

|      |                          |
|------|--------------------------|
| タイトル | くじ引きの問題の解法について(1)        |
| 著者   | 山本, 隆範                   |
| 引用   | 北海学園大学学園論集, 131: 123-128 |
| 発行日  | 2007-03-25               |

# くじ引きの問題の解法について(1)

山 本 隆 範\*

## 序 文

今回考えるくじ引きの問題は次の通りである。 $n$ 本のくじの中に当たりくじが $a$ 本ある。このくじを順に1本ずつ引くとき、順番によらずに各人の当たる確率は一定か否かという問題である。ただし引いたくじはもとに戻さないものとする。この問題は既に肯定的に解決されている。複数の解法が知られているが、短い証明の1つとしては、くじを $k$ 番目に引く人の当たる確率を $p_k$ とすれば、馬場良和 [26, pp.45-48] にもあるように

$$p_k = \frac{{}_{n-1}C_{a-1}}{{}_n C_a} = \frac{a}{n} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

と簡単である。まん中の項の分母は、 $a$ 本の当たりくじ(それを○で表す)と $n-a$ 本のはずれくじ(それを×で表す)からなる○と×のパターンの総数である。一方、分子は $k$ 番目にくじを引く人が当たりくじを引く場合の○と×のパターンの総数である。大関信雄・清水多門・福田途宏 [3, p.117], 岡部靖憲 [4, pp.22-23, 28, 31], 岡本和夫 [5, p.153], 清水良一 [12, pp.26-30], 砂田利一 [16, p.200], 洲之内治男・寺田文行・舟根智美 [17, pp.19, 129], 山本芳彦 [32, p.49] も参考になる。今回の目的は、鈴木丕章 [15] のように $p_k$ を条件付き確率の考え方と加法定理・乗法定理を使う方法で計算することである。それは栗田稔 [7] とは異なった解法である。以下の章のように進む限りこの方法では計算が複雑なため $(n, a, k)$ の $k$ が3以下の場合には寺田文行・本部均・村勢一郎 [22, p.925], 樋口禎一・森田康夫 [28, p.1090] に印刷されているが、一般の場合の計算が印刷されたものはないかも知れないので、念のため鈴木丕章 [15] をもとにして今回印刷することとなった。講義資料として読みやすくするために、 $a=1, a=2, a \geq 3$ の場合に分けて考えることにする。

## 第 1 章

この章では、 $a=1$ の場合を考える。即ち、 $n$ 本のくじの中に当たりくじが1本あるとき、これ

---

\* ) この研究の一部は平成17年度北海学園学術研究助成(一般研究)による。

を  $k$  番目に引く人の当たる確率  $p_k$  を求める。 $(n, a, k) = (5, 1, 2)$  の場合は荒木不二洋 [1, pp.186, 283] にある。 $(n, a, k) = (10, 1, k)$  の場合は大関信雄・清水多門・福田途宏 [3, pp.121, 150] にある。当たりを○, はずれを×で表す。 $a=1$  のときは, 次のように  $k$  が4以上であっても計算は複雑にならない。

1番目に引く人の当たる確率は,  $\bigcirc : p_1 = \frac{1}{n}$

2番目に引く人の当たる確率は,  $\times \bigcirc : p_2 = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$

3番目に引く人の当たる確率は,  $\times \times \bigcirc : p_3 = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}$

...

$k$  番目に引く人の当たる確率は,  $\underbrace{\times \dots \times}_{k-1 \text{個}} \bigcirc : p_k = \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n-k+2} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$

このように確率  $p_k$  は順番  $k$  によらず一定の値  $\frac{1}{n}$  であることがわかる。

## 第 2 章

この章では,  $a=2$  の場合を考える。即ち,  $n$  本のくじの中に当たりくじが2本あるとき, これを  $k$  番目に引く人の当たる確率  $p_k$  を求める。このように進む限り, 条件付き確率の考え方で解くとき, 計算がやや複雑になる。 $(n, a, k) = (5, 2, 2)$  の場合は鈴木輝雄 [14, pp.45-46] にある。このとき,

1番目に引く人の当たる確率は,  $\bigcirc : p_1 = \frac{2}{n}$

2番目に引く人の当たる確率は,  $\bigcirc \bigcirc, \times \bigcirc : p_2 = \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} = \frac{2}{n}$

3番目に引く人の当たる確率は,  $\bigcirc \times \bigcirc, \times \bigcirc \bigcirc, \times \times \bigcirc :$

$$p_3 = {}_2C_1 \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} + \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{2}{n-2} = \frac{2}{n}$$

