タイトル	分散と標準偏差にかんするさまざまな分解式
著者	木村，和範
引用	季刊北海学園大学経済論集，58(2)：1-14
発行日	2010-09-30

《論説》

分散と標準偏差にかんするさまざまな分解式

木　村　和　範

はじめに
1．分散の分解
(1)　総分散の分解
①　総分散そのもの
②　級内変動
③　級間変動
(2)　総分散の差の分解
①　総分散そのもの
②　級内変動
③　広義の級間変動
④　狭義の級間変動
⑤　構造的変化
2．標準偏差の分解
(1)　総標準偏差の分解
①　総標準偏差そのもの
②　級内変動
③　級間変動
(2)　総標準偏差の差の分解（その1）
①　総標準偏差そのもの
②　級内変動
③　広義の級間変動
④　狭義の級間変動
⑤　構造的変化
(3)　総標準偏差の差の分解（その2）
①　総標準偏差そのもの
②　級内変動
③　広義の級間変動
④　狭義の級間変動
⑤　構造的変化
(4)　総標準偏差の差の分解（その3）
①　総標準偏差そのもの
②　級内変動
③　広義の級間変動
④　狭義の級間変動
⑤　構造的変化
おわりに

はじめに

総分散と総標準偏差は級内変動と級間変動に分解することができる。また，総分散の差と総標準偏差の差は級内変動と広義の級間変動に分解され，さらに広義の級間変動は狭義の級間変動と構造的変化に要因分解される。このときに誘導される分解式は1種類だけとは限らない[1)]。簡単な数値例にたいして分解式を適用してみたところ，その結果は，要因の寄与分を示す数値がすべてについて一致しているとは言えないことを示した[2)]。そこで，この一致・不一致はデータの違いによるものか，あるいは分解式の数学的な性質によるものかを検討することが課題として残された。

本稿では，このことを検討する。そのために，あらかじめ数式で用いた文字の意味を一覧する（表1)。そして，これまでに誘導されたさまざまな分解式を要因別に対照する（表2～表5)。これらの表の欄内には，数式の下

1）①木村和範「分散と標準偏差の分解」『開発論集』（北海学園大学)，第83号，2009年[木村（2009a)]；②同「分散と標準偏差の分解にかんする再考察」同，第84号，2009年[木村（2009b)]。

2）木村（2009a)

表 1　数式内の文字の意味

	比較時点(t)	基準時点(0)
階級（i）の個数	m（ただし，$i=1,\ \cdots,\ m$）	m（ただし，$i=1,\ \cdots,\ m$）
第 i 階級における個体数	${}^{t}k_i$	${}^{0}k_i$
個体総数	${}^{t}N=\sum_{i=1}^{m}{}^{t}k_i\neq 0$	${}^{0}N=\sum_{i=1}^{m}{}^{0}k_i\neq 0$
階級内個体比率（シェア）	$\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}$	$\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}$
個体の識別番号	j	j
第 i 階級における第 j 個体の数量的規定性	${}^{t}x_{ij}$	${}^{0}x_{ij}$
総平均	$\overline{\overline{{}^{t}x}}$	$\overline{\overline{{}^{0}x}}$
総分散	${}^{t}\sigma^2=\frac{1}{{}^{t}N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{t}k_1,{}^{t}k_2,\cdots\cdots,{}^{t}k_m}({}^{t}x_{ij}-\overline{\overline{{}^{t}x}})^2$	${}^{0}\sigma^2=\frac{1}{{}^{0}N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{0}k_1,{}^{0}k_2,\cdots\cdots,{}^{0}k_m}({}^{0}x_{ij}-\overline{\overline{{}^{0}x}})^2$
総標準偏差	${}^{t}\sigma=\sqrt{{}^{t}\sigma^2}$	${}^{0}\sigma=\sqrt{{}^{0}\sigma^2}$
第 i 階級における $x_{\cdot j}$ の相加平均	$\overline{{}^{t}x_i}$	$\overline{{}^{0}x_i}$
第 i 階級の級内分散	${}^{t}\sigma_i{}^2=\frac{1}{{}^{t}k_i}\sum_{j=1}^{{}^{t}k_i}({}^{t}x_{ij}-\overline{{}^{t}x_i})^2$	${}^{0}\sigma_i{}^2=\frac{1}{{}^{0}k_i}\sum_{j=1}^{{}^{0}k_i}({}^{0}x_{ij}-\overline{{}^{0}x_i})^2$
第 i 階級の級内標準偏差	${}^{t}\sigma_i=\sqrt{{}^{t}\sigma_i^2}$	${}^{0}\sigma_i=\sqrt{{}^{0}\sigma_i^2}$
	${}^{t}\sigma_i+{}^{0}\sigma_i\neq 0$	

表 2　総分散（基準時点）にかんする分解式の対照表

①総分散	${}^{0}\sigma^2$ ○	$\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{0}k_1,{}^{0}k_2,\cdots\cdots,{}^{0}k_m}({}^{0}x_{ij}-\overline{\overline{{}^{0}x}})^2}{{}^{0}N}$ ○
②級内変動	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}{}^{0}\sigma_i{}^2$ □	$\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{0}k_1,{}^{0}k_2,\cdots\cdots,{}^{0}k_m}({}^{0}x_{ij}-\overline{{}^{0}x_i})^2}{{}^{0}N}$ □
③級間変動	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}({}^{0}\sigma^2-{}^{0}\sigma_i{}^2)$ △	$\frac{\sum_{i=1}^{m}{}^{0}k_i(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{\overline{{}^{0}x}})^2}{{}^{0}N}$ △

