a(\xi, \nu)F(\xi, \eta)] \quad (9)$$

について調べた。

本論文では、これらの 1 次元非整数次積分および非整数次絶対積分を 2 次元の積分へ拡張する。それにはいくつかの異なる方法が考えられることから、次節以降では、それらを順番に考察する。

### 3. 乗法型非整数次積分

1 次元積分を 2 次元積分に拡張する最も自然な方法は、通常の積分法における  $x$  と  $y$  による逐次積分、あるいはそれと同等な演算としての 2 重積分であろう。したがって、非整数次積分の場合には、 $x$  の積分次数  $\nu$  と  $y$  の積分次数  $\mu$  が一般に異なるものとして、2 次元積分

$$\begin{aligned} I_{xy}^{\nu\mu} f(x, y) &= I_x^\nu I_y^\mu f(x, y) \\ &= \mathcal{F}^{-1}[H(\xi, \nu)H(\eta, \mu)F(\xi, \eta)] \end{aligned} \quad (10)$$

を考えることができる。これは、2 つの空間周波数フィルタが積の形で適用されることから、乗法型非整数次積分と呼ぶことにする。なお、いま対象としている関数は、振る舞いが素直な画像であることから、式(10)において、 $x$  と  $y$  の積分の実行順序は特に区別しないものとする。

前報<sup>2)</sup>では、図 1 に示す 2 値の円盤画像  $f_D(x, y)$ 、扇状画像  $f_F(x, y)$ 、円画像  $f_C(x, y)$ 、および標準画像の Elaine  $f_E(x, y)$  を用いた。本論文でも、この 4 つの画像を用いて積分の特性を考察する。

まず、円盤画像  $f_D(x, y)$  に式(10)を適用した結果の線形濃度表示および絶対濃度表示を図 2 に示す。ただし、次数は  $\nu = \mu$  とした。

前報<sup>2)</sup>の図 5 では、 $\nu = 0.5$  において、画像中の

高濃度の部分が  $x$  の正の方向に擦れたように延びる平滑化効果が現れた、図 2 (a)では、それが  $x$  と  $y$  方向に延びており、その効果が重なり合った結果、円盤の右上の濃度は 1 次積分に近い濃度分布となっている。

前報の図 5 (d)に示した 1 次元の 1 次積分では、左右反対称の濃度分布が生じているが、図 2 (b)では、 $-45^\circ$ の線を中心とする対称な濃度分布が生じており、これも  $x$  および  $y$  方向の積分の相乗効果によるものであると考えられる。また、 $\nu = 1$  の絶対濃度表示では、零強度を示す黒い領域が円盤を 4 分割しており、1 次元積分に見られる 1 次積分の特徴を保持している。

$\nu = 1.5$  の場合の濃度分布は、1 次元積分の場合とは背景部の濃度において大きく異なっており、 $\nu = 3$  の 1 次元積分の場合に近いように思われる。 $\nu = 2$  の濃度分布も、その 2 倍の次数である  $\nu = 4$  の 1 次元積分に近い濃度分布になっているものと思われる。

図 3 は、扇状画像  $f_F(x, y)$  に対する乗法的非整数次積分の結果である。次数  $\nu = 0.5$  および 1 では、前報の図 7 に示した 1 次元積分の特徴を概ね保持し、それが  $x$  および  $y$  方向に現れている。特に  $\nu = 1$  においては、絶対濃度表示において零濃度の黒線が明確に現れている。 $\nu$  が 1.5 および 2 と大きくなると、強い平滑化作用のため、円盤画像の場合に類似した濃度分布になっており、 $\nu = 1.5$  では同次数の 1 次元積分とは大きく異なった濃度分布が形成されている。また  $\nu = 2$  では、 $\nu = 4$  の 1 次元積分に近い濃度分布になっている。

円画像  $f_C(x, y)$  に対する処理結果を図 4 に示す。線画像に対する乗法的 2 次元積分は、1 次元積分の場合とは大きく異なる濃度分布が形成されている。これは、2 次元積分では、一つの方向への積分による平滑化効果によって線状の高濃度領