$k \geq 4$  のとき,  $k$  番目に引く人の当たる確率  $p_k$  は,

|       | 1 | 2 | 3 | ..... | $k-2$ | $k-1$ | $k$ |
|-------|---|---|---|-------|-------|-------|-----|
| 1     | ○ | × | × | ..... | ×     | ×     | ○   |
| 2     | × | ○ | × | ..... | ×     | ×     | ○   |
| 3     | × | × | ○ | ..... | ×     | ×     | ○   |
| ⋮     | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ..... | ⋮     | ⋮     | ⋮   |
| $k-2$ | × | × | × | ..... | ○     | ×     | ○   |
| $k-1$ | × | × | × | ..... | ×     | ○     | ○   |
| $k$   | × | × | × | ..... | ×     | ×     | ○   |

という表より,

$$\begin{aligned} p_k &= {}_{k-1}C_1 \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n-k+2} \cdot \frac{1}{n-k+1} \\ &\quad + \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n-k+3} \cdot \frac{n-k}{n-k+2} \cdot \frac{2}{n-k+1} \\ &= \frac{2(k-1)}{n(n-1)} + \frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n} \end{aligned}$$

このように確率  $p_k$  は順番  $k$  によらず一定の値  $\frac{2}{n}$  であることがわかる。

### 第 3 章

この章では、 $a \geq 3$  の場合を考える。即ち、 $n$  本のくじの中に当たりくじが  $a$  本あるとき、これを  $k$  番目に引く人の当たる確率  $p_k$  を求める。 $p_1, p_2, p_3$  の計算は、寺田文行・本部均・村勢一郎 [22, p.925], 樋口禎一・森田康夫 [28, p.1090] にある。 $p_2$  の計算は、戸田宏・三輪辰郎・細川藤次 [23, p.44], 山本芳彦 [31, p.49] にある。このように進む限り、条件付き確率の考え方で解くとき、計算は更に複雑になる。

$(n, a, k) = (5, 3, 2)$  の場合は、大学自然科学研究会 [18, p.102] にある。 $(n, a, k) = (10, 3, 2)$  の場合は、飯高茂・松本幸夫 [2, p.94], 鈴木輝雄 [13, p.49], 高橋陸男 [19, p.46], 武隈良一 [20, p.40], 田代嘉宏 [21, pp.181-182], 新濃清志 [24, p.178], 矢野健太郎・田代嘉宏 [29, pp.151-152] にある。 $(n, a, k) = (10, 3, 3)$  の場合は、小平邦彦 [8, p.239], [9, p.65], 馬場良和 [26, pp.45-48] にある。 $(n, a, k) = (50, 5, 2)$  の場合は、橋本智雄 [25, pp.45-46] にある。 $(n, a, k) = (20, 5, 2)$  の場合は渡辺信三 [33, p.103] にある。 $(n, a, k) = (30, 7, 2)$  の場合は、樋口禎一・猪熊猛之 [27, p.13] にある。 $(n, a, k) = (n, a, 2)$  の場合は、岡本雅典・鈴木義一郎・杉山高一 [6, pp.35-36, 171], 児玉正憲 [10, pp.28-29], 矢野健太郎・茂木勇 [30, p.173] にある。

このとき,

$$1 \text{ 番目に引く人の当たる確率は, } \bigcirc : p_1 = \frac{a}{n}$$

$$2 \text{ 番目に引く人の当たる確率は, } \bigcirc\bigcirc, \times\bigcirc : p_2 = \frac{a}{n} \cdot \frac{a-1}{n-1} + \frac{n-a}{n} \cdot \frac{a}{n-1} = \frac{a}{n}$$

3 番目に引く人の当たる確率は,  $\bigcirc\bigcirc\bigcirc, \bigcirc\times\bigcirc, \times\bigcirc\bigcirc, \times\times\bigcirc :$

$$p_3 = \frac{a}{n} \cdot \frac{a-1}{n-1} \cdot \frac{a-2}{n-2} + {}_2C_1 \cdot \frac{a}{n} \cdot \frac{n-a}{n-1} \cdot \frac{a-1}{n-2} + \frac{n-a}{n} \cdot \frac{n-a-1}{n-1} \cdot \frac{a}{n-2} = \frac{a}{n}$$