（出所）木村（2009b），木村（2009a）。

表3　総分散の差にかんする分解式の対照表

<table>
<tr><td colspan="2">①総分散の差</td><td colspan="2">$${}^t\sigma^2-{}^0\sigma^2$$
○</td><td colspan="2">$$\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{\overline{{}^tx}})^2}{{}^tN}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{{}^0N}$$
○</td></tr>
<tr><td colspan="2">②級内変動</td><td colspan="2">$$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,{}^t\sigma_i{}^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i{}^2$$
□</td><td colspan="2">$$\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx_i})^2}{{}^tN}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2}{{}^0N}$$
□</td></tr>
<tr><td rowspan="2">③広義の級間変動</td><td>④狭義の級間変動</td><td rowspan="2">$$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i{}^2)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i{}^2)$$
△</td><td>$$\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i{}^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i{}^2)\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$
◇</td><td rowspan="2">$$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2$$
△</td><td>$$\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^0k_i}{{}^0N}+\frac{{}^tk_i}{{}^tN}}{2}\right)$$
■</td></tr>
<tr><td>⑤構造的変化</td><td>$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i{}^2)+({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i{}^2)}{2}\right\}$$
▽</td><td>$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\}$$
▼</td></tr>
</table>

（出所）表2に同じ。

表4　総標準偏差（基準時点）にかんする分解式の対照表

①総標準偏差	$\sqrt{{}^0\sigma^2}$ ${}^0\sigma$ ◎	$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{{}^0N}}$ ◎
②級内変動	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i$	——
③級間変動	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)$	——

（出所）表2に同じ。

表 5　総標準偏差の差にかんする分解式の対照表

①差		${}^t\sigma-{}^0\sigma$					
欄の記号		(a)		(b)		(c)	
②級内変動		$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}{}^t\sigma_i-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i$ ◎		$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}{}^t\sigma_i{}^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i{}^2\right)$ ○		$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\ldots\ldots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx_i})^2}{{}^tN}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\ldots\ldots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2}{{}^0N}\right\}$ ○	
③広義の級間変動	④狭義の級間変動	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)$ □	$\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$ ◇	$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)\right\}$ ■	$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$ ▲	$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}$ ■	$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^0k_i}{{}^0N}+\frac{{}^tk_i}{{}^tN}}{2}\right)$ ▽
	⑤構造的変化		$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)+({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)}{2}\right\}$ △		$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)+({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)}{2}\right\}$ ▼		$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\}$ ●

（出所）表 2 に同じ。

に丸や三角などの印を記入した。同一の印は，それに対応する要因にかんして計算される寄与分が一致したことを示す。また，異なった印は計算結果の不一致を示す。

1．分散の分解

(1)　総分散の分解[3)]

①　総分散そのもの

基準時点(0)における総分散 ${}^0\sigma^2$ は，その定義により，

$$ {}^0\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{{}^0N} \tag{1}$$

である。よって，計算結果は一致する。このことは，比較時点(t)についても成立する。

②　級内変動

基準時点において

$$ \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i{}^2=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2}{{}^0N} \tag{2}$$

が成立し，2種類の分解式の計算結果が一致することの証明は次のとおりである。

分散の定義式により，第 i 階級の分散（階級別分散）は

$$ {}^0\sigma_i{}^2=\frac{1}{{}^0k_i}\sum_{j=1}^{{}^0k_i}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2$$

である。上式の辺々を ${}^0k_i$ 倍すると，

$$ {}^0k_i{}^0\sigma_i{}^2=\sum_{j=1}^{k_i}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2$$

を得る。

ここで，m 個ある全階級にかんして上式の総和をもとめると，

$$ \sum_{i=1}^{m}{}^0k_i{}^0\sigma_i{}^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2$$

となる。そして，上式の辺々を基準時点における総個数 ${}^0N$ で割ると，次のようになる。

$$ \frac{\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i{}^0\sigma_i{}^2}{{}^0N}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2}{{}^0N}$$

$$ \therefore\quad \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i{}^2=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2}{{}^0N}$$

(2)［再掲］

よって，級内変動の値はつねに一致する。このことは，比較時点についても成立する。

③　級間変動

2種類の分解式（表2）は，いずれも総分散が級内変動と級間変動に分解されることを示している（総分散＝級内変動＋級間変動）。その分解式について，総分散と級内変動が等しいことは上の①と②で示したとおりである。したがって，総分散と級内変動の差としてあたえられる級間変動も相等しく，基準時点にかんする2種類の分解式においては

$$ \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i{}^2)=\frac{\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\,(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{{}^0N} \tag{3}$$

が成立する。このことは，比較時点についても成立する。

(2)　総分散の差の分解[4)]

1．(1)①～③により，比較時点と基準時点にかんする統計量は，2種類の分解式において一致することが明らかになった。このために，総分散の差の分解式についても，次の①～③が成立し，2種類の分解式の計算結果は一致する。

①　総分散そのもの

$$ {}^t\sigma^2-{}^0\sigma^2 =\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{\overline{{}^tx}})^2}{{}^tN}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{{}^0N} \tag{4}$$

②　級内変動

$$ \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,{}^t\sigma_i{}^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i{}^2 =\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx_i})^2}{{}^tN}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2}{{}^0N} \tag{5}$$

3）表2参照。

4）表3参照。

③　広義の級間変動

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i{}^2)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i{}^2)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2 \tag{6}$$

