

タイトル	FFT による 2 次元画像の非整数次積分処理 () : 1 次元積分
著者	魚住, 純; 鈴木, 宏司; Uozumi, Jun; Suzuki, Koji
引用	工学研究 : 北海学園大学大学院工学研究科紀要(11): 65-75
発行日	2011-09-30

FFT による 2 次元画像の非整数次積分処理 (I)

— 1 次元積分 —

魚住 純*・鈴木 宏司**

Fractional integral processing of two-dimensional images by means of FFT (I)
— One-dimensional integrals —

Jun Uozumi* and Koji Suzuki**

1. はじめに

画像に微分演算を施す処理は、基本的には画像を構成する空間周波数の高周波成分を強調する作用があり、エッジ検出や画像鮮鋭化などに応用され、利用価値が高い¹⁾。一方、積分演算が画像処理に用いられることは希である。これは、通常の積分処理が画像に大局的で大きな構造的変化をもたらすことから、その利用価値が比較的低いためであると考えられる。

通常の微分演算は、整数を階数とする離散的な自由度を持っている。このうち、エッジ検出や鮮鋭化などに用いられるのは高々 2 階の導関数までであり、実質的な自由度は 2 つに限定される。しかし、微分の階数は非整数を含む正の実数に拡張することが可能であり、それによる非整数次微分を導入することにより、微分処理の自由度を連続化し、興味ある処理効果を生み出すことができることが示されている²⁻⁷⁾。

一方、非整数次微分の次数(階数)を負数としたものは、非整数次積分とみなすことができ、これにより、積分の次数(回数)にも連続的な自由度を与えることができる^{8,9)}。1 以下の次数の積分が可能となれば、それが画像に与える影響は整数次の積分に比べて軽度となり、実用上有用な効果を与える可能性がある。しかしながら、画像に対する非整数次積分処理がどのような効果をもたらすかについては、これまで系統的な報告はなされてい

ない。

このため、本研究では、幾何学的画像と標準画像を対象として、画像平面内の 1 つの軸に沿った積分、および 2 つの軸に広がる積分の効果について考察する。このうち、前者の積分を 1 次元積分、後者を 2 次元積分と呼ぶこととし、非整数次微分による画像処理効果の論文^{2,3)}と同様に、1 次元積分の効果については本論文で、また 2 次元積分の効果については、後続の論文¹⁰⁾で扱うこととする。

ここで、微分および積分の回数に関する用語について述べる。微分においては、それを n 回繰り返す演算を n 次微分または n 階微分と呼ぶ。また、その結果得られる導関数は、 n 次導関数または n 階導関数である。この「階」および「次」は、いずれも order の訳語である。一方、積分を繰り返す場合には、 n 回の積分という表現が用いられる。この「回」は、英語では time である。このように、微積分における演算回数の用語は必ずしも統一されていない。しかし、 $-n$ 階の微分演算を n 回の積分演算と同一視する立場においては、これらを統一的に表すことが望ましい。そこで、本論文では、微積分の回数を意味する次、階、回の統一用語として「次」を用いることとし、非整数次微分、非整数次積分の用語を用いる。

* 北海学園大学大学院工学研究科電子情報工学専攻

Graduate School of Engineering (Electronics and Information Eng.), Hokkai-Gakuen University

** 北海学園大学工学部電子情報工学科

Faculty of Engineering (Electronics and Information Eng.), Hokkai-Gakuen University

2. 非整数次積分

微分の次数を自然数から正の実数に拡張した非整数次微分は、Riemann-Liouville の積分によって定義することができる。すなわち、ある関数 $f(x)$ の ν 次の導関数は、

$${}_a D_x^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_a^x \frac{f(\chi)}{(x-\chi)^{\nu+1}} d\chi \quad (1)$$

と表される^{8,9)}。ここで、 ${}_a D_x^\nu$ に現れる a と x は積分の下限と上限を示し、特に、 $a \rightarrow -\infty$ とした $-\infty D_x^\nu$ を簡単に D_x^ν と表記することとする。

非整数次微分のこの積分表現は、フーリエ空間における周波数フィルタリングとして、

$$D_x^\nu f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) (i2\pi\xi)^\nu \exp(i2\pi x\xi) d\xi \quad (2)$$

$$= \mathcal{F}^{-1}[(i2\pi\xi)^\nu F(\xi)] \quad (3)$$

のように表すことができる²⁾。ここで、 \mathcal{F}^{-1} はフーリエ逆変換演算子であり、 $F(\xi)$ は $f(x)$ のフーリエ変換

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi x\xi) dx \quad (4)$$

である。

ここで、式(3)において ν を $-\nu$ に置き換えた式

$$I_x^\nu f(x) = D_x^{-\nu} f(x) = \mathcal{F}^{-1}[(i2\pi\xi)^{-\nu} F(\xi)] \quad (5)$$

により非整数次積分を定義する。 I_x^ν は、変数 x による ν 次の積分演算子である。すなわち、非整数次積分 $I_x^\nu f(x)$ は、フーリエ空間においてフィルタ関数

$$H_0(\xi, \nu) = (i2\pi\xi)^{-\nu} \quad (6)$$

を適用する空間周波数フィルタリング処理であるとみなすことができる。

式(6)のフィルタ関数は $\nu > 0$ において原点で発散するため、そのままでは数値計算には適さない。図 1 は、式(6)の定係数を除いた絶対値、すなわち $|\xi|^{-\nu}$ の ν に対する変化をプロットしたものである。ただし、関数値は 1.5 でクリップしてある。 ν が増加するにつれて、フィルタの裾が強く減衰する一方、原点付近の値は逆に大きくなり、強く発散する状況を示している。