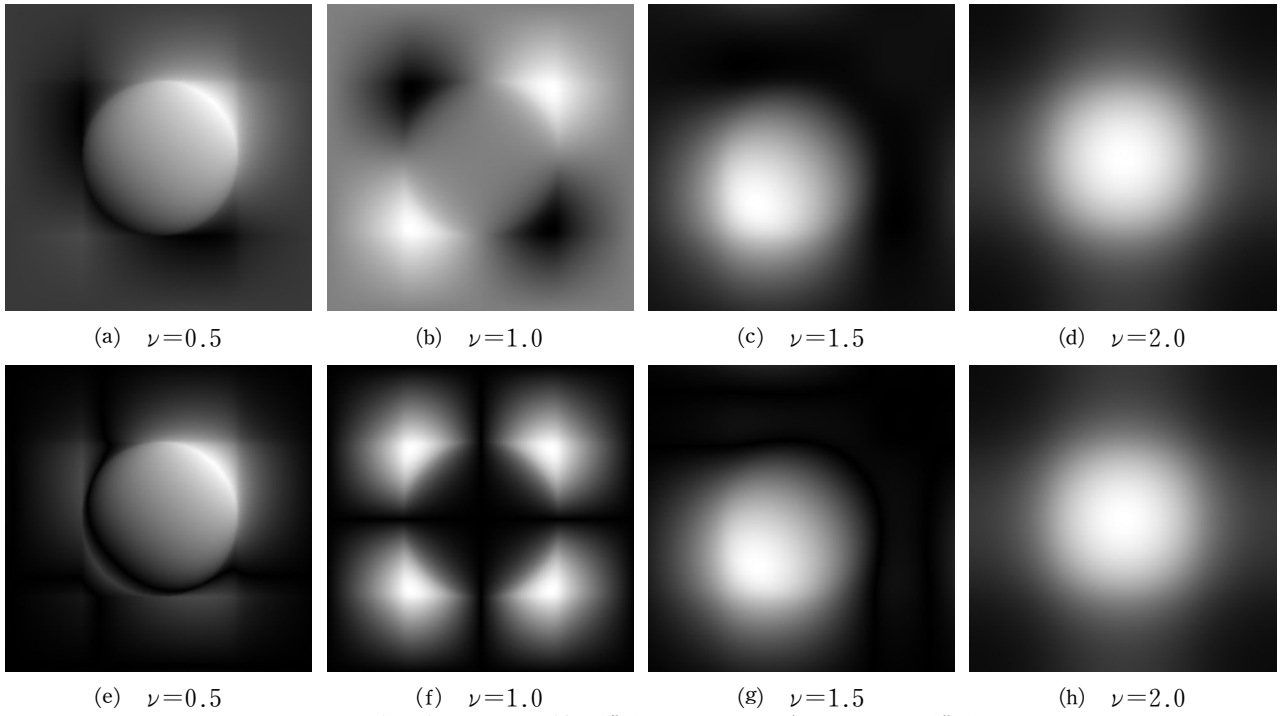


図2  $I_{xy}^\nu f_D(x, y)$ の(a)–(d)線形濃度表示, および(e)–(h)絶対濃度表示

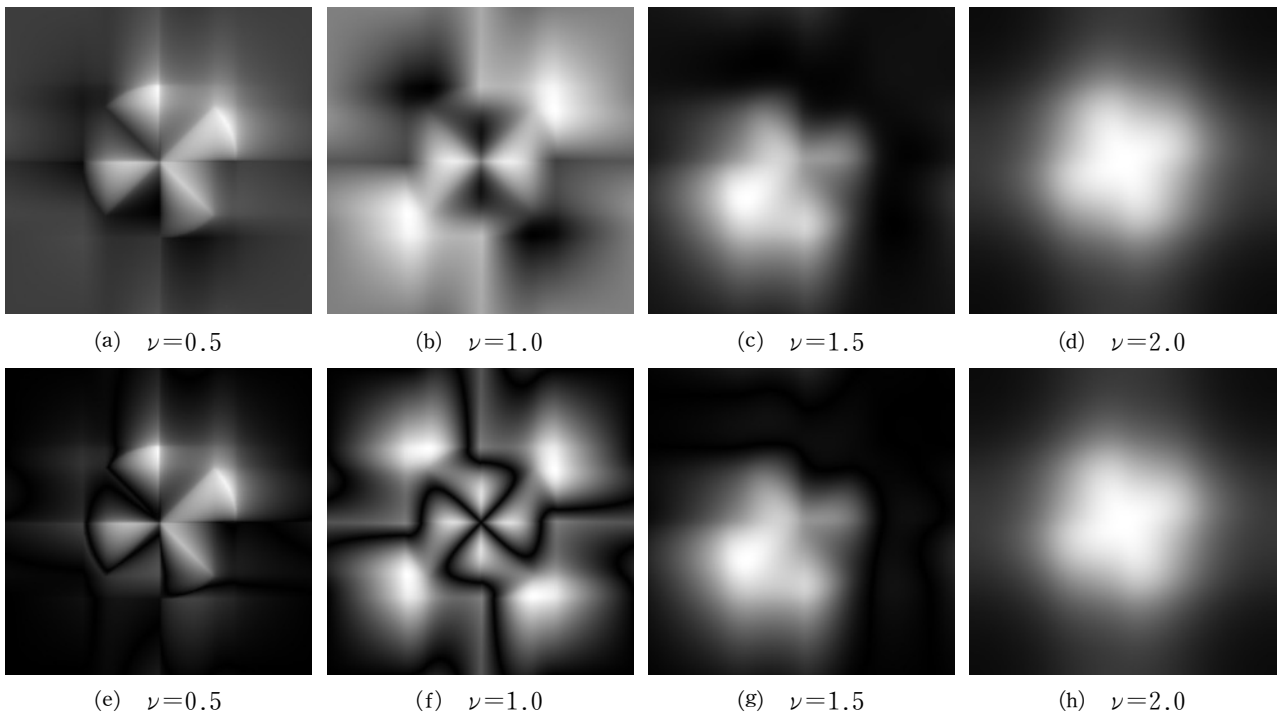


図3  $I_{xy}^\nu f_F(x, y)$ の(a)–(d)線形濃度表示, および(e)–(h)絶対濃度表示

域が押し広げられ,一定の面積を持つようになり,それがもう一つの方向に積分されることにより,広い高濃度領域を持つ画像に対する積分に類似した効果が生じたものと解釈できる.このため,円画像の2次元積分では,1次元積分の場合よりも $\nu$ の値に依存して大きく変化する特徴的な画像が

生じている.