④　狭義の級間変動

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i{}^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i{}^2)\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^0k_i}{{}^0N}+\frac{{}^tk_i}{{}^tN}}{2}\right) \tag{7}$$

が成立するかどうかについて，以下で検討する。

分散の定義により，比較時点(t)と基準時点(0)における総分散 ${}^t\sigma^2$，${}^0\sigma^2$ と階級別分散 ${}^t\sigma_i{}^2$，${}^0\sigma_i{}^2$ は次のようになる（表 1 参照）。

$$\begin{cases} {}^t\sigma^2=\dfrac{1}{{}^tN}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{\overline{{}^tx}})^2 \\ {}^0\sigma^2=\dfrac{1}{{}^0N}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}})^2 \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} {}^t\sigma_i{}^2=\dfrac{1}{{}^tk_i}\displaystyle\sum_{j=1}^{{}^tk_i}({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx_i})^2 \\ {}^0\sigma_i{}^2=\dfrac{1}{{}^0k_i}\displaystyle\sum_{j=1}^{{}^0k_i}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2 \end{cases} \tag{9}$$

(8)式と(9)式を(7)式の左辺に代入すると，次式を得る。

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i{}^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i{}^2)\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left[\left\{\frac{1}{{}^tN}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-\frac{1}{{}^tk_i}\sum_{j=1}^{{}^tk_i}({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx_i})^2\right\}\right.$$
$$-\left\{\frac{1}{{}^0N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{{}^0k_i}\sum_{j=1}^{{}^0k_i}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2\right\}\right]\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right) \tag{10}$$

(10)式を整理するために，すでに明らかになっている関係式[5]から次式を誘導する。

$$\begin{cases} \dfrac{1}{{}^tN}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{\overline{{}^tx}})^2=\overline{\overline{{}^tx^2}}-(\overline{\overline{{}^tx}})^2 \\ \dfrac{1}{{}^0N}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}})^2=\overline{\overline{{}^0x^2}}-(\overline{\overline{{}^0x}})^2 \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{{}^tk_i}\displaystyle\sum_{j=1}^{{}^tk_i}({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx_i})^2=\overline{{}^tx_i{}^2}-(\overline{{}^tx_i})^2 \\ \dfrac{1}{{}^0k_i}\displaystyle\sum_{j=1}^{{}^0k_i}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2=\overline{{}^0x_i{}^2}-(\overline{{}^0x_i})^2 \end{cases} \tag{12}$$

(11)式と(12)式を(10)式の右辺に代入すると，(10)式は次のようになる。

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i{}^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i{}^2)\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left[\left\{(\overline{\overline{{}^tx^2}}-(\overline{\overline{{}^tx}})^2)-(\overline{{}^tx_i{}^2}-(\overline{{}^tx_i})^2)\right\}\right.$$
$$\left.-\left\{(\overline{\overline{{}^0x^2}}-(\overline{\overline{{}^0x}})^2)-(\overline{{}^0x_i{}^2}-(\overline{{}^0x_i})^2)\right\}\right]\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left[\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+2\,\overline{{}^tx_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}-2(\overline{\overline{{}^tx}})^2\right.\right.$$
$$\left.+\overline{\overline{{}^tx^2}}-\overline{{}^tx_i{}^2}\right\}-\left\{(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2+2\overline{{}^0x_i}\cdot\overline{\overline{{}^0x}}-2(\overline{\overline{{}^0x}})^2\right.$$
$$\left.\left.+\overline{\overline{{}^0x^2}}-\overline{{}^0x_i{}^2}\right\}\right]\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left[\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}+\left\{2\,\overline{{}^tx_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}\right.\right.$$
$$\left.-2(\overline{\overline{{}^tx}})^2+\overline{\overline{{}^tx^2}}-\overline{{}^tx_i{}^2}\right\}-\left\{2\,\overline{{}^0x_i}\cdot\overline{\overline{{}^0x}}-2(\overline{\overline{{}^0x}})^2\right.$$
$$\left.\left.+\overline{\overline{{}^0x^2}}-\overline{{}^0x_i{}^2}\right\}\right]\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

---

5) この関係式とは次の恒等式を指す（木村(2009a)，p.147 参照）。

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{\overline{{}^tx}})^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}{}^tx_{ij}{}^2-\frac{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}{}^tx_{ij}\right)^2}{{}^tN}$$

この恒等式の両辺を ${}^tN$ で割り，その右辺を整理すると，

$$\frac{1}{{}^tN}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{\overline{{}^tx}})^2$$
$$=\frac{1}{{}^tN}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}{}^tx_{ij}{}^2-\frac{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}{}^tx_{ij}\right)^2}{{}^tN}\right\}$$
$$=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}{}^tx_{ij}{}^2}{{}^tN}-\left(\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}{}^tx_{ij}}{{}^tN}\right)^2$$
$$=\overline{\overline{{}^tx^2}}-\left(\frac{{}^tN\cdot\overline{\overline{{}^tx}}}{{}^tN}\right)^2$$
$$=\overline{\overline{{}^tx^2}}-(\overline{\overline{{}^tx}})^2$$

を得る。よって，比較時点にかんする(11)式が誘導される。(12)式についても同様である。

$$=\sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2-\left(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\left[\left\{2\,\overline{{}^tx_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}-2\left(\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2+\overline{\overline{{}^tx^2}}-\overline{{}^tx_i^2}\right\}-\left\{2\,\overline{{}^0x_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}-2\left(\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2+\overline{\overline{{}^0x^2}}-\overline{{}^0x_i^2}\right\}\right]\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right) \tag{13}$$