この発散を避けるため、式(6)の近似式として、

$$H(\xi, \nu) = c(\xi, \nu) H_a(\xi, \nu) \quad (7)$$

を用いる。ただし、

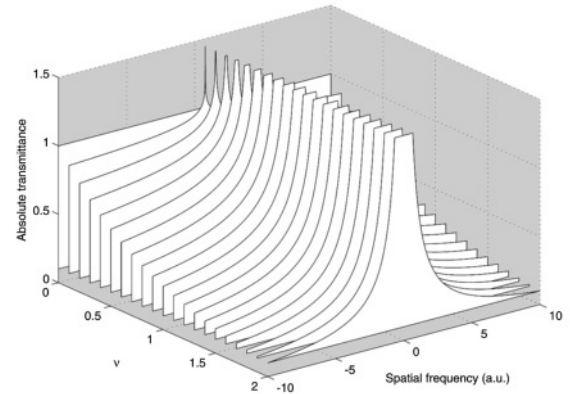
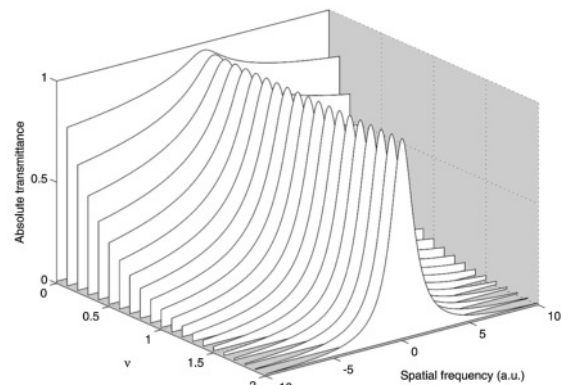
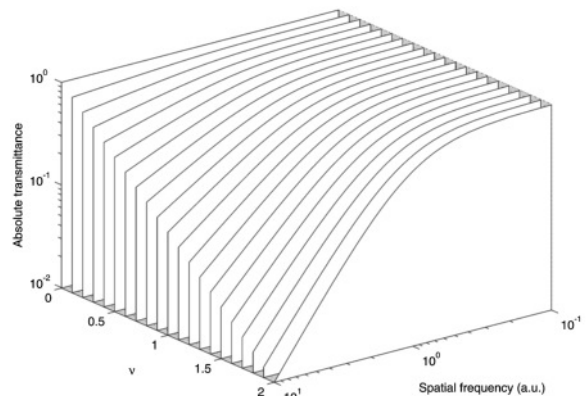


図 1 非整数次積分の空間周波数フィルタ関数の絶対値 $|\xi|^{-\nu}$ の ν に対する変化



(a) 線形表示



(b) 対数表示

図 2 非整数次積分の空間周波数フィルタの近似関数 $H_a(\xi, \nu)$ の ν に対する変化

$$c(\xi, \nu) = \begin{cases} [i \text{sign}(\xi)]^{-\nu} & ; \xi \neq 0, \\ (i)^{-\nu} \frac{1 + (-1)^{-\nu}}{2} & ; \xi = 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$H_a(\xi, \nu) = (2\pi)^{-\nu} \left[1 + \left(\frac{|\xi|}{R} \right)^2 \right]^{-\frac{\nu}{2}} \quad (9)$$

である。式(7)は、フラクタル理論においてべき関数の発散を抑制するためにしばしば用いられる近

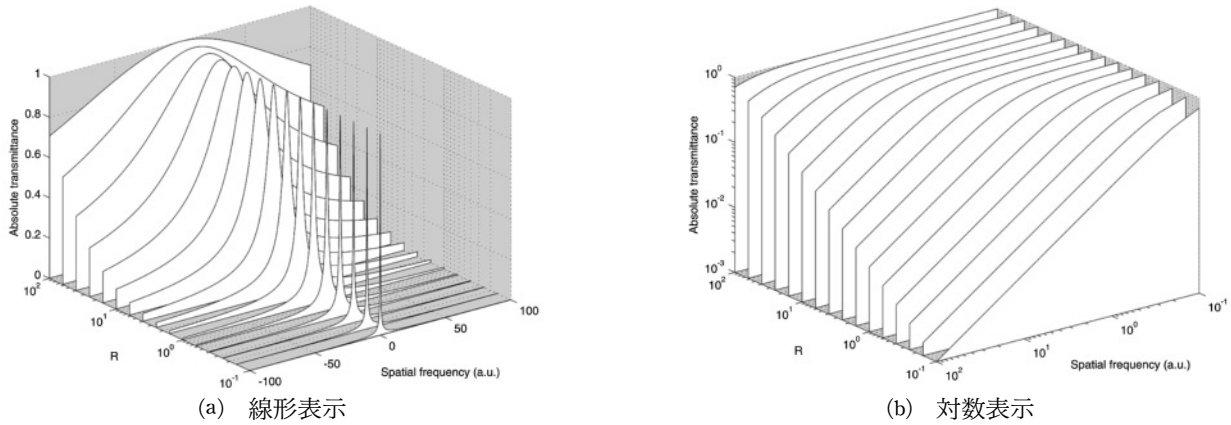


図3 非整数次積分の空間周波数フィルタの近似関数 $H'_a(\xi, \nu)$ の R に対する変化

似である式(9)を、負の ξ にも適用できるように、式(8)による修正を加えたもので、 R は原点近房での近似の度合いを制御するパラメータである。

式(9)の $H_a(\xi, \nu)$ から係数 $(2\pi)^{-\nu}$ を除外した関数 $H'_a(\xi, \nu) = (2\pi)^\nu H_a(\xi, \nu)$ の ν に対する変化を図2に示す。ただし、 $R=1$ とした。図2(a)は図1に対応する線形表示である。 ν が増加するにつれて本来原点で発散する関数を、すべての ν に対して1の値に固定するため、原点以外の関数値が相対的に強く抑制されている。このため、式(7)を用いて計算される積分値は、式(6)による真の積分値よりも小さな値となるものと推定される。しかし、画像への応用に際しては、最終的な出力画像は表示に適する濃度値に適宜修正されるため、このことは問題とはならない。

図2(b)は、空間周波数 ξ と関数値を両対数表示したものである。この表示では、べき関数が線形な振る舞いに変換される。したがって、式(9)の関数が、 $\xi \geq R=1$ においてはべき関数的振る舞いを保持しつつ、 $\xi \leq R=1$ においては1の値に漸近していることが分かる。本論文では、この値 $R=1$ を用いて考察を進める。これは、デジタル画像処理における離散的空間周波数の単位としてその基本周波数を考える場合、 $R=1$ とおくことは、周波数空間の原点、すなわち直流成分における $H'_a(\xi, \nu)$ を1とし、その他の周波数に対しては実質的にべき関数的振る舞いを仮定することを意味するためである。

一方、 $\nu=1$ における $H'_a(\xi, \nu)$ の R に対する変化は図3に示すとおりである。同図(a)は線形表示、(b)は対数表示である。この図から、 R が $H'_a(\xi, \nu)$ のべき関数的領域と定数的領域の境界点を決めていることが明確に確認できる。このように、必要

に応じて R を設定することにより、フィルタ関数の特性を調整することが可能である。

3. 画像の1次元非整数次積分

この節では、2次元画像 $f(x, y)$ を一つの軸に沿って積分する処理、すなわち1次元非整数次積分を考える。 $f(x, y)$ は、2次元逆フーリエ変換を用いて

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) \exp[i2\pi(\xi x + \eta y)] d\xi d\eta = \mathcal{F}^{-1}[F(\xi, \eta)] \quad (10)$$

と表される。したがって、 $f(x, y)$ に対する x 軸および y 軸に沿った1次元積分は、

$$I_x f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[H(\xi, \nu)F(\xi, \eta)], \quad (11)$$

$$I_y f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[H(\eta, \nu)F(\xi, \eta)] \quad (12)$$

と表すことができる。

式(1)からわかるように、実画像の非整数次積分は実関数である。このことは、逆フーリエ変換を用いた2次元画像に対する式(11)、(12)の場合には必ずしも自明ではないが、非整数次微分の場合と同様に示すことができる(文献²⁾の式(18)を参照)。