最後に,標準画像 Elaine  $f_E(x, y)$ に対する乗法型非整数次積分の結果を図5に示す.自然画像の積分処理においては,原画像の特徴を大きく損なう程の高い次数を用いることはあまり意味がないと考えられることから,ここでは0.1次から0.75

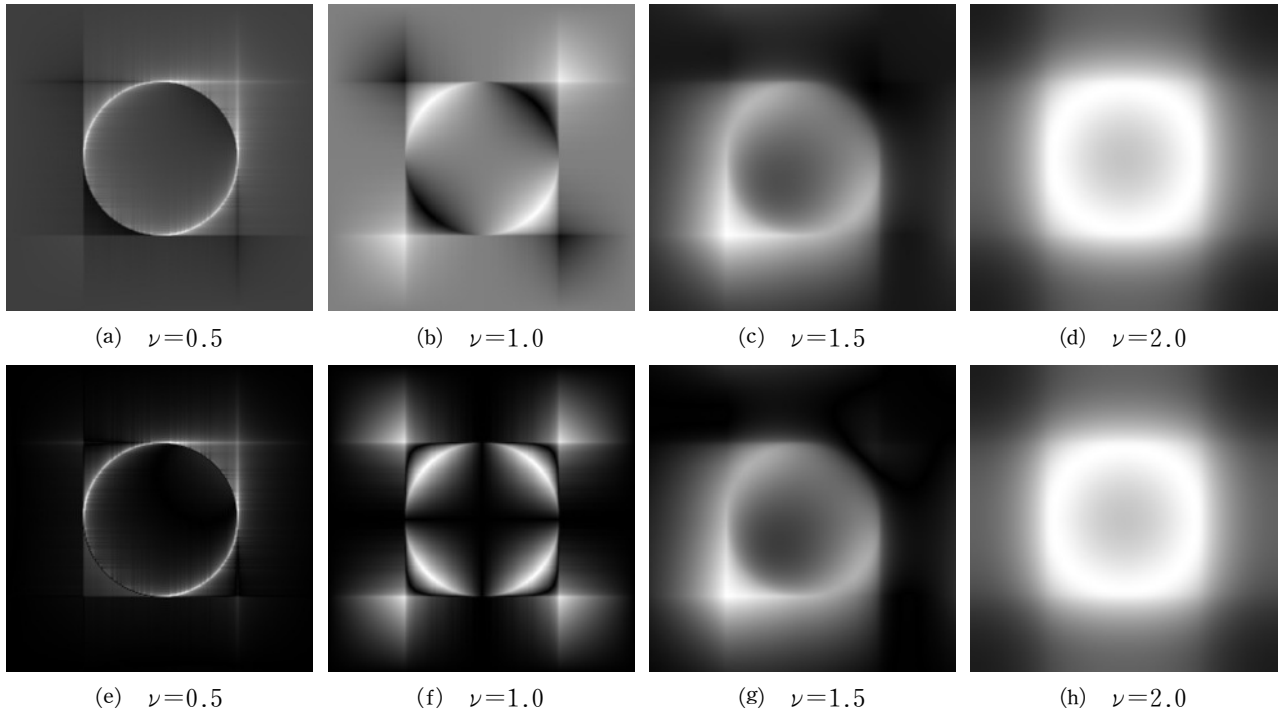


図4  $I_{xy}^{\nu} f_c(x, y)$  の (a)–(d) 線形濃度表示, および (e)–(h) 絶対濃度表示

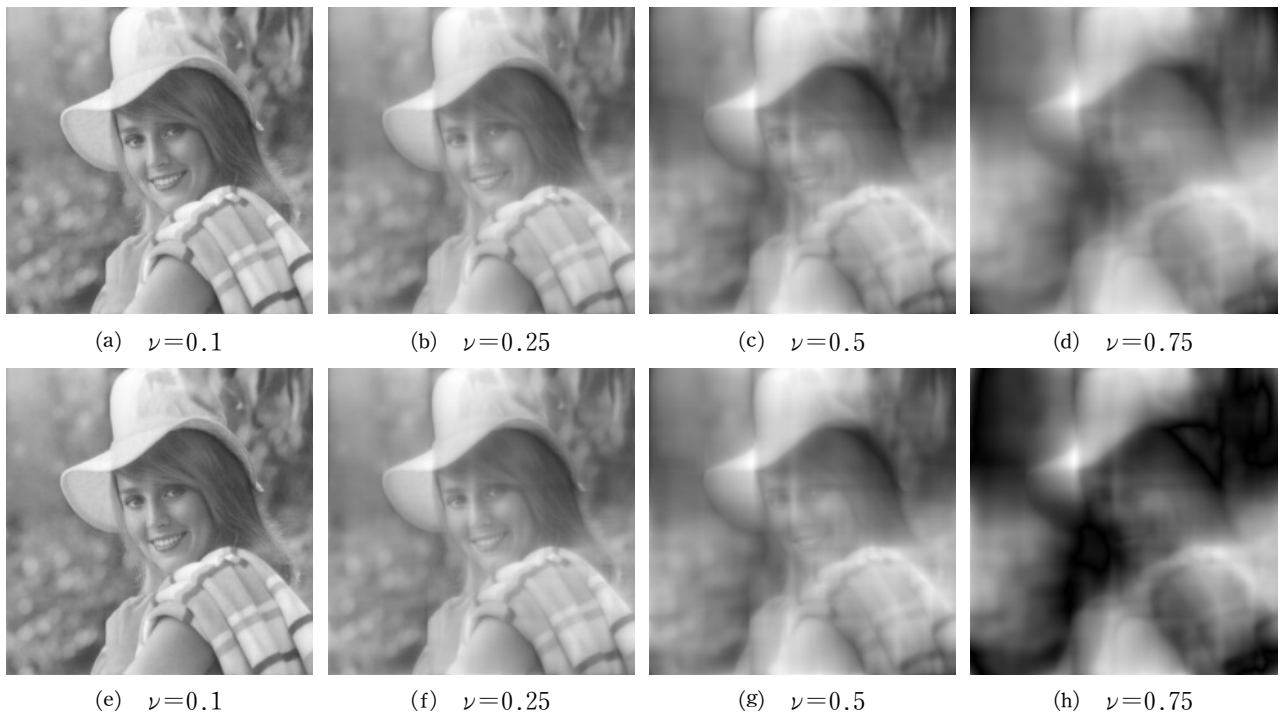


図5  $I_{xy}^{\nu} f_E(x, y)$  の (a)–(d) 線形濃度表示, および (e)–(h) 絶対濃度表示

次までの結果を示した。前報の図10に示した1次元積分の場合と比較すると、同じ次数の2次元積分は  $x$  および  $y$  方向に積分されるために、より強い平滑化がなされているといえる。