$4 \leq k \leq \min\{a, n-a\}$  のとき、 $k$  番目に引く人の当たる確率  $p_k$  は,

|                      | 1 | 2 | 3 | ..... | $k-3$ | $k-2$ | $k-1$ | $k$ |
|----------------------|---|---|---|-------|-------|-------|-------|-----|
| 1通り                  | ○ | ○ | ○ | ..... | ○     | ○     | ○     | ○   |
| ${}_{k-1}C_1$ 通り     | ○ | ○ | ○ | ..... | ○     | ○     | ×     | ○   |
|                      | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ..... | ⋮     | ⋮     | ⋮     | ⋮   |
|                      | × | ○ | ○ | ..... | ○     | ○     | ○     | ○   |
| ${}_{k-1}C_2$ 通り     | ○ | ○ | ○ | ..... | ○     | ×     | ×     | ○   |
|                      | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ..... | ⋮     | ⋮     | ⋮     | ⋮   |
|                      | × | × | ○ | ..... | ○     | ○     | ○     | ○   |
| ⋮                    |   |   |   | ..... |       |       |       | ⋮   |
| ${}_{k-1}C_{k-2}$ 通り | ○ | × | × | ..... | ×     | ×     | ×     | ○   |
|                      | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ..... | ⋮     | ⋮     | ⋮     | ⋮   |
|                      | × | × | × | ..... | ×     | ×     | ○     | ○   |
| 1通り                  | × | × | × | ..... | ×     | ×     | ×     | ○   |

という表より,

$$\begin{aligned}
 p_k &= \frac{a}{n} \cdot \frac{a-1}{n-1} \cdot \frac{a-2}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{a-k+1}{n-k+1} \\
 &+ {}_{k-1}C_1 \cdot \frac{a}{n} \cdot \frac{a-1}{n-1} \cdot \frac{a-2}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{a-k+2}{n-k+2} \cdot \frac{n-a}{n-k+1} \\
 &+ {}_{k-1}C_2 \cdot \frac{a}{n} \cdot \frac{a-1}{n-1} \cdot \frac{a-2}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{a-k+3}{n-k+3} \cdot \frac{n-a}{n-k+2} \cdot \frac{n-a-1}{n-k+1} \\
 &+ \dots \dots \dots \\
 &+ {}_{k-1}C_\nu \cdot \frac{a}{n} \cdot \frac{a-1}{n-1} \cdot \frac{a-2}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{a-k+\nu+1}{n-k+\nu+1} \cdot \frac{n-a}{n-k+\nu} \cdot \frac{n-a-1}{n-k+\nu-1} \cdot \dots \cdot \frac{n-a-\nu+1}{n-k+1} \\
 &+ \dots \dots \dots \\
 &+ {}_{k-1}C_{k-1} \cdot \frac{a}{n} \cdot \frac{n-a}{n-1} \cdot \frac{n-a-1}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{n-a-k+2}{n-k+1} \\
 &= \frac{a}{n} \sum_{\nu=0}^{k-1} {}_{k-1}C_\nu \frac{(a-1)!}{(a-k+\nu)!} \cdot \frac{(n-a)!}{(n-a-\nu)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-1)!} \\
 &= \frac{a}{n} \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(k-1)!}{\nu! (k-\nu-1)!} \cdot \frac{(a-1)!}{(a-k+\nu)!} \cdot \frac{(n-a)!}{(n-a-\nu)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-1)!} \\
 &= \frac{a}{n} \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(k-1)! (n-k)!}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-a)!}{\nu! (n-a-\nu)!} \cdot \frac{(a-1)!}{(k-\nu-1)! (a-k+\nu)!} \\
 &= \frac{a}{n} \cdot \frac{1}{{}_{n-1}C_{k-1}} \sum_{\nu=0}^{k-1} {}_{n-a}C_\nu \cdot {}_{a-1}C_{k-\nu-1} \\
 &= \frac{a}{n} \cdot \frac{{}_{n-1}C_{k-1}}{{}_{n-1}C_{k-1}} = \frac{a}{n}
 \end{aligned}$$

以上で,  $1 \leq k \leq \min\{a, n-a+1\}$  の場合には,  $k$  番目に引く人の当たる確率  $p_k$  は  $k$  によらず

$\frac{a}{n}$  であることが条件付き確率の考え方で証明できた。

次に、 $k \geq \min\{a, n-a+1\}+1$  の場合を示せば、証明が完成する。そのために組合せの数  ${}_n C_k$  を次のように拡張する。

任意の実数  $\alpha$  と  $j=0, 1, 2, \dots$  に対し、拡張された 2 項係数  $\binom{\alpha}{j}$  を次のように定義する。