これらの非整数次積分演算の画像処理としての効果を調べるため、本論文では図4(a)–(d)に示す4つの画像を用いる。図4(a)は、大きさ 256×256 の内部の詰まった2値の円画像で、以下ではこれを円盤画像と呼ぶ。この画像は、全ての方向のエッジを含んでおり、処理の基本的特性を見るのに適している。ただし、円盤は回転対称な図形であり、中心を原点とする角度方向に変化を持たない。そこで、円盤を角度方向に8等分し、そのうちの4つの扇を取り除くことで角度方向に変化を持たせ

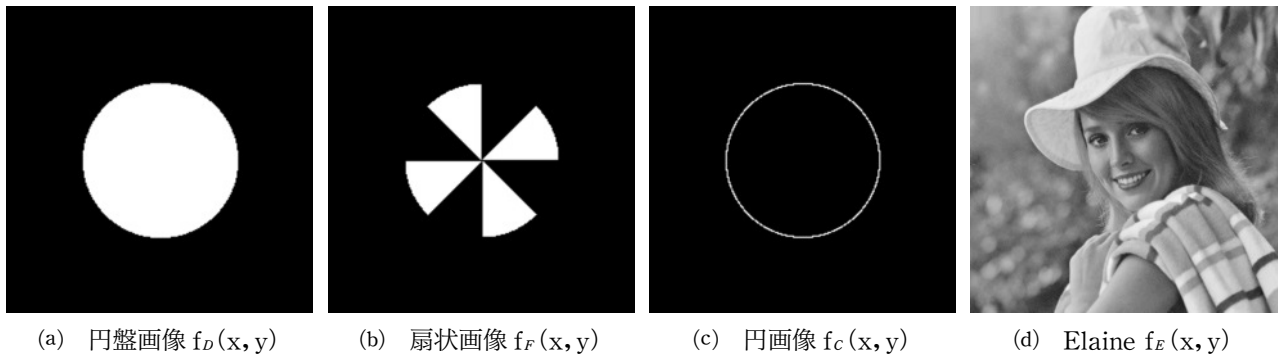


図 4 非整数次積分処理に用いた原画像

た画像が、図 4 (b) である。これを扇状画像と呼ぶことにする。図 4 (c) は、円盤の周だけからなる画像であり、円画像と呼ぶ。これは、線画に対する積分の効果を見るのに適している。図 4 (d) は、実際の画像における効果を確認するための標準画像 Elaine (大きさ 512×512) である。ここでは、これらの画像をそれぞれ関数 $f_D(x, y)$, $f_F(x, y)$, $f_C(x, y)$ および $f_E(x, y)$ で表す。

円盤画像 $f_D(x, y)$ に式 (11) による x 軸に沿った非整数次積分処理を行った結果を図 5 に示す。非整数次積分の出力画像は一般に負の値を取りうるため、画像として表示するためには何らかの方法で最小濃度値を非負値にする必要がある。図 5 (a)–(h) は、最小濃度値が負の場合にその絶対値を画像全体に加えて最小値を零としたのち、濃度値零が黒、最大濃度値が白となるように表示したものである。したがって、最小濃度値が負の場合、零濃度が灰色に表示されること、および最小濃度値が正值の場合には、それが灰色に表示されることに注意が必要である。この表示法を、ここでは便宜上線形濃度表示と呼ぶことにする。

一方、図 5 (i)–(p) は、積分処理の出力画像の絶対値をとることにより非負化し、その最大濃度値が白色となるように表示したものである。この場合においても、濃度の絶対値の最小値が正值となる場合には、それがその濃度に対応した灰色に表示されている。この表示法を絶対濃度表示と呼ぶこととする。

この図が示すように、微小次数 ν による円盤画像の 1 次元積分においては、円盤内部の右側の濃度が左側に対して相対的に増大すると同時に、円盤外部においても、右側の濃度値が左側に対して相対的に増加する現象が生じている。これにより、原画像を右方向に擦ったような効果、あるいは、右側から光を照射して立体感を与えたような効果

が生じている。この傾向は、 ν の増加とともに強くなり、 $\nu=1$ においては、 y 軸を中心とする左右反対称な濃度分布となっている。これは、円盤外部の上下の部分の関数値が x 方向には零の定数であり、したがってその領域の積分値も零となっており、それが灰色に表示されていること、また、絶対濃度表示の (i) から (l) までの変化において、零濃度を示す黒色部が、円盤の左端から次第に右に移動し、 $\nu=1$ において y 軸に一致することからも読み取ることができる。 ν がさらに増加すると、円盤内部の濃度低下は右側にも進行し、 $\nu=2$ においては、原画像の円盤領域全体が負値となる左右対称の画像となっている。 ν のさらなる増加に対しては、円盤領域の左側から濃度値の上昇が始まり、 $\nu=3$ においては再度左右反対称の濃度分布となり、 $\nu=4$ において再び、原円盤領域が正值となる左右対称の濃度分布が形成される。そして、この過程全体にわたって、 x 軸方向に画像が平滑化されている。

$\nu=1$ および $\nu=3$ の奇数次においては、左右反対称の濃度分布が現れることにより、 x 軸に沿った平均濃度は零となる。これは、式 (8) より、奇数の ν に対しては $c(0, \nu) = 0$ となり、積分された関数の x 方向の直流成分が零となることに起因している。

円盤画像の x 軸上の濃度値に対する非整数次積分の変化を $0 \leq \nu \leq 2$ に対してプロットした結果を図 6 に示す。 $\nu=0$ においては矩形関数である x 軸上の断面が、 ν が増加するにつれて上述の変化を示し、 $\nu=1$ においてはほぼ 3 つの線分から構成される関数になっている。ただし、FFT を用いた計算においては、原空間の関数および周波数空間の関数がいずれも周期関数とみなされることから、 $\nu=1$ における出力関数は、実質的には 2 つの線分から構成されていることがわかる。