しかし、自然画像においても、他の幾何学的画像の場合と同様、 $x$  と  $y$  という特定の2方向に延

びる平滑化効果が現れることがわかる。

#### 4. 加法型非整数次積分

前節で取り上げた乗法型積分では、 $x$  方向と  $y$  方向の積分による効果が相乗的に重なることによ

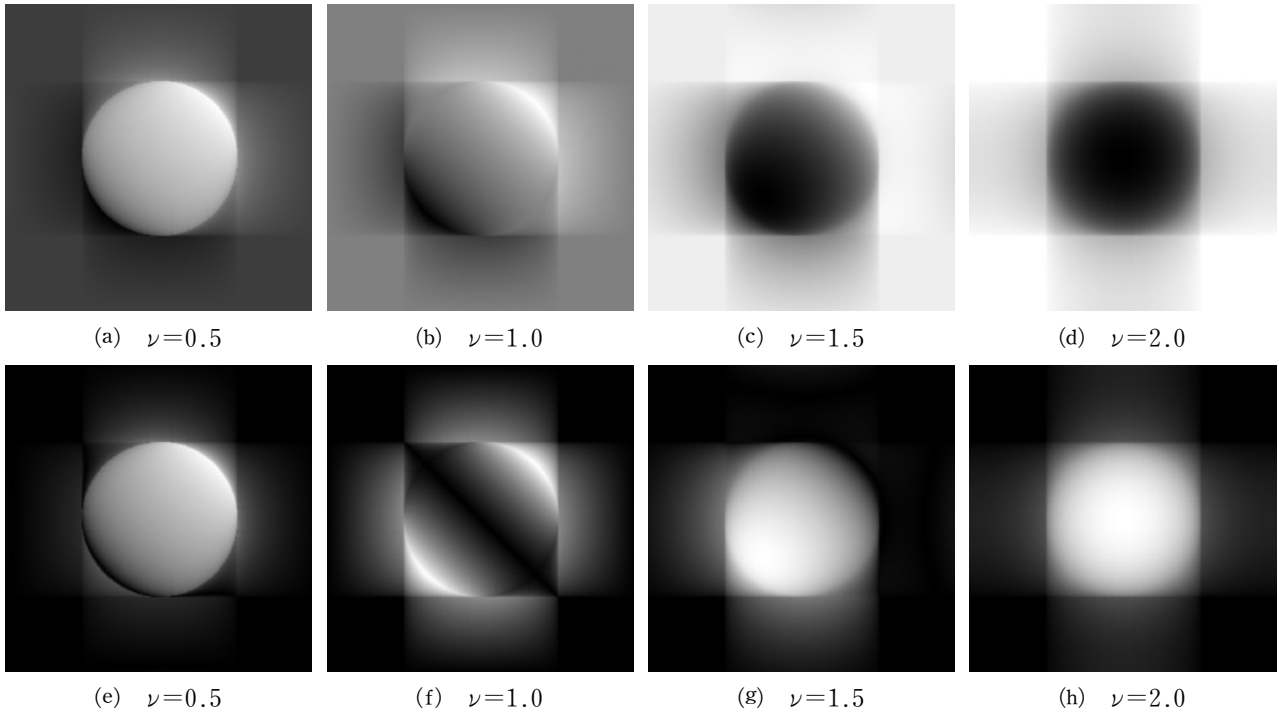


図6  $I_{x+y}^\nu f_D(x, y)$ の(a)–(d)線形濃度表示, および(e)–(h)絶対濃度表示

り, 同じ次数の1次元積分に比較して, より強い積分効果が生じ, 1次元積分の結果とは大きく異なる構造の変化が生じる傾向があることを見た. このような大きな変化を避ける一つの方法として,  $x$ による積分と $y$ による積分を加法的に結合する方法が考えられる. そこで, 加法型非整数次積分として

$$\begin{aligned}
 I_{x+y}^\nu f(x, y) &= (I_x^\nu + I_y^\nu) f(x, y) \\
 &= \mathcal{F}^{-1}[\{H(\xi, \nu) + H(\eta, \mu)\} F(\xi, \eta)] \\
 &= \mathcal{F}^{-1}[H(\xi, \nu) F(\xi, \eta)] \\
 &\quad + \mathcal{F}^{-1}[H(\eta, \mu) F(\xi, \eta)] \tag{11}
 \end{aligned}$$

を定義する.

この加法型非整数次積分処理を円盤画像  $f_D(x, y)$  に適用した結果を図6に示す. この図に見られるように, 加法型積分では,  $x$  と  $y$  の両方向の積分による平滑化の効果が予想どおり加算的に現れている. その結果, 各次数における加法型積分の結果は, 同じ次数の1次元積分の特徴を良く保持しており, その意味で1次元積分から2次元への自然な拡張になっているといえる.

その一方で,  $x, y$  各方向の1次元積分の特徴を残していることから, 画像全体に十字型の構造が生じており, 積分方向に依存した特徴が, 乗法型積分よりも強く現れることがわかる.