(13)式において

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\left\{2\,\overline{{}^tx_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}-2\left(\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2+\overline{\overline{{}^tx^2}}-\overline{{}^tx_i^2}\right\}-\left\{2\,\overline{{}^0x_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}-2\left(\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2+\overline{\overline{{}^0x^2}}-\overline{{}^0x_i^2}\right\}\right]\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)=0 \tag{14}$$

のとき，

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\left({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2\right)-\left({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2\right)\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2-\left(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^0k_i}{{}^0N}+\frac{{}^tk_i}{{}^tN}}{2}\right)$$

(7)［再掲］

が成立し，狭義の級間変動は一致する。

他方で，(14)式が満たされず，

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\left\{2\,\overline{{}^tx_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}-2\left(\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2+\overline{\overline{{}^tx^2}}-\overline{{}^tx_i^2}\right\}-\left\{2\,\overline{{}^0x_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}-2\left(\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2+\overline{\overline{{}^0x^2}}-\overline{{}^0x_i^2}\right\}\right]\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)\neq 0$$

となるとき，(7)式は成立せず，

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\left({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2\right)-\left({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2\right)\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$
$$\neq\sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2-\left(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^0k_i}{{}^0N}+\frac{{}^tk_i}{{}^tN}}{2}\right)$$

であり，狭義の級間変動は一致しない。

⑤　構造的変化

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{\left({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2\right)+\left({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2\right)}{2}\right\}$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{\left(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2+\left(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2}{2}\right\} \tag{15}$$

が成立するかどうかを検討する。一般に，構造的変化は

広義の級間変動－狭義の級間変動

であたえられる。

1. ⑵③で述べたように，総分散の差について誘導される2種類の分解式（表3）を比較すると，③広義の級間変動の値は等しいことが分かる（⑹式参照)。他方で，2つの分解式があたえる④狭義の級間変動は，

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\left\{2\,\overline{{}^tx_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}-2\left(\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2+\overline{\overline{{}^tx^2}}-\overline{{}^tx_i^2}\right\}-\left\{2\,\overline{{}^0x_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}-2\left(\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2+\overline{\overline{{}^0x^2}}-\overline{{}^0x_i^2}\right\}\right]\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)=0$$

(14)［再掲］

が満たされるとき，同一の値となる（1. ⑵④)。

したがって，③広義の級間変動，④狭義の級間変動，⑤構造的変化の三者の数学的関係（すなわち，④と⑤の和が③であること）により，(14)式が満たされるとき，2種類の分解式があたえる⑤構造的変化の値は等しく，

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{\left({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2\right)+\left({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2\right)}{2}\right\}$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{\left(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2+\left(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2}{2}\right\}$$

(15)［再掲］

が成立する。

他方で，

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\left\{2\,\overline{{}^tx_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}-2\left(\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2+\overline{\overline{{}^tx^2}}-\overline{{}^tx_i^2}\right\}-\left\{2\,\overline{{}^0x_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}-2\left(\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2+\overline{\overline{{}^0x^2}}-\overline{{}^0x_i^2}\right\}\right]\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)\neq 0$$

のとき，(15)式は成立せず，

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{\left({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2\right)+\left({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2\right)}{2}\right\}$$
$$\neq\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{\left(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2+\left(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2}{2}\right\}$$

となり，各々の分解式から計算される構造的変化の値は異なる。

2. 標準偏差の分解

(1) 総標準偏差の分解[6)]

① 総標準偏差そのもの

総分散の定義式（表 1 参照）により，次式は恒等的に等しい。

$$^0\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{^0N} \quad (1)[再掲]$$

他方で，分散(σ^2)と標準偏差(σ)との間の数学的関係により，次式を得る。

$$\sqrt{^0\sigma^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{^0N}} \quad (16)$$

$$^0\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{^0N}} \quad (16)'$$

よって総標準偏差の値は一致する。

② 級内変動

これについては対照すべき分解式がない。

③ 級間変動

これについても対照すべき分解式がない。

(2) 総標準偏差の差の分解（その 1：(a)欄と(b)欄）[7)]

① 総標準偏差そのもの

1. (1)①で述べたように，いずれの分解式においても総分散は一致しているので（(1)式参照），総標準偏差（総分散の平方根）の差，すなわち，

$^t\sigma-{}^0\sigma$

は，分解式の如何にかかわらず，一致する。

② 級内変動

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{^tk_i}{^tN}{}^t\sigma_i-\sum_{i=1}^{m}\frac{^0k_i}{^0N}{}^0\sigma_i$$

$$=\frac{1}{^t\sigma+{}^0\sigma}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{^tk_i}{^tN}{}^t\sigma_i{}^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{^0k_i}{^0N}{}^0\sigma_i{}^2\right) \quad (17)$$

が成立するかどうかを考察する。そのために，(17)式の右辺を次のように変形する。

$$\frac{1}{^t\sigma+{}^0\sigma}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{^tk_i}{^tN}{}^t\sigma_i{}^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{^0k_i}{^0N}{}^0\sigma_i{}^2\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{^tk_i}{^tN}{}^t\sigma_i{}^2\frac{1}{^t\sigma+{}^0\sigma}-\sum_{i=1}^{m}\frac{^0k_i}{^0N}{}^0\sigma_i{}^2\frac{1}{^t\sigma+{}^0\sigma}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{^tk_i}{^tN}{}^t\sigma_i\cdot{}^t\sigma_i\frac{1}{^t\sigma+{}^0\sigma}-\sum_{i=1}^{m}\frac{^0k_i}{^0N}{}^0\sigma_i\cdot{}^0\sigma_i\frac{1}{^t\sigma+{}^0\sigma}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{^tk_i}{^tN}{}^t\sigma_i\frac{^t\sigma_i}{^t\sigma+{}^0\sigma}-\sum_{i=1}^{m}\frac{^0k_i}{^0N}{}^0\sigma_i\frac{^0\sigma_i}{^t\sigma+{}^0\sigma} \quad (18)$$