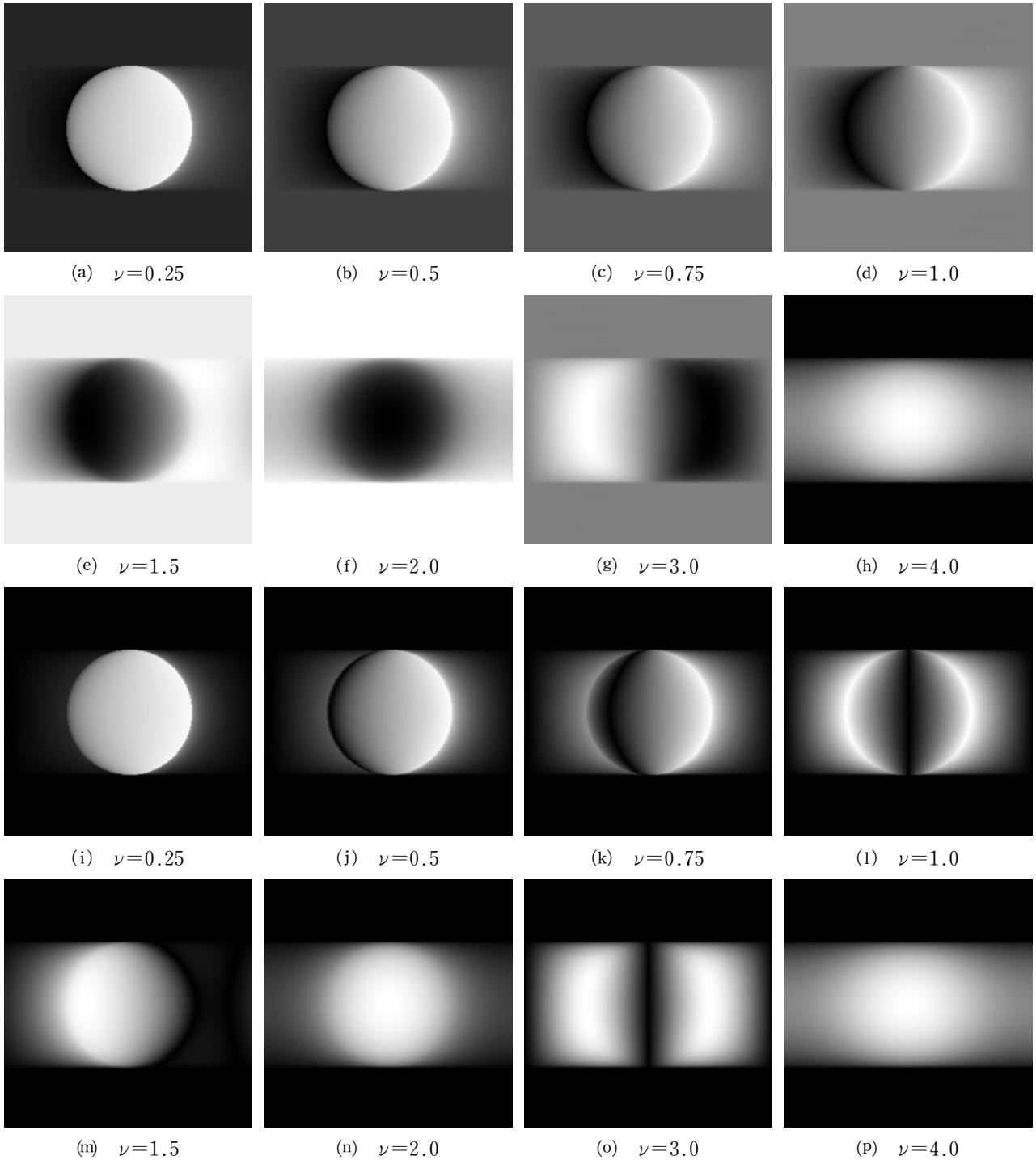
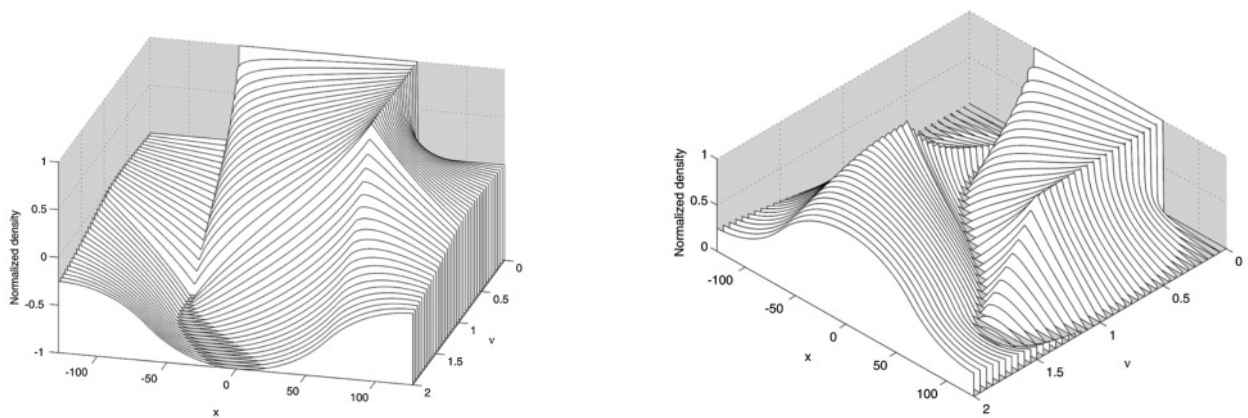


図5 $f_D(x, y)$ の (a)–(h) 線形濃度表示, および (i)–(p) 絶対濃度表示

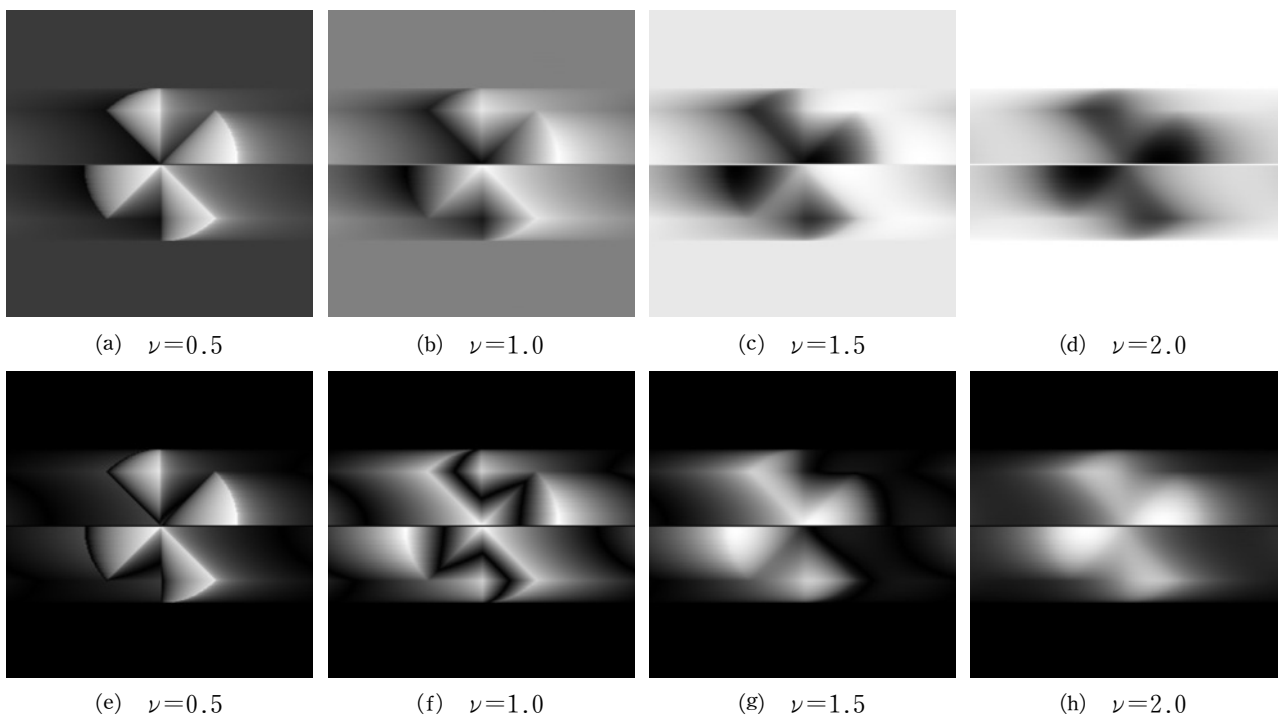
このうち, 中央の線分, すなわち $\nu=0$ における $f_D(x, 0)=1$ の定数領域に現れる線分は, 定数1の1次積分が1次関数となったものであると解釈できる. これに対し, その左右の領域の線分は, $f_D(x, 0)=0$ の定数領域の1次積分が1次関数になったことを意味しており, 常識的な積分の振る舞いと合致しない. すなわち, 矩形関数の通常不定積分では, 矩形の立ち上がりまでは零, 矩形部に