加法型の微積分演算の中で, 2次の加法型微分

演算はラプラシアンに等しく, 等方的な微分演算子となる. しかし, それを一般次数に拡張した加法型非整数次微分では, 等方性は失われ, 明らかな異方性が見られる<sup>6)</sup>. 加法型積分においては, フィルタ関数の形から明らかなように,  $\nu=2$  の場合を含め全ての  $\nu$  において, その演算は非等方的である.

加法型非整数次積分を扇状画像  $f_F(x, y)$  に施して得られた結果を図7に示す. 円盤画像に対する演算結果よりも複雑ではあるが, 前報の図7に示した1次元非整数次積分を  $x$  および  $y$  方向に生成して加算した結果となっていることが確認できる. その結果として, 水平および垂直の2方向に顕著な平滑化が生じている.

図8に示した円画像  $f_C(x, y)$  に対する加法型非整数次積分の結果では, 線画像に対する1次元積分の特徴がよく保持されている. そのため, 同じ画像に対する乗法型非整数次積分とは大きく異なる結果となっている.

最後に, 標準画像  $f_E(x, y)$  に対する処理結果を図9に示す. この図では, 図5の乗法型積分の場合と同様, 比較的低次の積分結果のみを掲載してある. 両者を比較してみると, 幾何学的画像に対する処理結果と同様, 同じ次数の積分では, 乗法型の方が加法型に比べてより強い平滑化が行われ, 実質的により高次の積分に相当していること