ここで

$$\begin{cases}\dfrac{^t\sigma_i}{^t\sigma+{}^0\sigma}=1\\[2ex]\dfrac{^0\sigma_i}{^t\sigma+{}^0\sigma}=1\end{cases}$$

$$\therefore {}^t\sigma+{}^0\sigma={}^t\sigma_i={}^0\sigma_i \quad (19)$$

が満たされるとき，(18)式の右辺は

$$\frac{1}{^t\sigma+{}^0\sigma}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{^tk_i}{^tN}{}^t\sigma_i{}^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{^0k_i}{^0N}{}^0\sigma_i{}^2\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{^tk_i}{^tN}{}^t\sigma_i-\sum_{i=1}^{m}\frac{^0k_i}{^0N}{}^0\sigma_i$$

となる。すなわち，(19)式のもとでは，

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{^tk_i}{^tN}{}^t\sigma_i-\sum_{i=1}^{m}\frac{^0k_i}{^0N}{}^0\sigma_i$$

$$=\frac{1}{^t\sigma+{}^0\sigma}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{^tk_i}{^tN}{}^t\sigma_i{}^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{^0k_i}{^0N}{}^0\sigma_i{}^2\right) \quad (17)[再掲]$$

が成立し，級内変動は一致する。

他方で，(19)式が満たされなければ，(17)式は成立せず，

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{^tk_i}{^tN}{}^t\sigma_i-\sum_{i=1}^{m}\frac{^0k_i}{^0N}{}^0\sigma_i$$

$$\neq\frac{1}{^t\sigma+{}^0\sigma}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{^tk_i}{^tN}{}^t\sigma_i{}^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{^0k_i}{^0N}{}^0\sigma_i{}^2\right)$$

となり，級内変動は一致しない。

③ 広義の級間変動

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{^tk_i}{^tN}({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-\sum_{i=1}^{m}\frac{^0k_i}{^0N}({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)$$

$$=\frac{1}{^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{^tk_i}{^tN}({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i{}^2)-\sum_{i=1}^{m}\frac{^0k_i}{^0N}({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i{}^2)\right\} \quad (20)$$

が成立するかどうかを以下で検討する。そのために，(20)式の右辺を次のように変形する。

$$\frac{1}{^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{^tk_i}{^tN}({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i{}^2)-\sum_{i=1}^{m}\frac{^0k_i}{^0N}({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i{}^2)\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{^tk_i}{^tN}({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i{}^2)\frac{1}{^t\sigma+{}^0\sigma}-\sum_{i=1}^{m}\frac{^0k_i}{^0N}({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i{}^2)\frac{1}{^t\sigma+{}^0\sigma}$$

---

6) 表 4 参照。

7) 表 5 参照。

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)({}^t\sigma+{}^t\sigma_i)\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)({}^0\sigma+{}^0\sigma_i)\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)\frac{{}^t\sigma+{}^t\sigma_i}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)\frac{{}^0\sigma+{}^0\sigma_i}{{}^t\sigma+{}^0\sigma} \tag{21}$$

(21)式において，次の条件

$$\begin{cases}\dfrac{{}^t\sigma+{}^t\sigma_i}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}=1\\[2ex]\dfrac{{}^0\sigma+{}^0\sigma_i}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}=1\end{cases} \tag{22}$$

すなわち，

$$\begin{cases}{}^t\sigma+{}^t\sigma_i={}^t\sigma+{}^0\sigma\\{}^0\sigma+{}^0\sigma_i={}^t\sigma+{}^0\sigma\end{cases} \tag{22$'$}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}{}^t\sigma_i={}^0\sigma\\{}^0\sigma_i={}^t\sigma\end{cases} \tag{22$''$}$$

が満たされるとき，(20)式の右辺は

$$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma-{}^0\sigma_i) \tag{20$'$}$$

となる。(20)′式の右辺は(20)式の左辺と同一である（(20)′式は(20)式と同一である)。このゆえに，(22)″式が満たされれば，(20)′式が成立し，結局，(20)式が成立して，広義の級間変動は一致する。

他方で，(22)″式が満たされないときには，(20)式は成立することなく，

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)$$

$$\neq\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)\right\}$$

となり，広義の級間変動は一致しない。

④　狭義の級間変動

$$\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)\}\left(\frac{\dfrac{{}^tk_i}{{}^tN}+\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)\}\left(\frac{\dfrac{{}^tk_i}{{}^tN}+\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right) \tag{23}$$

が成立するかどうかを以下で検討する。そのために，(23)式の右辺を次のように変形する。

$$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)\}\left(\frac{\dfrac{{}^tk_i}{{}^tN}+\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)\}\left(\frac{\dfrac{{}^tk_i}{{}^tN}+\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\right\}\left(\frac{\dfrac{{}^tk_i}{{}^tN}+\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)\frac{{}^t\sigma+{}^t\sigma_i}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}-({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)\frac{{}^0\sigma+{}^0\sigma_i}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\right\}\left(\frac{\dfrac{{}^tk_i}{{}^tN}+\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right) \tag{24}$$