は右上がりの1次関数, そして矩形の右端以降は1次関数の右端から連続する定数が得られるはずである. 図6に見られる一見常識に反するこの振る舞いは, FFTによる積分ではその結果も周期関数であり, したがってその左端と右端が連続的に接続しているという数学的な制約によるものであると解釈することができる. なお, $\nu=1$ においても線分にわずかな歪みが見られるが, これは積分



(a) 線形濃度表示

(b) 絶対濃度表示

図 6 $I_x f_D(x, y)$ の中心水平断面の ν に対する変化(a) $\nu=0.5$ (b) $\nu=1.0$ (c) $\nu=1.5$ (d) $\nu=2.0$ (e) $\nu=0.5$ (f) $\nu=1.0$ (g) $\nu=1.5$ (h) $\nu=2.0$ 図 7 $I_x f_F(x, y)$ の (a)–(d) 線形濃度表示, および (e)–(h) 絶対濃度表示

の空間周波数フィルタに近似関数を用いているためであると思われる。

さらに次数が増加すると, 積分の結果は再び曲線となり, $\nu=2$ においては左右対称の下に凸の曲線となる。これは, 定数の 2 次積分により 2 次関数が生じたものと考えられる。

x 軸方向の非整数次積分を扇状画像 $f_F(x, y)$ に対して行った結果を図 7 に示す。(a)–(d) が線形濃度表示, (e)–(h) が絶対濃度表示である。円盤画像の内部に構造を持つ扇状画像の場合も, ν が増加するにつれて, 扇の各部分に基本的には円盤画像と同様の変化が生じていることがわかる。また, 原画像が左右対称ではないことから, 1 次の積分

画像は左右反対称とはならないが, 同図(f)が示すように, 扇の各部分の中央部を零濃度のラインが走っており, その左右で濃度が異符号になっていることが分かる。

図 8 は, 円画像 $f_C(x, y)$ を 1 次元非整数次積分した結果を示したものである。円画像の積分において特徴的なことは, 原画像が円盤画像や扇状画像のように濃度 1 の定数領域を持たないことから, その積分結果は, 円盤画像において円盤外部の領域に生じているものと同様の変化が現れる点である。また, $\nu=1$ においては, 画像全体が左右反対称になっていることに加えて, 円弧を境に低濃度から高濃度への不連続な変化が生じている。