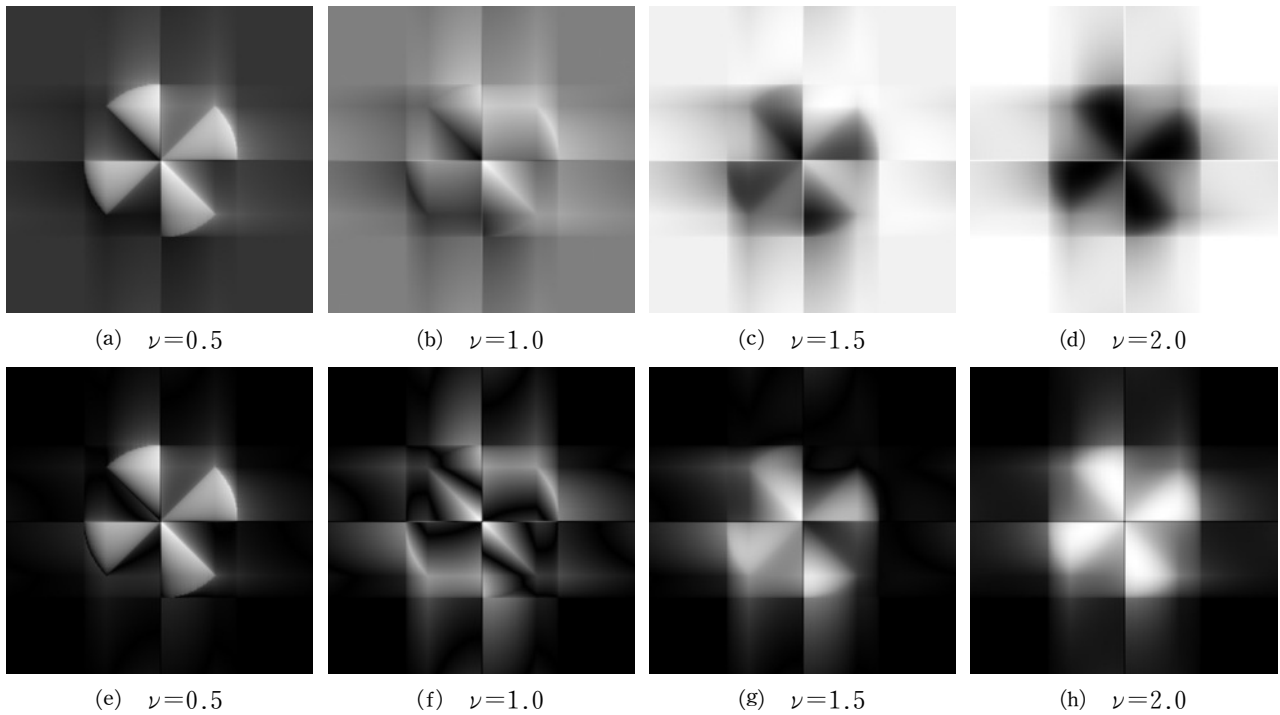


図 7  $I_{x+y}^\nu f_F(x, y)$  の (a)–(d) 線形濃度表示, および (e)–(h) 絶対濃度表示

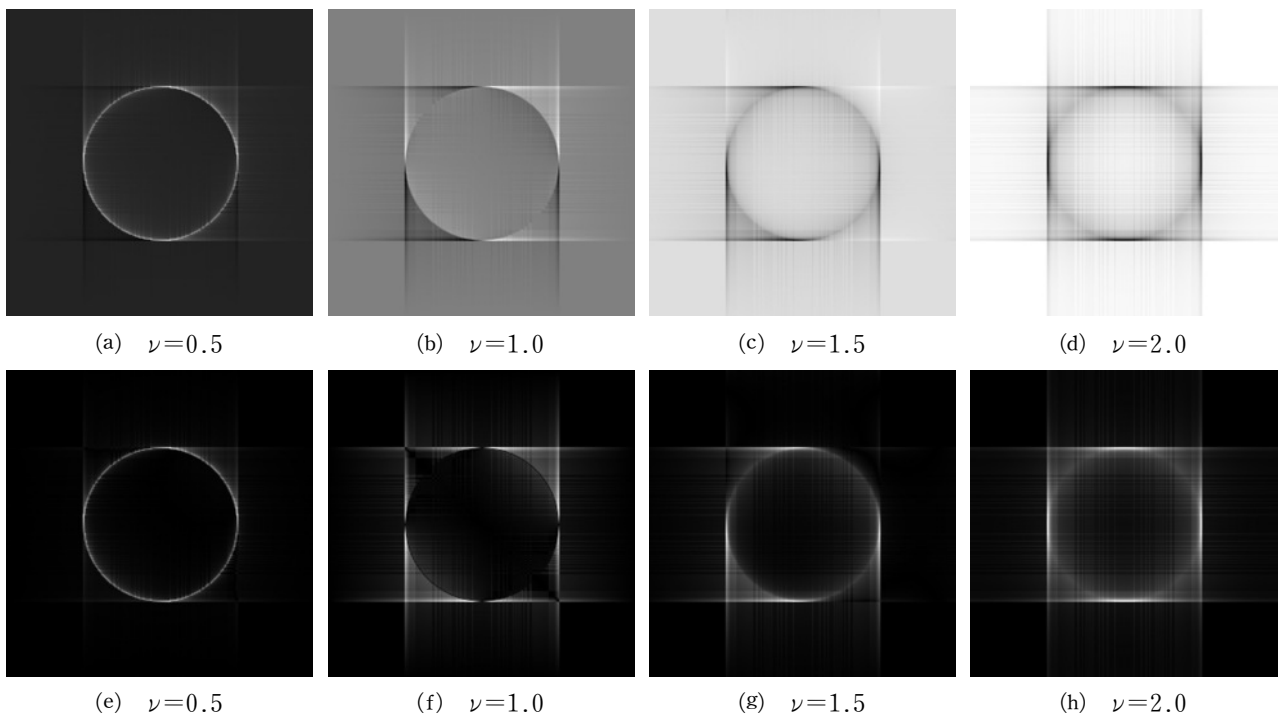


図 8  $I_{x+y}^\nu f_C(x, y)$  の (a)–(d) 線形濃度表示, および (e)–(h) 絶対濃度表示

が確認できる。しかしながら、加法型積分は、乗法型に比べて、水平および垂直方向の筋状の構造がより明確に見える特徴を見せている。

## 5. 等方性非整数次積分

2次元画像に対して方向性を持たない平滑化を行う場合、これまで述べた乗法型および加法型の2次元積分は必ずしも適切な処理法とはならないことがわかった。



図9  $I_{x+y}^{\nu} f_E(x, y)$ の(a)–(d)線形濃度表示, および(e)–(h)絶対濃度表示

この2つの積分処理に代わる方法として, 非整数次絶対積分を2次元に拡張する方法が考えられる. それを乗法型および加法型に拡張したものととして, 乗法型非整数次絶対積分

$$\begin{aligned} I_{|x|}^{\nu} I_{|y|}^{\mu} f(x, y) &= I_{|x|}^{\nu} I_{|y|}^{\mu} f(x, y) \\ &= \mathcal{F}^{-1}[H_a(\xi, \nu) H_a(\eta, \mu) F(\xi, \eta)] \end{aligned} \quad (12)$$

および, 加法型非整数次絶対積分

$$\begin{aligned} I_{|x|+|y|}^{\nu} f(x, y) &= (I_{|x|}^{\nu} + I_{|y|}^{\nu}) f(x, y) \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\{H_a(\xi, \nu) + H_a(\eta, \nu)\} F(\xi, \eta)] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[H_a(\xi, \nu) F(\xi, \eta)] \\ &\quad + \mathcal{F}^{-1}[H_a(\eta, \nu) F(\xi, \eta)] \end{aligned} \quad (13)$$

が定義できる.

しかしながら, 非整数次微分に関する考察から, これらの2次元非整数次絶対積分を用いても, 積分結果には一定の方向性が残存することが推定される<sup>6)</sup>. したがって, この問題を根本的に回避するには, 特定の方向に依存しない積分演算が必要である. これは, フーリエ変換面における非整数次積分フィルタを等方化することにより実現できる. そこで, 等方性非整数次積分を

$$I_{\rho}^{\nu} f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[H_i(\rho, \nu) F(\xi, \eta)], \quad (14)$$

$$H_i(\rho, \nu) = (2\pi)^{-\nu} \left[ 1 + \left( \frac{\rho}{R} \right)^2 \right]^{-\frac{\nu}{2}}, \quad (15)$$

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad (16)$$

として定義する. これは, 式(5)に示す非整数次絶対積分のフィルタ関数  $H_a(\xi, \nu)$  を動径距離の関数に拡張したものであり, 等方性非整数次導関数<sup>6)</sup>を積分に拡張したものになっている.

図1の4つの画像に対して等方性非整数次積分を行った結果を図10に示す. 全ての画像において, 完全に等方的な平滑化効果が認められる. ただし, 特に円盤画像および円画像は完全に等方的な画像に変換されるべきであるが,  $\nu=2$ においてこの2つの画像の積分結果には, わずかに水平および垂直方向に伸びる方向性が認められる. これは, 離散フーリエ変換における関数の周期性によるものであり, この積分自体の異方性を示すものではない. より小さな $\nu$ においては, 周期的に配置された図形間の相互作用が無視でき, 平滑化は完全に等方的になっていることが確認できる.