ここで，

$$\begin{cases}\dfrac{{}^t\sigma+{}^t\sigma_i}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}=1\\[2ex]\dfrac{{}^0\sigma+{}^0\sigma_i}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}=1\end{cases} \tag{25}$$

が満たされるとき，換言すれば，

$$\begin{cases}{}^t\sigma+{}^t\sigma_i={}^t\sigma+{}^0\sigma\\{}^0\sigma+{}^0\sigma_i={}^t\sigma+{}^0\sigma\end{cases} \tag{25$'$}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}{}^t\sigma_i={}^0\sigma\\{}^0\sigma_i={}^t\sigma\end{cases} \tag{25$''$}$$

となるときには，(24)式（(23)式の右辺）は

$$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)\right\}\left(\frac{\dfrac{{}^tk_i}{{}^tN}+\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)\}\left(\frac{\dfrac{{}^tk_i}{{}^tN}+\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right) \tag{23$'$}$$

となり，(23)式の左辺と等しくなる。したがって，(25)″式が成立するとき，

$$\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)\}\left(\frac{\dfrac{{}^tk_i}{{}^tN}+\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)\}\left(\frac{\dfrac{{}^tk_i}{{}^tN}+\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

(23)［再掲］

が成立して，狭義の級間変動は一致する。

他方で，(25)″式が成立しないならば，(23)式は成立せず，

$$\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)\}\left(\frac{\dfrac{{}^tk_i}{{}^tN}+\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

$$\neq\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

となり，狭義の級間変動は一致しない。

⑤　構造的変化

構造的変化は

広義の級間変動－狭義の級間変動

である。2 種類の分解式において，③広義の級間変動と④狭義の級間変動がいずれも等しければ，⑤構造的変化は同じ値となる。

③広義の級間変動が等しいための条件は(22)″式である（2.⑵③)。他方で，④狭義の級間変動が等しいため条件は(25)″式（2.⑵④）である。これら 2 つの条件式（(22)″式と(25)″式）は同一である。これを以下に掲げる。

$$\begin{cases}{}^t\sigma_i={}^0\sigma\\ {}^0\sigma_i={}^0\sigma\end{cases}\qquad(26)\,[(22)''\text{式と}(25)''\text{式の再掲}]$$

(26)式が満たされれば，③広義の級間変動と④狭義の級間変動は等しい。このとき，2 種類の分解式があたえる⑤構造的変化も等しくなる。すなわち，

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)+({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)+({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)}{2}\right\}\qquad(27)$$

が成立する。

他方で，(26)式が満たされないときには，(27)式は成立せず，

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)+({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)}{2}\right\}$$

$$\neq\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)+({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)}{2}\right\}$$

となり，構造的変化は一致しない。

⑶　総標準偏差の差の分解（その 2：⒝欄と⒞欄）[8)]

①　総標準偏差そのもの

基準時点と比較時点における分解前の総標準偏差をあたえる数式は，どの分解式についても同一なので，総標準偏差の差，すなわち，

$${}^t\sigma-{}^0\sigma$$

は一致する。

②　級内変動

1.⑵②で述べたように，次の等式が成立している（表 3 参照)。

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,{}^t\sigma_i^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i^2$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx_i})^2}{{}^tN}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2}{{}^0N}$$

(5)［再掲］

上式の辺々に$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}$を掛ければ，

$$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,{}^t\sigma_i^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i^2\right)$$

$$=\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx_i})^2}{{}^tN}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2}{{}^0N}\right\}$$

(28)

となり，2 つの分解式は同一の値をあたえることが示される。

③　広義の級間変動

1.⑵③で述べたように，広義の級間変動については，2 つの分解式の間で

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2$$

(6)［再掲］

が成立する（表 3 参照)。

そこで，上式の辺々に$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}$を掛ければ，

$$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)\right\}$$

$$=\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}$$

(29)

となり，2 つの分解式は同じ値をあたえることが示される。

8）表 5 参照。

④　狭義の級間変動

$$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^{\,2})-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^{\,2})\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^0k_i}{{}^0N}+\frac{{}^tk_i}{{}^tN}}{2}\right) \quad (30)$$

が成立するかどうかを検討する。

1．⑵④において，

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\left\{2\overline{{}^tx_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}-2(\overline{\overline{{}^tx}})^2+\overline{\overline{{}^tx^2}}-\overline{{}^tx_i^{\,2}}\right\}-\left\{2\overline{{}^0x_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}-2(\overline{\overline{{}^0x}})^2+\overline{\overline{{}^0x^2}}-\overline{{}^0x_i^{\,2}}\right\}\right]\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)=0$$

(14)［再掲］

のとき，

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^{\,2})-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^{\,2})\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^0k_i}{{}^0N}+\frac{{}^tk_i}{{}^tN}}{2}\right)$$

(7)［再掲］

が成立し，

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\left\{2\overline{{}^tx_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}-2(\overline{\overline{{}^tx}})^2+\overline{\overline{{}^tx^2}}-\overline{{}^tx_i^{\,2}}\right\}-\left\{\{2\overline{{}^0x_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}-2(\overline{\overline{{}^0x}})^2+\overline{\overline{{}^0x^2}}-\overline{{}^0x_i^{\,2}}\right\}\right]\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)\neq 0$$