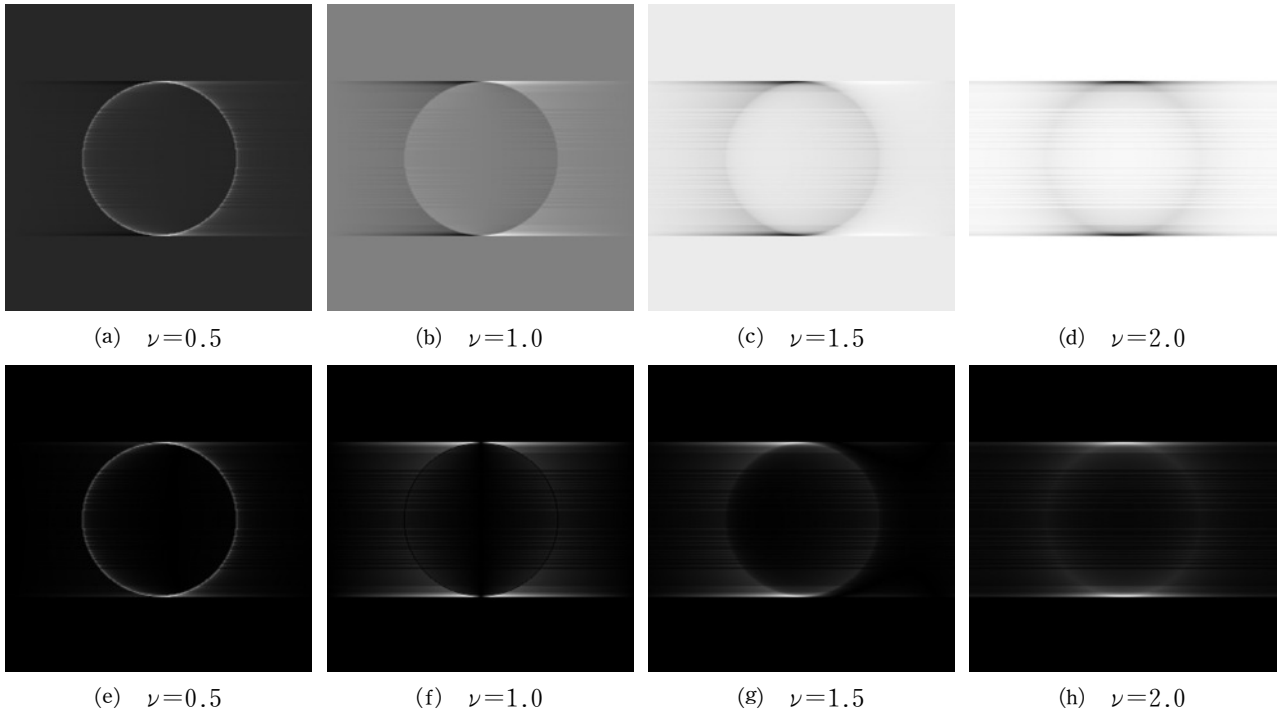


図8 $I_x f_c(x, y)$ の(a)–(d)線形濃度表示, および(e)–(h)絶対濃度表示

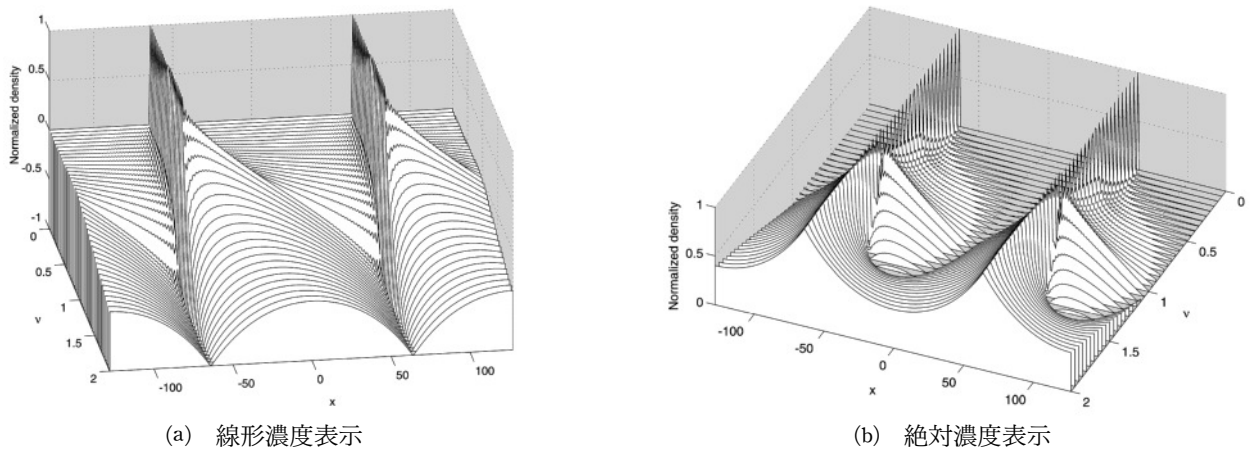


図9 $I_x f_c(x, y)$ の中心水平断面の ν に対する変化

これは、 $f_c(x, y)$ が x 軸近傍においては二つの δ 関数が並ぶ構造をしており、その通常の不定積分が二つの単位階段関数の和になることに対応している。ただし、FFTによる $\nu=1$ の積分においては、 x 方向の平均強度が零になること、および左右端の濃度が等しいという制約による影響が、通常の積分結果からの逸脱を発生させていると考えられる。

図6と同様の濃度変化を円画像の積分結果に対して表示したものを図9に示す。 $\nu=1$ の積分が、円周上に相当する2個所において不連続な増加を示し、その間の濃度が線形に減少する様子が明確に現れている。 ν がさらに増加すると、濃度変化は

曲線的となり、 $\nu=2$ においては、2次関数が現れる。

最後に、標準画像の一つであるElaine $f_E(x, y)$ に1次元非整数次積分を適用した結果を図10に示す。自然画像に対する1次元非整数次積分においても、0.5程度までの比較的低い次数においては、積分する軸の正の方向に擦れたような平滑化の効果を得られることがわかる。 $\nu=1$ に達すると、 x 軸方向の平均濃度が零になることから、低濃度部分がさらに暗くなると同時に、絶対濃度表示においては、零強度領域の発生によるソラリゼーションに類似した効果が生じている。また、 $\nu=2$ の線形濃度表示では、円盤画像などの場合と同様

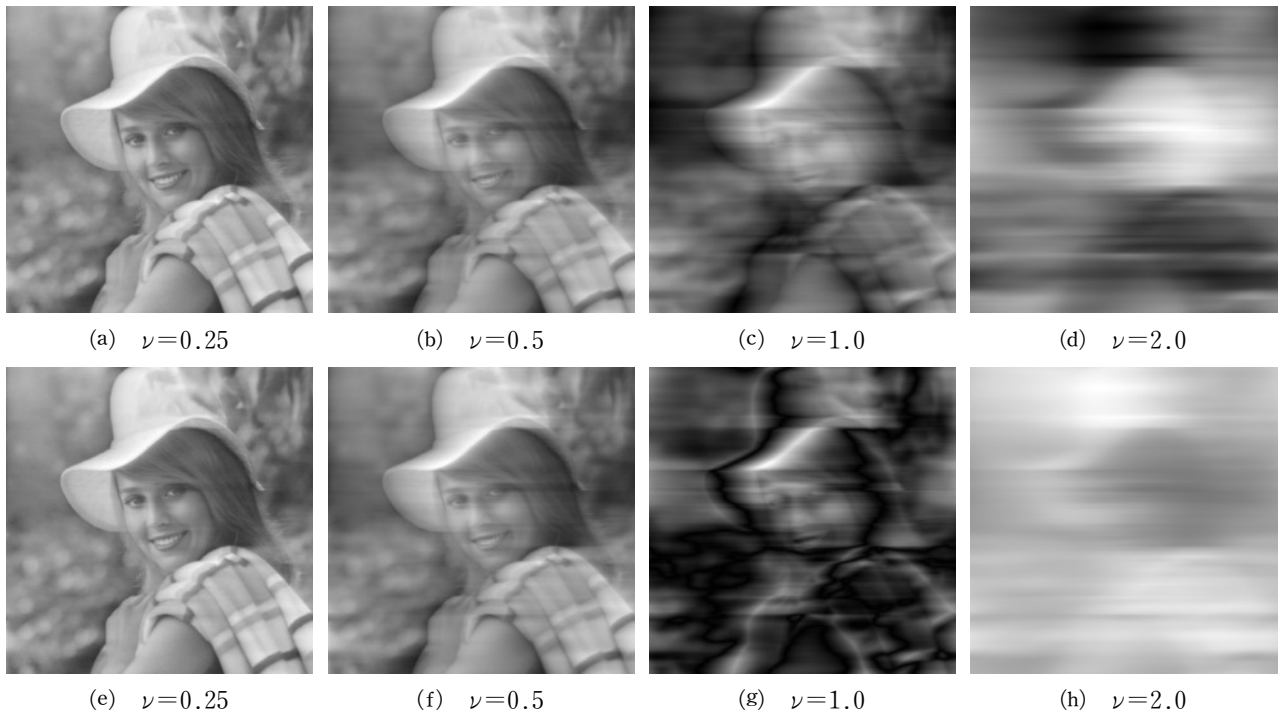


図 10 $I_{x|f_E}(x, y)$ の (a)–(d) 線形濃度表示, および (e)–(h) 絶対濃度表示

に, 原画像に対する明暗の反転が生じている. その絶対濃度表示が原画像の濃淡分布に近いことから, $\nu=2$ における濃度値が全体として負値になっていることがわかる.

4. 画像の 1 次元非整数次絶対積分

2 節で述べたように, フーリエ逆変換表示を用いた非整数次積分は, 空間周波数フィルタによるフィルタリング処理であって, その特性は, 式(7)–(9)で表されるフィルタの特性に集約される.

このフィルタ関数のなかで, 式(9)の $H_a(\xi, \nu)$ は, 図 2 に示すように, 高周波成分を抑制する特性があり, この周波数特性が積分による平滑化の効果を与えていること, また, ν が増大するにつれて, 高周波成分がより大きく減衰し, 相対的に低周波成分が支配的になることがわかる.