標準画像 Elaine の処理結果から, 適度な次数の等方性非整数次積分は, 自然画像の平滑化に特に有効であることがわかる. 画像を対象とした従来の平滑化では, 比較的小さな正方形行列に定義される平滑化フィルタ, フーリエ空間におけるガウス型の空間周波数フィルタ, メディアンフィルタな



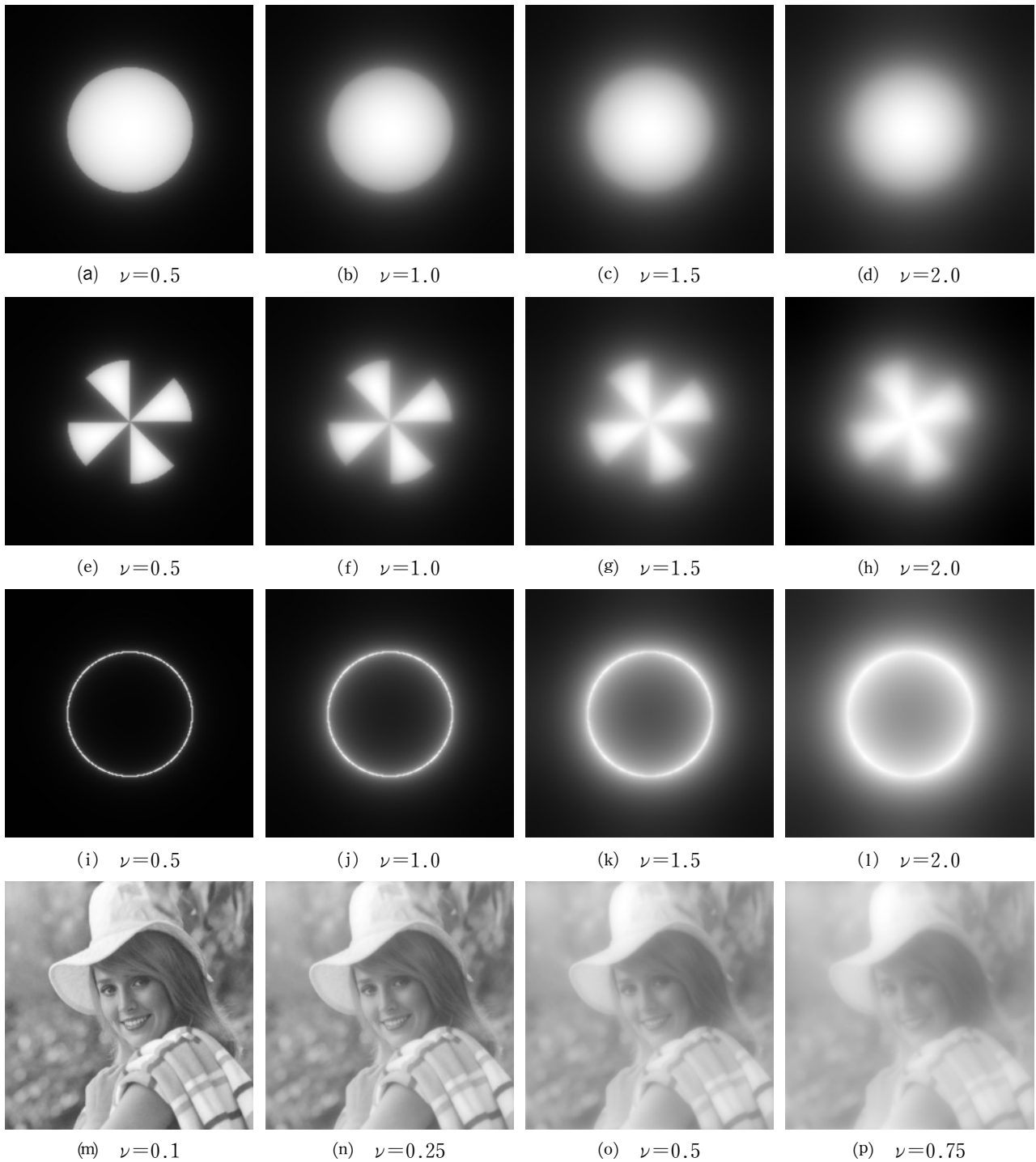


図10 (a)–(d)  $I_{f_D}^{\nu}(x, y)$ , (e)–(h)  $I_{f_E}^{\nu}(x, y)$ , (i)–(l)  $I_{f_C}^{\nu}(x, y)$ , (m)–(p)  $I_{f_E}^{\nu}(x, y)$  の線形濃度表示

どの非線形フィルタなどが、目的に応じて使用される。小正方形列に定義される平滑化フィルタは、各画素の近傍に対する局所的な重み付き平均を求めるもので、基本的には一定のカットオフを持つ低域通過型の周波数フィルタと等価である。フーリエ空間におけるガウス型フィルタも、その関数幅がカットオフ周波数を決めている。

これに対し、等方性非整数次積分に用いられる

周波数フィルタ  $H_i(\rho, \nu)$  は、 $\rho > R$  の領域において、 $\rho$  の増加とともに常に一定の割合で透過率が減衰するべき型のフィルタであり、カットオフ周波数を持たない。比較的 low 次積分を用いた場合、その処理後の画像は、平滑化によって全体に柔らかな印象を与えつつ、原画像に含まれる微細な構造が失われずに残っており、この特徴は、カットオフ周波数を持たないべき型のフィルタの特性に