のとき，(7)式は成立しないことが証明された。

ここで，(14)式が満たされていると仮定した上で，(7)式の辺々に$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}$を掛けると，

$$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^{\,2})-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^{\,2})\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^0k_i}{{}^0N}+\frac{{}^tk_i}{{}^tN}}{2}\right)$$

(30)［再掲］

を得る。したがって，(14)式が満たされれば，(30)式が成立し，狭義の級間変動は一致する。

これにたいして，

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\left\{2\overline{{}^tx_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}-2(\overline{\overline{{}^tx}})^2+\overline{\overline{{}^tx^2}}-\overline{{}^tx_i^{\,2}}\right\}-\left\{2\overline{{}^0x_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}-2(\overline{\overline{{}^0x}})^2+\overline{\overline{{}^0x^2}}-\overline{{}^0x_i^{\,2}}\right\}\right]\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)\neq 0$$

のときには，(30)式が成立せず，

$$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^{\,2})-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^{\,2})\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

$$\neq\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^0k_i}{{}^0N}+\frac{{}^tk_i}{{}^tN}}{2}\right)$$

となり，狭義の級間変動は一致しない。

⑤　構造的変化

構造的変化は

広義の級間変動－狭義の級間変動

である。ここで検討している2種類の分解式において③広義の級間変動が相等しいことは，2．⑶③で証明した（(29)式)。また，2種類の分解式において

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\left\{2\overline{{}^tx_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}-2(\overline{\overline{{}^tx}})^2+\overline{\overline{{}^tx^2}}-\overline{{}^tx_i^{\,2}}\right\}-\left\{2\overline{{}^0x_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}-2(\overline{\overline{{}^0x}})^2+\overline{\overline{{}^0x^2}}-\overline{{}^0x_i^{\,2}}\right\}\right]\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)=0$$

(14)［再掲］

が満たされれば，④狭義の級間変動が等しいこと（(7)式が成立すること）は上で述べた（2．⑶④)。

以上から(14)式が満たされるとき，2種類の分解式が与える構造的変化は相等しく，

$$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^{\,2})+({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^{\,2})}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\} \quad (31)$$

が成立し，そうでない場合には，

$$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^{\,2})+({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^{\,2})}{2}\right\}$$

$$\neq\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\}$$

となり，(31)式は成立しない。

⑷　総標準偏差の差の分解（その 3：⒜欄と⒞欄）[9)]

①　総標準偏差そのもの

基準時点と比較時点における分解前の総標準偏差をあたえる数式は，どの分解式についても同一なので，総標準偏差の差，すなわち，

$$^t\sigma-{}^0\sigma$$

は一致する。

②　級内変動

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,{}^t\sigma_i-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i$$

$$=\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx_i})^2}{{}^tN}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2}{{}^0N}\right\} \quad (32)$$

が成立するかどうかを検討する。

$$\begin{cases}\dfrac{{}^t\sigma_i}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}=1\\[2ex]\dfrac{{}^0\sigma_i}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}=1\end{cases}$$

$$\therefore {}^t\sigma+{}^0\sigma={}^t\sigma_i={}^0\sigma_i \quad (19)［再掲］$$

が満たされるとき，

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,{}^t\sigma_i-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i$$

$$=\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,{}^t\sigma_i{}^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i{}^2\right) \quad (17)［再掲］$$

が成立することはすでに証明した（2.⑵②）。

$$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,{}^t\sigma_i{}^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i{}^2\right)$$

$$=\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx_i})^2}{{}^tN}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2}{{}^0N}\right\} \quad (28)［再掲］$$

が恒等式であることも証明済みである（2.⑶②）。以上から，(19)式が満たされるとき，(32)式が成立して，級内変動は一致する。

他方で，(19)式が満たされないときは，(32)式は成立せず，

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,{}^t\sigma_i-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i$$

$$\neq\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx_i})^2}{{}^tN}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2}{{}^0N}\right\}$$

となり，級内変動は一致しない。

③　広義の級間変動

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)$$

$$=\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\} \quad (33)$$

が成立するかどうかを検討する。

すでに証明したように（2.⑵③），次の条件

$$\begin{cases}{}^t\sigma_i={}^0\sigma\\ {}^0\sigma_i={}^t\sigma\end{cases} \quad (22)''［再掲］$$

が満たされるとき，

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)$$

$$=\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i{}^2)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i{}^2)\right\} \quad (20)［再掲］$$

が成立する。

他方で，

$$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i{}^2)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i{}^2)\right\}$$

$$=\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\} \quad (29)［再掲］$$

が恒等式であることは証明済みである（2.⑶③）。したがって，(22)″式が満たされるとき，(20)式の左辺と(29)式の右辺が等しくなり，

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)$$

$$=\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\} \quad (33)［再掲］$$

が成立し，広義の級間変動は一致する。

また，(22)″式が満たされないときには，(33)式は成立せず，

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)$$

$$\neq\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}$$

となり，広義の級間変動は一致しない。

9）表 5 参照。

④　狭義の級間変動

$$\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^0k_i}{{}^0N}+\frac{{}^tk_i}{{}^tN}}{2}\right) \tag{34}$$

が成立するかどうかを検討する。そのために，(34)式の左辺を次のように変形する。

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)\frac{{}^t\sigma+{}^t\sigma_i}{{}^t\sigma+{}^t\sigma_i}\cdot\frac{{}^t\sigma+{}^0\sigma}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\right.$$

$$\left.-({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)\frac{{}^0\sigma+{}^0\sigma_i}{{}^0\sigma+{}^0\sigma_i}\cdot\frac{{}^t\sigma+{}^0\sigma}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)\frac{{}^t\sigma+{}^0\sigma}{{}^t\sigma+{}^t\sigma_i}\right.$$

$$\left.-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)\frac{{}^t\sigma+{}^0\sigma}{{}^0\sigma+{}^0\sigma_i}\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right) \tag{35}$$