また, 図 5 および 6 に典型的に見られるように, ν が増加するにつれて, 高濃度の領域が原関数の位置から次第に右側にシフトし, $\nu=2$ においてはピークの反転が生じる. この状況は, 非整数次微分において, 微分次数が増加するに従い, 導関数のピークが次第に左にシフトし, 2 次導関数においてピークの反転が生じる現象と全く同様であり²⁾, 積分次数としての ν が負値となる導関数から正值となる積分まで, ピークの右シフトが連続

的に生じることを意味している.

このピークシフトは, フィルタ関数の位相因子に起因していることが, 非整数次導関数に関する議論において指摘されている²⁾.

図 10 の比較的小きな ν において, 右側に擦れたような平滑化が生じているのも, このピークシフト効果によるものである. したがって, 微小次積分による平滑化において, このような特定の向きのシフトを取り除くには, 非整数次微分の場合と同様, フィルタ関数から位相因子を除去することが有効であると考えられる.

非整数次積分においては, フィルタ関数の位相因子は, 式(8)の $c(\xi, \nu)$ に含まれている. このため, フィルタ関数 $H(\xi, \nu)$ から位相因子 $c(\xi, \nu)$ を除き, 式(9)の $H_a(\xi, \nu)$ のみをフィルタ関数とする積分演算

$$I_{|x|}f(x) = \mathcal{F}^{-1}[H_a(\xi, \nu)F(\xi)] \quad (13)$$

を考える. ここで, $I_{|x|}$ の添え字 $|x|$ は, 変数 x に関する非整数次積分フィルタの絶対値を用い, x の向きに依存しない積分を行うことを意味している. このように変形した演算は, 明らかに積分の自然な一般化の流れを逸脱している. しかし, そのデータ処理特性は, 非整数次積分の特性と密接に関係していることから, これを非整数次絶対積分と呼ぶことにする. この考えは, 非整数次導関

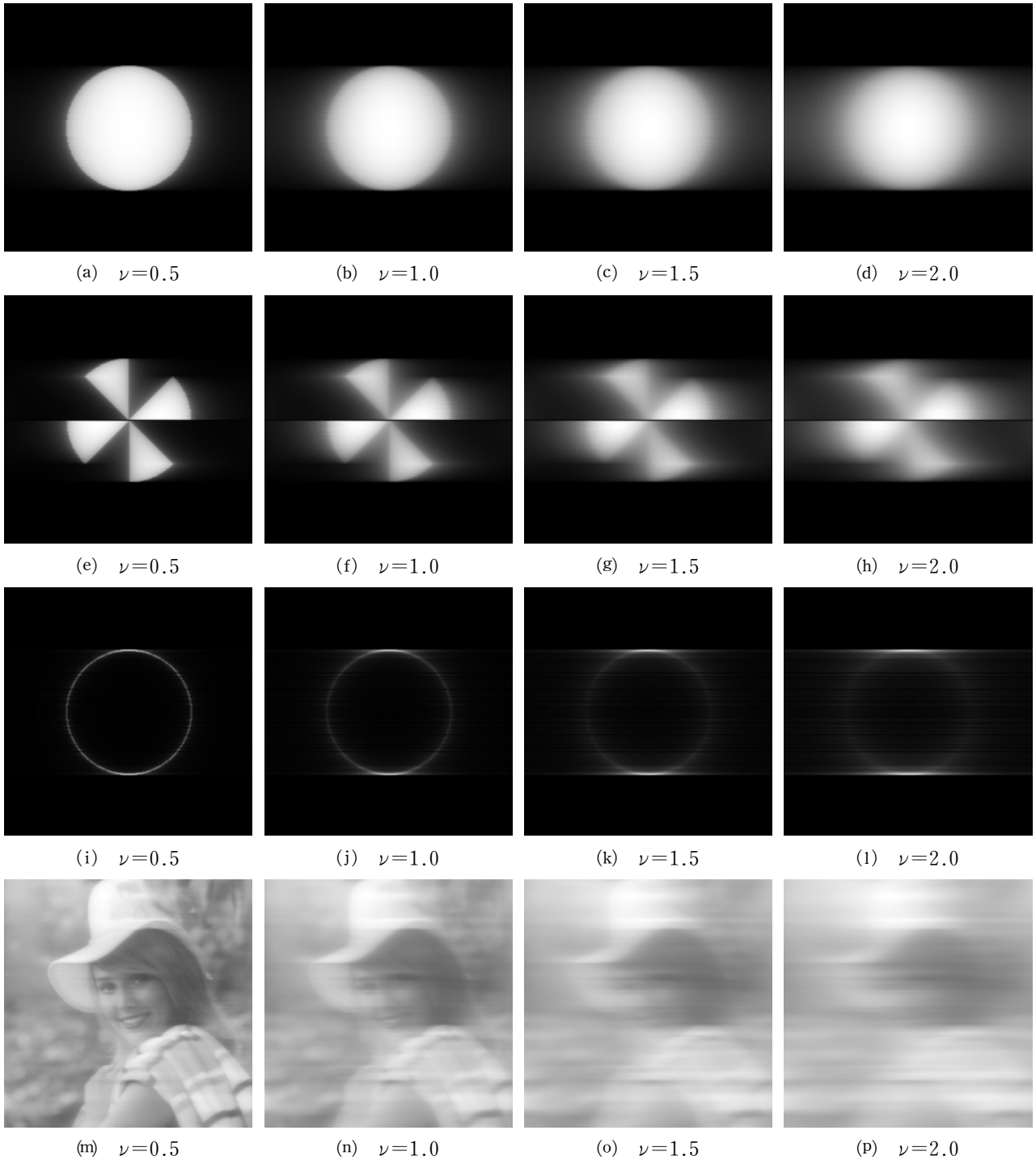


図 11 (a)–(d) $I_{|x|}^{\nu} f_D(x, y)$, (e)–(h) $I_{|x|}^{\nu} f_F(x, y)$, (i)–(l) $I_{|x|}^{\nu} f_C(x, y)$, および (m)–(p) $I_{|x|}^{\nu} f_E(x, y)$ の線形濃度表示

数から非整数次絶対導関数を導入した経緯と同様である²⁾.