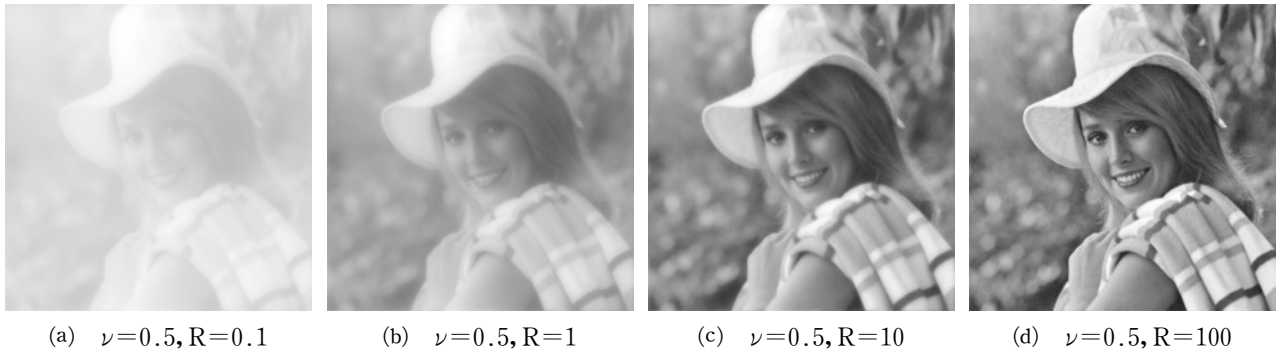


図 11  $I_E^{\nu}(x, y)$  の線形濃度表示の  $R$  に対する変化

よるものである。

この特性から、非整数次積分による平滑化は、ノイズの除去や低減などの目的にはあまり適しておらず、写真に対して視覚的にソフトな印象を付与する、あるいは霧のような効果を与えるなどの技巧的な加工に適するものと思われる。

フーリエ変換による非整数次積分に用いられる周波数フィルタには、式(5)に示すように、べき関数への近似の程度を制御するパラメータ  $R$  がある。積分次数  $\nu$  が、周波数の増加に対する高周波成分の減衰の度合いを決める変数であるのに対し、 $R$  は、減衰が始まる周波数を指定する。この振る舞いは、前報の図 3 に示すとおりである。したがって、 $R$  を 1 よりも大きな値に指定すると、それに対応した低周波成分には実質的に影響を与えずに平滑化を行うことができる。

図 11 は、標準画像に対して、次数を  $\nu=0.5$  に固定し、 $R$  を変化させた場合の等方性積分の結果を示したものである。 $R=1$  の場合に比べて、 $R=10$ 、および 100 と大きくすることにより、処理画像の特性も大きく影響を受けることがわかる。 $R=0.1$  という値は、基本周波数から比較的高い減衰を与えるもので、高周波成分の減衰はさらに大きくなるため、全体に強く霧がかかったような効果が生じている。

## 6. おわりに

非整数次積分を 2 次元の積分に拡張し、2 次元の画像に適用して、その特性を調べた。2 次元積分への拡張として、 $x$  方向の積分と  $y$  方向の積分を逐次的に行う乗法型非整数次積分、 $x$  方向の積分と  $y$  方向の積分の和を求める加法型非整数次積分、および等方的なフィルタ関数を用いる等方性非整数次積分の 3 つの 2 次元積分を定義した。

処理対象として、2 値の円盤画像、扇状画像、円画像、および標準画像の Elaine の 4 つを用いた。

1 次以下の比較的低次の 1 次元非整数次積分では、画像の高濃度部分が擦れて伸びたような平滑化効果を、積分方向の正の向きに生じることが示されている。乗法型非整数次積分では、この効果が  $x$  と  $y$  の向きに生じるとともに、2 つの積分が逐次的に行われることから、1 次元の非整数次積分の結果からは容易には予測できないパターンが現れること、および全体的により高次の積分に近い効果が生じることが確認された。

これに対し、加法型非整数次積分では、 $x$  と  $y$  の両方向の積分による平滑化の効果が加算的に現れることから、各次数における加法型積分の結果は、同じ次数の 1 次元積分の特徴を良く保持しており、その意味で 1 次元積分の 2 次元への自然な拡張になっていることが確認された。その一方で、 $x$  および  $y$  方向の 1 次元積分の特徴を残していることから、画像全体に十字型の構造が生じており、積分方向に依存した特徴が、乗法型積分よりも強く現れることが示された。

これら 2 つの 2 次元非整数次積分は、その平滑化特性に、多少とも積分方向に依存した非等方的な性質を有しているのに対し、等方性非整数次積分は、完全に等方的な平滑化効果を与えることが確認された。また、等方性非整数次積分の周波数フィルタはべき型であることから、カットオフ周波数を持たない。このため、比較的 low order の積分を用いた場合、その処理後の画像は、平滑化によって全体に柔らかな印象を与えつつ、原画像に含まれる微細な構造が失われずに残る性質がある。この特性から、非整数次積分による平滑化は、ノイズの除去や低減より、写真を視覚的にソフトにする、あるいは霧のような効果を与えるなどの技巧的な加工に適するものと思われる。

**【参考文献】**

- 1) 高木幹雄, 下田陽久: 新編 画像解析ハンドブック, 東京大学出版会, 2004, pp.1227-1239.
- 2) 魚住 純・鈴木宏司: FFTによる2次元画像の非整数次積分処理 (I) — 1次元積分 —, 工学研究 (北海学園大学大学院工学研究科紀要), 11, pp.65-75, 2011.
- 3) I. Bodlubny: Fractional Differential Equations, Academic, 1999.
- 4) 森口繁一・他: 数学公式 I, 岩波書店, 1956, p.52.
- 5) 魚住 純: FFTによる2次元画像の非整数次微分処理 (I) — 1次元導関数 —, 工学研究 (北海学園大学大学院工学研究科紀要), 7, pp.49-59, 2007.
- 6) 魚住 純: FFTによる2次元画像の非整数次微分処理 (II) — 2次元導関数 —, 工学研究 (北海学園大学大学院工学研究科紀要), 7, pp.61-72, 2007.