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!} \quad (j=1, 2, \dots).$$

従って、任意に与えられた自然数  $n$  に対しては

$${}_n C_j = \binom{n}{j} \quad (j=0, 1, 2, \dots, n)$$

が成り立つ。 $j \geq n+1$  のとき、左辺は定義されないが右辺は定義され、

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-n)\cdots(n-j+1)}{j!} = 0$$

である。このように、 $\binom{n}{j}=0$  ( $j \geq n+1$ ) という性質に着目する。このとき

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{a}{n} \sum_{\nu=0}^{k-1} {}_{k-1} C_{\nu} \frac{(n-k)!}{(n-1)!} (a-1)\cdots(a-k+\nu+1) (n-a) (n-a-\nu+1) \\ &= \frac{a}{n} \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(k-1)! (n-k)!}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-a)\cdots(n-a-\nu+1)}{\nu!} \cdot \frac{(a-1)\cdots(a-k+\nu+1)}{(k-\nu-1)!} \\ &= \frac{a}{n} \binom{n-1}{k-1}^{-1} \cdot \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{n-a}{\nu} \cdot \binom{a-1}{k-\nu-1} = \frac{a}{n} \quad (k=1, 2, 3, \dots, n) \end{aligned}$$

以上で条件付き確率の考え方による証明が完成した。

注意点としては、前頁において  $p_k$  の計算の最後の所で使った公式：

$$\sum_{\nu=0}^{k-1} {}_{n-a} C_{\nu} \cdot {}_{a-1} C_{k-\nu-1} = {}_{n-1} C_{k-1}$$

(児玉正憲 [10, pp.43, 306], 洲之内治男・寺田文行・舟根智美 [17, pp.41, 141]) に対応した等式

$$\sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{n-a}{\nu} \binom{a-1}{k-\nu-1} = \binom{n-1}{k-1}$$

が  $k=1, 2, 3, \dots, n$  で成り立つかということである。この点については、小針暁宏 [11, pp.72-75] により、この等式が成り立つことが一般的に証明されている。

## 参考文献

- [1] 荒木不二洋 編, 新制 チャート式 解法と演習 数学B, 数研出版, 1995
- [2] 飯高茂・松本幸夫 編, 数学C, 東京書籍, 2003
- [3] 大関信雄・清水多門・福田途宏, 教養の数学, 培風館, 1978
- [4] 岡部靖憲, 確率・統計, 朝倉書店, 2002
- [5] 岡本和夫ほか, 数学I 新訂版, 実教出版, 2002
- [6] 岡本雅典・鈴木義一郎・杉山高一, 基本統計学, 実教出版, 1977
- [7] 栗田稔, 基礎講座 確率の手引き(3), 数学セミナー(1978年)7月号, 日本評論社
- [8] 小平邦彦 編, 数学I, 東京書籍, 1974
- [9] 小平邦彦 編, 確率・統計 高等学校用教科書, 東京書籍, 1982
- [10] 児玉正憲, 基本数理統計学, 牧野書店, 1992
- [11] 小針規宏, 確率・統計入門, 岩波書店, 1973
- [12] 清水良一, 確率と統計, 新曜社, 1980
- [13] 鈴木輝雄, 統計学入門, 杉山書店, 1978
- [14] 鈴木輝雄, 基礎課程 統計学, 共同文化社, 2005
- [15] 鈴木丕章・(山本隆範), 数学I 講義資料(プリント), 1975
- [16] 砂田利一, 新制 チャート式 数学I, 数研出版, 1994
- [17] 洲之内治男・寺田文行・舟根智美, 演習確率統計, サイエンス社, 1976
- [18] 大学自然科学教育研究会, 新しい数学, 東京教学社, 1984
- [19] 高橋陸男ほか, 改訂版 高等学校 確率・統計, 数研出版, 1988
- [20] 武隅良一, 確率, 培風館, 1978
- [21] 田代嘉宏, 工科の数学 基礎数学, 森北出版, 1993
- [22] 寺田文行・本部均・村勢一郎 編, 数学解法事典, 旺文社, 1969
- [23] 戸田宏・三輪辰郎・細川藤次 編, 高等学校 確率・統計 最新版, 啓林館, 1989
- [24] 新濃清志, 一般数学(第2版), 森北出版, 1984
- [25] 橋本智雄, 入門 統計学, 共立出版, 1996
- [26] 馬場良和, 確率論, 放送大学教育振興会, 1997
- [27] 樋口禎一・猪熊猛之, 教養の数学, 森北出版, 1984
- [28] 樋口禎一・森田康夫 編, 高校数学解法事典(改訂版), 旺文社, 2003
- [29] 矢野健太郎・田代嘉宏, 社会科学者のための基礎数学(改訂版), 裳華房, 1993
- [30] 矢野健太郎・茂木勇, 行動科学者のための基礎数学, 裳華房, 1971
- [31] 山本芳彦 編, 高等学校 数学B 改訂版, 啓林館, 1998
- [32] 山本芳彦 編, 高等学校 新編 数学A, 啓林館, 2002
- [33] 渡辺信三ほか, 数学C, 数研出版, 2003