2次元画像に対する1次元非整数次絶対積分も同様に考えることができ、 x 軸および y 軸に沿った積分は、

$$I_{|x|}^{\nu} f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[H_a(\xi, \nu)F(\xi, \eta)], \quad (14)$$

$$I_{|x|}^{\nu} f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[H_a(\eta, \nu)F(\xi, \eta)] \quad (15)$$

により計算することができる。

これまでに用いた4つの画像に対して、式(14)による処理を行った結果を図11に示す。非負の画像関数の非整数次絶対積分は非負であり、絶対濃度表示は線形濃度表示に一致するため、図11には線形濃度表示のみを掲載した。

非整数次絶対積分の空間周波数フィルタは実関数であることから、たとえば x 方向の積分では、

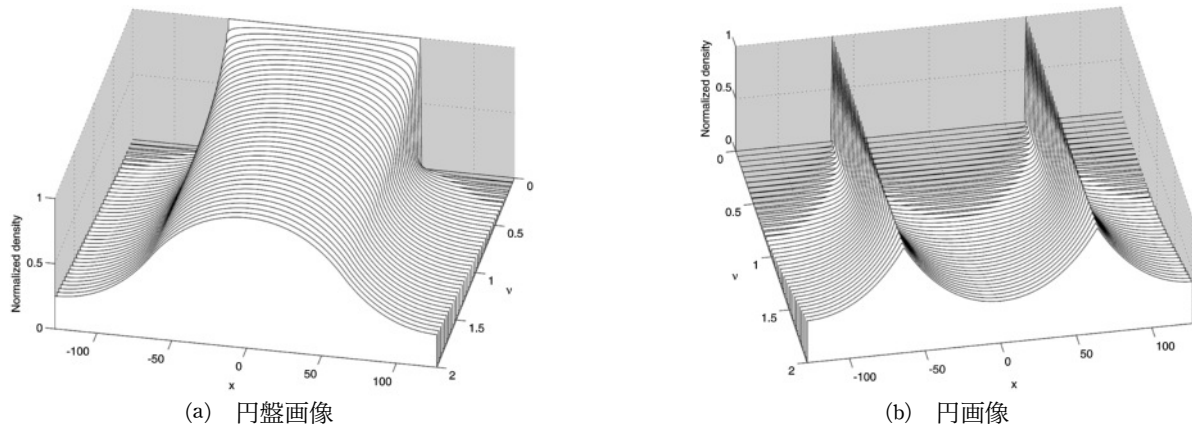


図 12 $I_{|x|} f_D(x, y)$ および $I_{|x|} f_C(x, y)$ の中心水平断面の ν に対する変化

x の正負の向きを区別しない。このため、図 11 に見られるように積分の効果は左右同等に現れ、原関数が左右対称であれば、その処理画像も全ての ν に対して左右対称となる。

このことは、円盤画像と円画像について、それらの x 軸上の濃度分布を非整数次絶対積分処理した結果を ν に対してプロットした図 12 に明瞭に示されている。この図から、非整数次絶対積分では、原関数に対して向きに依存しない平滑化が行われていることが分かる。また、フィルタ関数から位相因子を除外していることの影響として、 $\nu=1$ の積分は、同次数の非整数次積分の結果とは全く異なる形となり、 $\nu=2$ では、同次数の非整数次積分を上下反転した形になっている。

5. おわりに

本論文では、Riemann-Liouville の積分から導かれる非整数次積分のフーリエ逆変換表現に基づき、2次元画像に対する1次元の非整数次積分および非整数次絶対積分の特性について考察した。その際、非整数次絶対積分を、非整数次積分演算に対応する空間周波数フィルタから位相因子を除去することにより定義した。これらの非整数次の積分演算を、2値の円盤画像、扇状画像、円画像、および自然画像である標準画像に適用し、その特性を調べた。

円盤画像の微小次数1次元積分においては、円盤内部の右側の濃度が左側に対して相対的に増大すると同時に、円盤外部においても、右側の濃度が左側に対して相対的に増加する現象が生じ、原画像を右方向に擦ったような効果、あるいは、右側から光を照射して立体感与える効果が生じるこ

とが示された。この傾向は、次数の増加とともに強くなり、1次積分においては全体として左右反対称な濃度分布へと変化した。さらに次数が増加するに従い、ピークの右シフトと反転が繰り返され、その過程において、積分方向に画像の平滑化が進行することが確認された。

この積分結果に関する定量的な考察から、1次積分では1次関数が、2次積分では2次関数が現れることが示されたが、それらが通常の積分の結果として想定される関数には必ずしも一致しないこと、およびその原因として、離散フーリエ変換における制約が考えられることが示された。

濃度値1の定濃度領域を持たず、 δ 関数的な濃度分布から構成される円画像の1次元非整数次積分においては、その微小次数において、円盤画像の場合の円盤外部に見られる変化に相当する変化を示し、1次積分においては δ 関数の積分に相当する不連続な濃度変化が生じることが確認された。ただし、そのような関数の通常の不定積分に現れる単位階段関数とは異なる傾向も確認され、FFTを用いることによる影響の観点から説明がなされた。

標準画像に対する1次元非整数次積分においては、0.5次程度までの低次積分において、積分方向に擦れたような平滑化の効果が見られた。1次積分では、低濃度部分がさらに暗くなると同時に、濃度値が全体として負値になることが示された。

非整数次絶対積分では、原関数に対して向きに依存しない平滑化が行われていること、および積分画像に負値が生じないことが示された。

以上のことから、2次元画像に対する1次元非整数次積分は、通常の整数次積分が相当程度強い平滑化を生じさせるのに対して、微小な次数を用

いることにより特定の軸に沿った適度な平滑化を与えることが可能であり、その度合いを積分次数により調整することが可能であることが示された。また、非整数次絶対積分を用いることにより、平滑化において向きに依存しない効果が得られることが示された。

なお、2次元画像に対する2次元積分については、後続の論文¹⁰⁾において報告する。

【参考文献】

- 1) 高木幹雄, 下田陽久: 新編 画像解析ハンドブック, 東京大学出版会, 2004, pp.1227-1239.
- 2) 魚住 純: FFTによる2次元画像の非整数次微分処理(I) — 1次元導関数 —, 工学研究(北海学園大学大学院工学研究科紀要), 7, pp.49-59, 2007.
- 3) 魚住 純: FFTによる2次元画像の非整数次微分処理(II) — 2次元導関数 —, 工学研究(北海学園大学大学院工学研究科紀要), 7, pp.61-72, 2007.
- 4) 高井信勝: 非整数次微分演算によるフーリエ画像処理, 北海学園大学工学部研究報告, 34, pp.97-110, 2007.
- 5) 魚住 純・泉 晴佳: 非整数次微分を用いたアンシャープマスクによる画像鮮鋭化, 工学研究(北海学園大学大学院工学研究科紀要), 9, pp.27-36, 2009.
- 6) Y. Pu, J. Zhou and X. Yuan: Fractional differential mask: a fractional differential-based approach for multiscale texture enhancement, IEEE Trans. Image Proc., 19, 2, pp. 491-511, 2010.
- 7) Z. Gan and H. Yang: Texture enhancement through multiscale mask based on RL fractional differential, Proc. 2010 Internat'l Conf. Information, Networking Autom. (ICINA), pp. V1-333-V1-337, 2010.
- 8) I. Bodlubny: Fractional Differential Equations, Academic, 1999.
- 9) 森口繁一・他: 数学公式 I, 岩波書店, 1956, p.52.
- 10) 魚住 純・鈴木宏司: FFTによる2次元画像の非整数次積分処理(II) — 2次元積分 —, 工学研究(北海学園大学大学院工学研究科紀要), 11, pp.77-86, 2011.