ここで，

$$\begin{cases}\dfrac{{}^t\sigma+{}^0\sigma}{{}^t\sigma+{}^t\sigma_i}=1\\[2ex]\dfrac{{}^t\sigma+{}^0\sigma}{{}^0\sigma+{}^0\sigma_i}=1\end{cases} \tag{36}$$

すなわち，

$$\begin{cases}{}^t\sigma+{}^0\sigma={}^t\sigma+{}^t\sigma_i\\{}^t\sigma+{}^0\sigma={}^0\sigma+{}^0\sigma_i\end{cases} \tag{36$'$}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}{}^0\sigma={}^t\sigma_i\\{}^t\sigma={}^0\sigma_i\end{cases} \tag{36$''$}$$

と仮定する。このとき，(35)式は

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right) \tag{37}$$

となる。

ところで，すでに述べたように，

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\left\{2\overline{{}^tx_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}-2(\overline{\overline{{}^tx}})^2+\overline{\overline{{}^tx^2}}-\overline{{}^tx_i^2}\right\}-\left\{2\overline{{}^0x_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-2(\overline{\overline{{}^0x}})^2+\overline{\overline{{}^0x^2}}-\overline{{}^0x_i^2}\right\}\right]\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)=0$$

(14)［再掲］

が満たされるとき，

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^0k_i}{{}^0N}+\frac{{}^tk_i}{{}^tN}}{2}\right)$$

(7)［再掲］

が成立する（1. ⑵④）。この(7)式の辺々に $\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}$ を掛けると次式を得る。

$$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^0k_i}{{}^0N}+\frac{{}^tk_i}{{}^tN}}{2}\right)$$

(30)［再掲］

(30)式と(37)式より，

$$\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^0k_i}{{}^0N}+\frac{{}^tk_i}{{}^tN}}{2}\right)$$

(34)［再掲］

となる。

以上から，(34)式が成立して，２種類の級間変動（狭義）が一致するには，(30)式が成立するための条件である次式，すなわち

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\left\{2\overline{{}^tx_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}-2(\overline{\overline{{}^tx}})^2+\overline{\overline{{}^tx^2}}-\overline{{}^tx_i^2}\right\}-\left\{2\overline{{}^0x_i}\cdot\overline{\overline{{}^tx}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-2(\overline{\overline{{}^0x}})^2+\overline{\overline{{}^0x^2}}-\overline{{}^0x_i^2}\right\}\right]\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)=0$$

(14)［再掲］

と(37)式が成立するための条件である次式，すなわち

$$\begin{cases}{}^0\sigma={}^t\sigma_i\\{}^t\sigma={}^0\sigma_i\end{cases}\qquad(36)''[再掲]$$

が同時に満たされていなければならないことになる。

他方で，そのような条件が満たされない場合には，

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

$$\neq\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^0k_i}{{}^0N}+\frac{{}^tk_i}{{}^tN}}{2}\right)$$

となり，(34)式が成立せず，狭義の級間変動は一致しない。

⑤　構造的変化

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)+({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\}\qquad(38)$$

が成立するかどうかを検討する。

繰り返し指摘してきたように，構造的変化は

広義の級間変動－狭義の級間変動

である。広義の級間変動が等しいための条件((22)″式）とともに狭義の級間変動が等しいための条件（(14)式と(36)″式）が満たされるならば，(38)式は成立する。そして，構造的変化は一致する。

他方で，そのような条件が満たされないならば，(38)式は成立せず，

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)+({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)}{2}\right\}$$

$$\neq\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\}$$

となり，構造的変化は一致しない。

おわりに

表2～表5には，計算結果の一致と不一致を丸や三角などの印を用いて示した。そして，それぞれの計算結果が一致するための条件を考察した。ここでは，その検討結果を箇条書きに要約する。

第1に，総分散については，2つの分解式が同一の値をあたえ，かつ，それにたいして果たす①級内変動と②級間変動の寄与についても同一の値をあたえる。

第2に，総分散の差については，2つの分解式があり，どの分解式によっても①級内変動と②広義の級間変動については同一の値があたえられる。しかし，③狭義の級間変動と④構造的変化については，一般に同一の値はあたえられない。換言すれば，所定の条件が満たされなければ，採用する分解式に応じて，寄与分の値は異なる。このことを勘案すると，広義の級間変動をさらに分解することの実質的意義は奈辺にあるかが検討課題として俎上に置かれることになる。

第3に，総標準偏差については，分解式として導出されたのは1種類だけである。それ以外にも分解式が誘導される可能性を否定するものではないが，さしあたり，対照すべき分解式はないと考えられる。

第4に，総標準偏差の差については，3種類の分解式が誘導された。検討の結果，分解された要因の寄与の規模を示す数値が必ずすべての分解式で一致するとは言い難いことが証明された。とくに，①狭義の級間変動と②構造的変化については，同一のデータを用いても，一般に，それぞれの分解式は異なった値を返す。換言すれば，計算結果が同一の値となるには，データの組が所定の条件を満たしている必要がある。このために，総標準偏差の差の分解式については，その適用に慎重であることがもとめられる。

〔付記〕本稿は，北海学園学術研究助成金（2010年度）の交付を受けた共同研究の成果の一部である。